Statističko zaključivanje (nastavak) Poglavlje 4. Statističko testiranje hipoteza

dr Đorđe Nikolić, redovni profesor
E-mail: djnikolictfbor@gmail.com

9. novembar 2026.. godine

Ciljevi poglavlja

- Testiranje statističkih hipoteza-osnovne napomene,
- Parametarski vs. Neparametarski statistički testovi,
- Testiranje statističkih hipoteza- parametarski testovi:
  - Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na jednom uzorku,
  - Testiranje statističkih hipoteza za dva nezavisna uzorka;
  - Testiranje statističkih hipoteza za dva zavisna uzorka,
  - Analiza varijanse sa jednim faktorom (ANOVA),
  - Višefaktorska analiza varijanse (dvofaktorska analiza varijanse).

Preporučena literatura

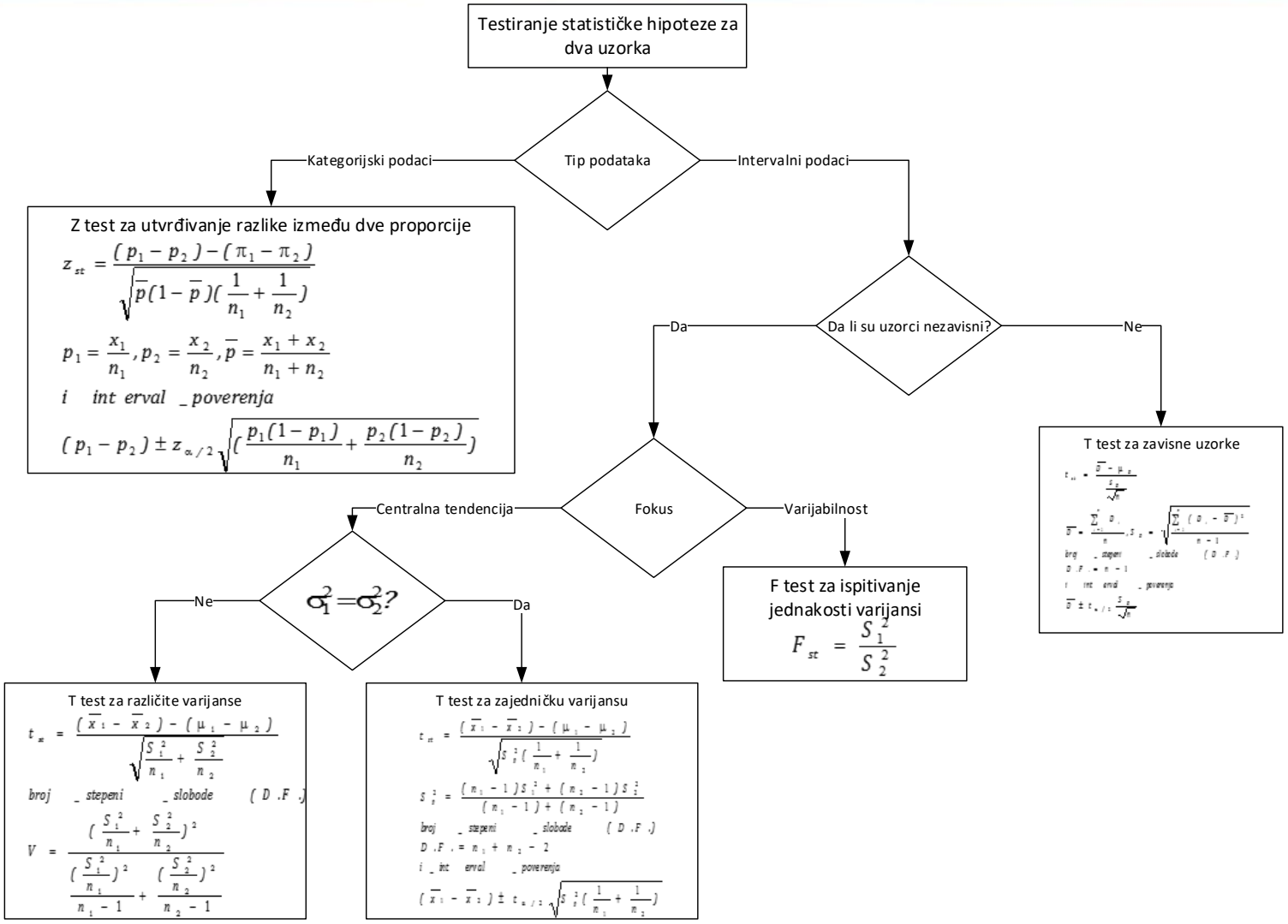
- Radojević, S, Veljković Z, Kvantitativne metode, CD, MF,
- Montgomery, DC, Runger, GC, Applied Statistics and Probability for Engineers, Fourth Edition, Wiley, 2007.

Koncept testiranja statističkih hipoteza

- **Procedura testiranja statističke hipoteze:**

1. Definisanje nulte i alternativne hipoteze,
2. Izbor nivoa značajnosti testa α i određivanje kritičnih vrednosti,
3. Izbor statistike testa i određivanje njegovog rasporeda verovatnoće,
4. Formulisanje pravila odlučivanja o prihvatanju, odnosno, odbacivanju nulte hipoteze,
5. Izvlačenje uzorka iz osnovnog skupa i izračunavanje vrednosti statistike testa,
6. Donošenje odluke o prihvatanju, odnosno, odbacivanju nulte hipoteze.
7. Opciono: Analiza osetljivosti rezultata, promenom parametara koraka 2.

Testiranje statističkih hipoteza- parametarski testovi



Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka

- Razmatranje razlike arimetičkih sredina za dva nezavisna uzorka

Aritmetičke sredine populacija preko nezavisnih uzoraka

- σ_1 i $\sigma 2$ nepoznate i pretpostavka da su iste
- σ_1 i $\sigma 2$ nepoznate i pretpostavka da nisu iste

Cilj: Testiranje hipoteze ili formiranje intervala poverenja za razliku aritmetičkih sredina populacije:

$$\mu_1 - \mu_2$$

Polazna osnova za utvrđivanje razlike je:

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$$

Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka

- **Oblici nulte i alternativne hipoteze za dve nezavisne populacije:**

  1) **Prost slučaj (obostrani- two tail):**

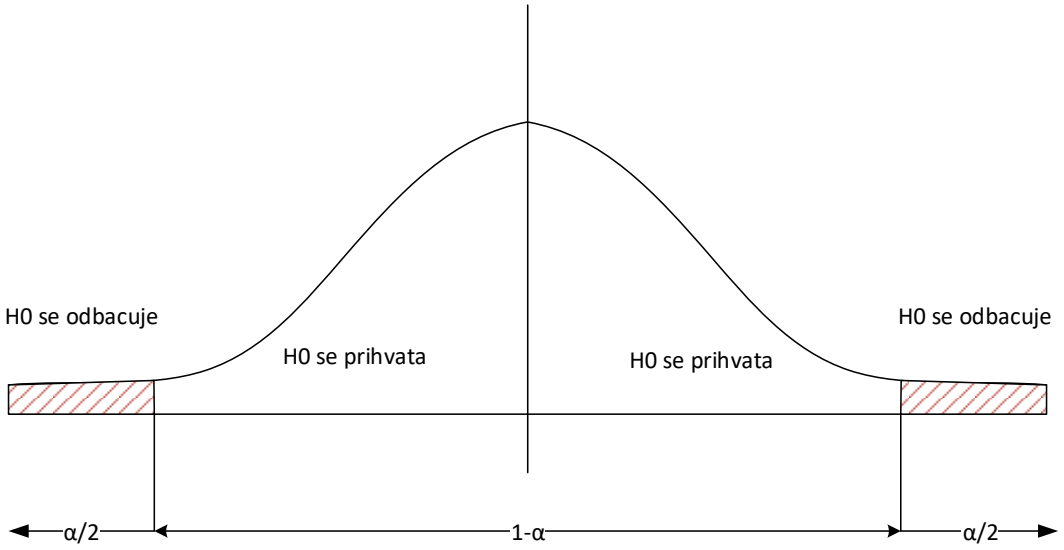
H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

Odnosno

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$



Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka uzorka

- **Oblici nulte i alternativne hipoteze za dve nezavisne populacije :**

2) Složen slučaj (levi-one tail):

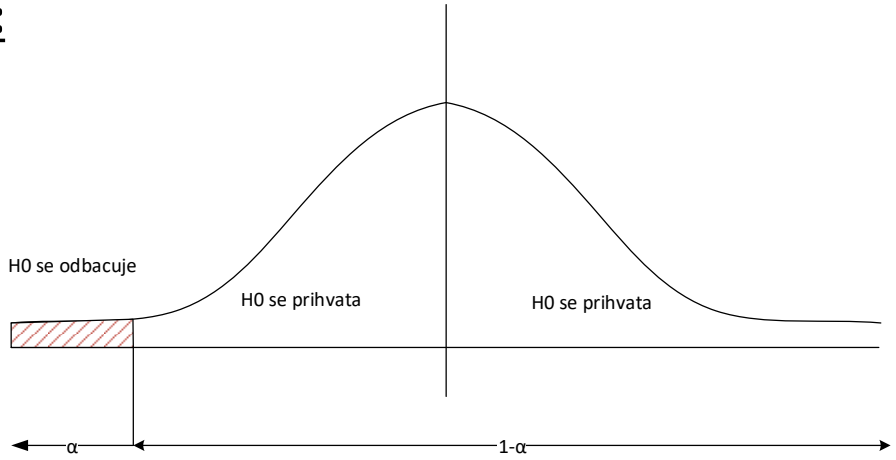
H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$

H_1: $\mu_1 < \mu_2$

Odnosno

H_0: $\mu_1 - \mu_2 \geq 0$

H_1: $\mu_1 - \mu_2 < 0$



3) Složen slučaj (desni-one tail):

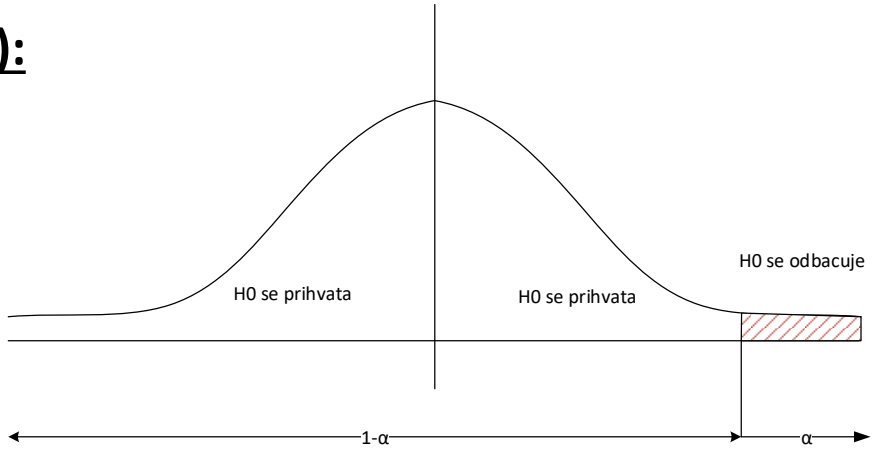
H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$

H_1: $\mu_1 > \mu_2$

Odnosno

H_0: $\mu_1 - \mu_2 \leq 0$

H_1: $\mu_1 - \mu_2 > 0$



Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka

- **Izračunavanje veličine uticaja u t-testu nezavisnih populacija**

Pokazatelji veličine uticaja (engl. effect size) ukazuju na veličinu razlike između grupa, a ne samo da li je ta razlika slučajna ili ne. Veličina uticaja se procenjuje pomoću više pokazatelja, od kojih se najviše upotrebljavaju eta kvadrat i Koenov d. Eta kvadrat može imati vrednost u opsegu od 0 do 1 i predstavlja proporciju varijanse u zavisnoj promenljivoj objašnjenu nezavisnom promenljivom (grupisanja).

$$\eta^2 = \frac{t^2}{t^2 + (n_1 + n_2 - 2)}$$

Smernice za tumačenje ove veličine glase:

- 0.01=mali uticaj,
- 0.06=umeren uticaj
- 0.14=veliki uticaj

Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka

- **Oblici nulte i alternativne hipoteze za dve zavisne populacije:**

  1) Prost slučaj (obostrani- two tail):

  H_0: $\mu_D = 0$

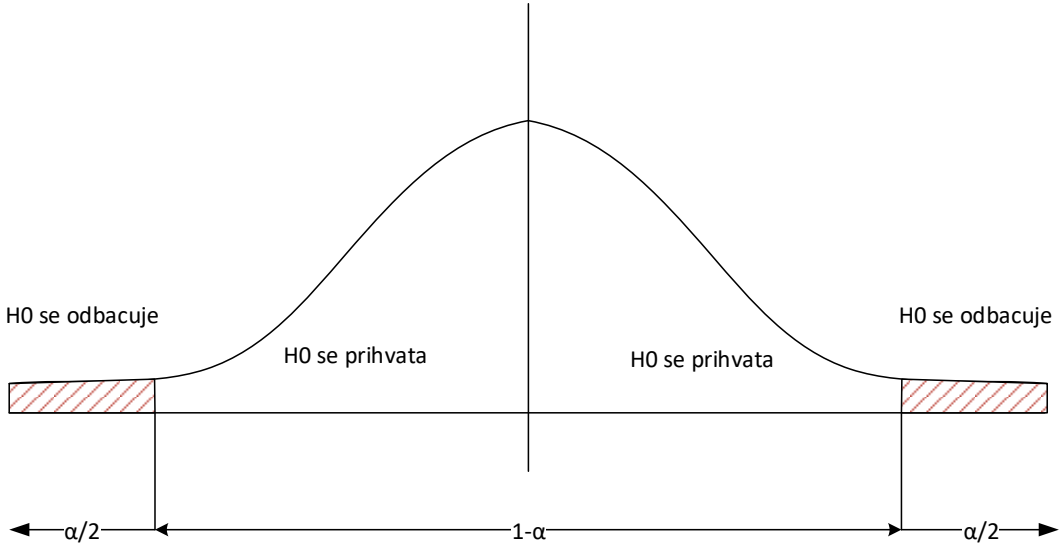
  H_1: $\mu_D \neq 0$

Polazna osnova za utvrđivanje razlike je:

$$D_i = X_{1i} - X_{2i}$$

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n}$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (D_i - \bar{D})^2}{n-1}}$$



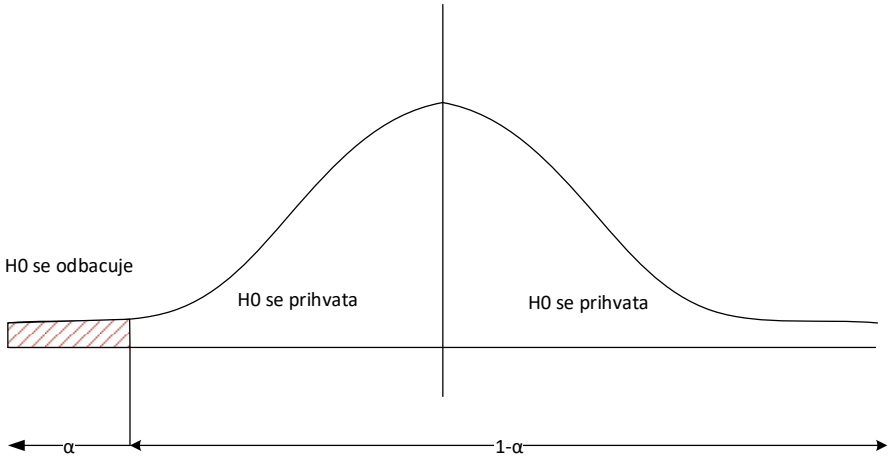
Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka uzorka

- **Oblici nulte i alternativne hipoteze za dve zavisne populacije :**

2) Složen slučaj (levi-one tail):

H_0: $\mu_D \geq 0$

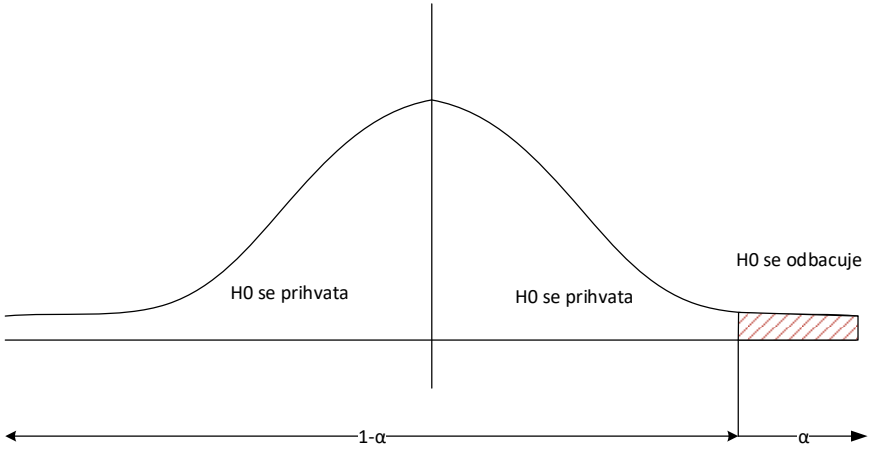
H_1: $\mu_D < 0$



3) Složen slučaj (desni-one tail):

H_0: $\mu_D \leq 0$

H_1: $\mu_D > 0$



Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka

- **Izračunavanje veličine uticaja u T-testu zavisnih uzoraka**

Rezultati T-testa zavisnih uzoraka nam pokazuju da li je uočena razlika statistički značajna. Međutim, utvrđivanje statističke značajnosti uočene razlike između posmatrana dva skupa nam ništa ne govori o veličini te razlike tj. o veličini uticaja analiziranog faktora koji uslovljava uočenu razliku. Utvrđena statistička značajnost nam jedino kazuje da je verovatnoća da je uočena razlika između dva skupa slučajna veoma mala (manja od granične).

Za određivanje veličine uticaja može se koristiti eta kvadrat pokazatelj koji se računa po sledećoj formuli:

$$\eta^2 = \frac{t^2}{t^2 + (n-1)}$$

Smernice za tumačenje ove veličine glase:

- 0.01=mali uticaj,
- 0.06=umeren uticaj
- 0.14=veliki uticaj

Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka

- Razmatranje razlike proporcija dveju populacija

Proporcije populacija

- Pretpostavke

$n_1\pi_1 \geq 5$, $n_1(1-\pi_1) \geq 5$

$n_2\pi_2 \geq 5$, $n_2(1-\pi_2) \geq 5$

Cilj: Testiranje hipoteze ili formiranje intervala poverenja za razliku proporcija dveju populacija:

$$\pi_1 - \pi_2$$

Polazna osnova za utvrđivanje razlike je:

$$p_1 - p_2$$

Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka

- **Oblici nulte i alternativne hipoteze za dve proporcije populacije:**

  1) **Prost slučaj (obostrani- two tail):**

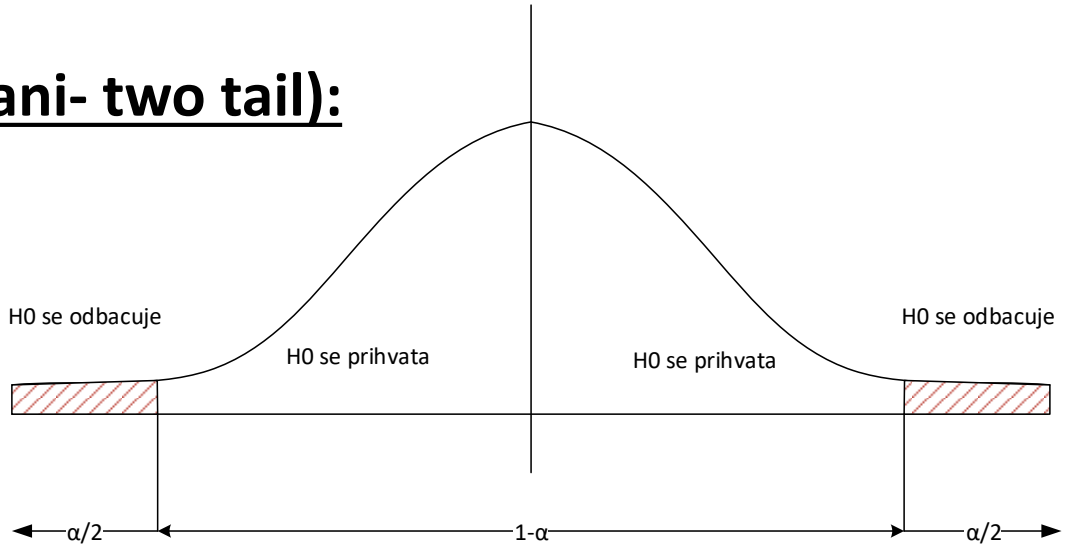
  H_0: $\pi_1 = \pi_2$

  H_1: $\pi_1 \neq \pi_2$

  Odnosno

  H_0: $\pi_1 - \pi_2 = 0$

  H_1: $\pi_1 - \pi_2 \neq 0$



Polazna osnova za utvrđivanje razlike je:

$$\pi_1 - \pi_2$$

Zajednička proporcija:

$$\bar{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka uzorka

- **Oblici nulte i alternativne hipoteze za dve proporcije populacije :**

2) Složen slučaj (levi-one tail):

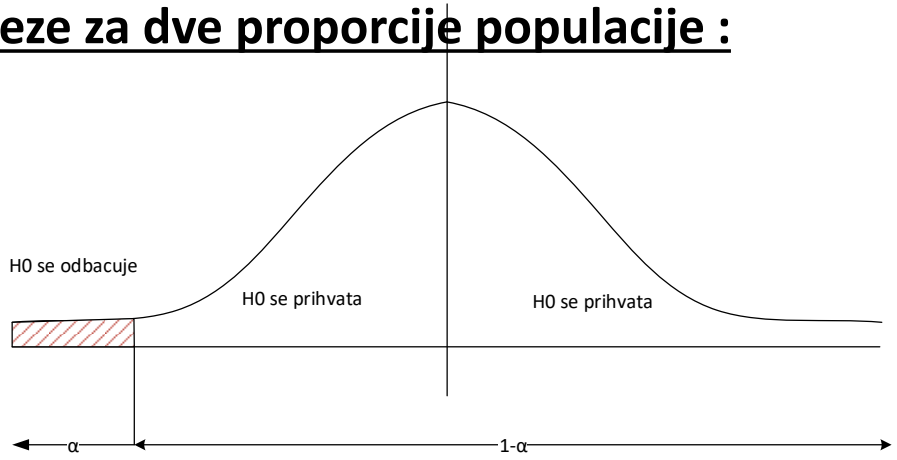
$H_0: \pi_1 \geq \pi_2$

$H_1: \pi_1 < \pi_2$

Odnosno

$H_0: \pi_1 - \pi_2 \geq 0$

$H_1: \pi_1 - \pi_2 < 0$



3) Složen slučaj (desni-one tail):

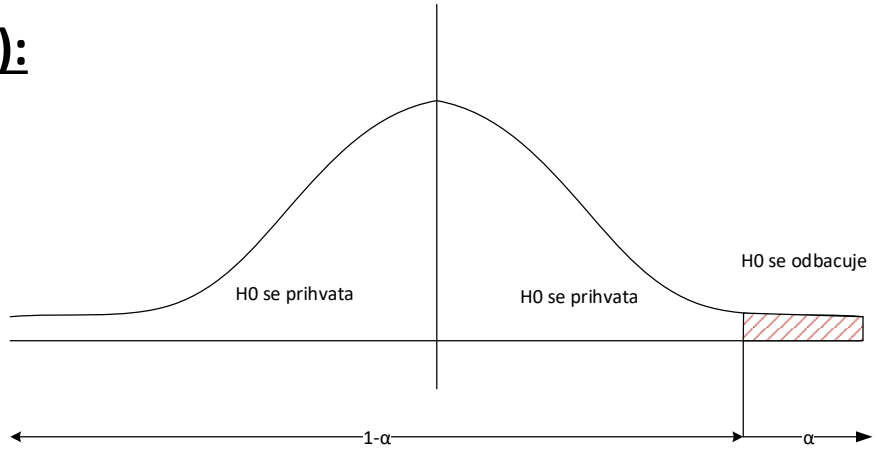
$H_0: \pi_1 \leq \pi_2$

$H_1: \pi_1 > \pi_2$

Odnosno

$H_0: \pi_1 - \pi_2 \leq 0$

$H_1: \pi_1 - \pi_2 > 0$

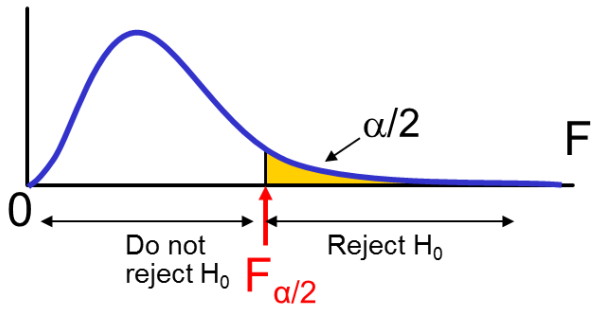


Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka uzorka

- **Oblici nulte i alternativne hipoteze za testiranje odnosa varijansi dveju populacija :**

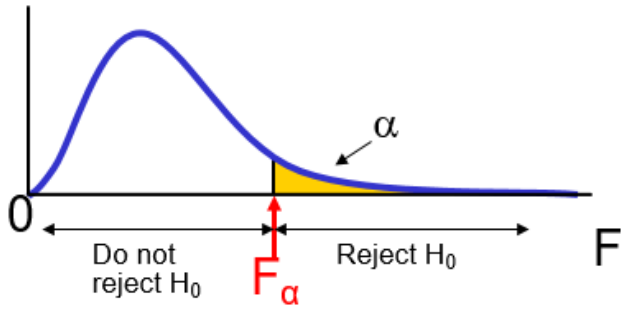
1) Prost slučaj (obostrani- two tail) **2) Složen slučaj (desni-one tail):**

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$



Reject H_0 if $F_{STAT} > F_{\alpha/2}$

$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$
$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$



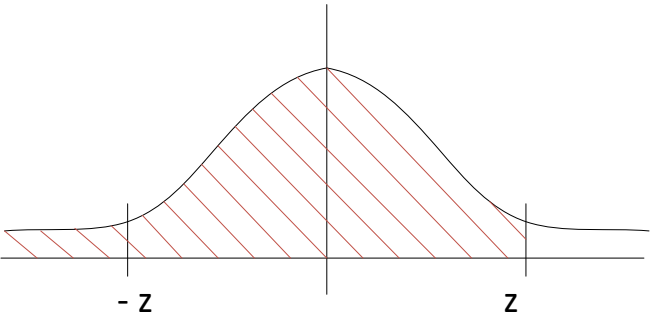
Reject H_0 if $F_{STAT} > F_{\alpha}$

$$F_{STAT} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad df_1 = n_1 - 1 \; ; \; df_2 = n_2 - 1$$

Normalna distribucija

Verovatnoće

Ukupna površina ispod krive normalne distribucije je 1. Možemo koristiti tabele da pronađemo oblasti verovatnoće za određene z-vrednosti.



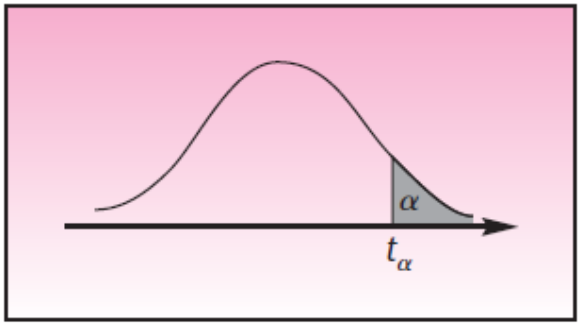
Označena površina za vrednost z ≤1 iznosi 84.13%.

To znači da je verovatnoća za dobijanje vrednosti manje od 1σ iznad aritmetičke sredine 0.3413.

Takođe, moglo bi se reći da procenat distribucije između z = -1 i z = +1 iznosi 68.26%

x↓ y→	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-1.00	0.1586553	0.1562477	0.1538642	0.1515050	0.1491700	0.1468591	0.1445723	0.1423097	0.1400711	0.1378566
-0.90	0.1840601	0.1814112	0.1787864	0.1761855	0.1736088	0.1710561	0.1685276	0.1660232	0.1635431	0.1610871
-0.80	0.2118553	0.2089700	0.2061080	0.2032693	0.2004541	0.1976625	0.1948945	0.1921502	0.1894296	0.1867329
-0.70	0.2419636	0.2388520	0.2357624	0.2326950	0.2296499	0.2266273	0.2236272	0.2206499	0.2176954	0.2147638
-0.60	0.2742531	0.2709308	0.2676288	0.2643472	0.2610862	0.2578460	0.2546268	0.2514288	0.2482522	0.2450970
-0.50	0.3085375	0.3050257	0.3015318	0.2980559	0.2945985	0.2911597	0.2877397	0.2843388	0.2809573	0.2775953
-0.40	0.3445783	0.3409030	0.3372428	0.3335979	0.3299686	0.3263552	0.3227581	0.3191775	0.3156137	0.3120669
-0.30	0.3820886	0.3782805	0.3744842	0.3707000	0.3669283	0.3631694	0.3594236	0.3556913	0.3519728	0.3482683
-0.20	0.4207403	0.4168339	0.4129356	0.4090459	0.4051652	0.4012937	0.3974319	0.3935802	0.3897388	0.3859082
-0.10	0.4601721	0.4562046	0.4522415	0.4482832	0.4443300	0.4403823	0.4364405	0.4325051	0.4285763	0.4246546
0.00	0.5000000	0.5039894	0.5079784	0.5119665	0.5159535	0.5199389	0.5239223	0.5279032	0.5318814	0.5358565
0.10	0.5398279	0.5437954	0.5477585	0.5517168	0.5556700	0.5596177	0.5635595	0.5674949	0.5714237	0.5753454
0.20	0.5792597	0.5831661	0.5870644	0.5909541	0.5948348	0.5987063	0.6025681	0.6064198	0.6102612	0.6140918
0.30	0.6179114	0.6217195	0.6255158	0.6293000	0.6330717	0.6368306	0.6405764	0.6443087	0.6480272	0.6517317
0.40	0.6554217	0.6590970	0.6627572	0.6664021	0.6700314	0.6736448	0.6772419	0.6808225	0.6843863	0.6879331
0.50	0.6914625	0.6949743	0.6984682	0.7019441	0.7054015	0.7088403	0.7122603	0.7156612	0.7190427	0.7224047
0.60	0.7257469	0.7290692	0.7323712	0.7356528	0.7389138	0.7421540	0.7453732	0.7485712	0.7517478	0.7549030
0.70	0.7580364	0.7611480	0.7642376	0.7673050	0.7703501	0.7733727	0.7763728	0.7793501	0.7823046	0.7852362
0.80	0.7881447	0.7910300	0.7938920	0.7967307	0.7995459	0.8023375	0.8051055	0.8078498	0.8105704	0.8132671
0.90	0.8159399	0.8185888	0.8212136	0.8238145	0.8263912	0.8289439	0.8314724	0.8339768	0.8364569	0.8389129
1.00	0.8413447	0.8437523	0.8461358	0.8484950	0.8508300	0.8531409	0.8554277	0.8576903	0.8599289	0.8621434
1.10	0.8643339	0.8665004	0.8686431	0.8707618	0.8728568	0.8749280	0.8769755	0.8789995	0.8809998	0.8829767
1.20	0.8849303	0.8868605	0.8887675	0.8906514	0.8925122	0.8943502	0.8961653	0.8979576	0.8997274	0.9014746

Student-ova t distribucija-tabelarne vrednosti



Degrees of Freedom	$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

F distribucija-tabelarne vrednosti

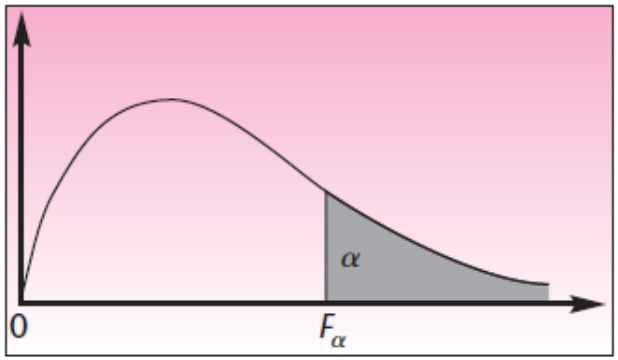


TABLE 5 *(continued)* Critical Values of the *F* Distribution for $\alpha = 0.05$

Denominator Degrees of Freedom (k_2)	Numerator Degrees of Freedom (k_1)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

F distribucija-tabelarne vrednosti

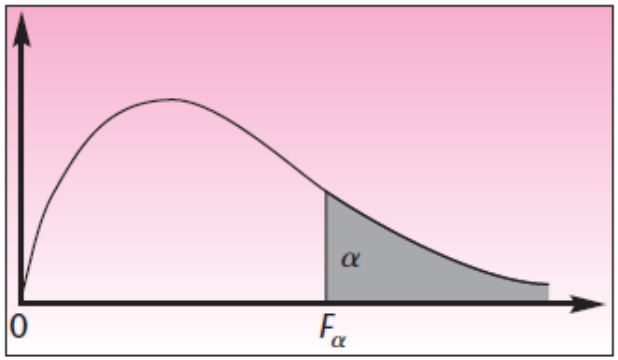


TABLE 5 *(continued)* Critical Values of the *F* Distribution for $\alpha = 0.025$

Denominator Degrees of Freedom (k_2)	Numerator Degrees of Freedom (k_1)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11

Rezime poglavlja

- Pitanja?
- Diskusija!