Poglavlje 3.
Statističko zaključivanje

dr Đorđe Nikolić, redovni profesor
E-mail: djnikolictfbor@gmail.com

9. novembar 2026. godine

Ciljevi poglavlja

- Mere centralne tendencije,
- Mere disperzije,
- Statističko ocenjivanje,
- Interval poverenja za aritmetičku sredinu populacije,
- Interval poverenja za proporciju populacije,
- Određivanje veličine uzorka.

Preporučena literatura

- Radojević, S, Veljković Z, Kvantitativne metode, CD, MF,
- Montgomery, DC, Runger, GC, Applied Statistics and Probability for Engineers, Fourth Edition, Wiley, 2007.

Mere centralne tendencije (mere lokacije)

- **Srednja vrednost – prosek** (Aritmetička sredina, Geometrijska sredina, Harmonijska sredina, Kvadratna sredina, Kubna sredina)
- **Medijana** (kvartili)
  - vrednost obeležja, koja polovi seriju uređenu po veličini obeležja
- **Modus**
  - vrednost obeležja, koja ima najveću frekvenciju

Mere lokacije za negrupisane podatke

Aritmetička sredina

Neka je dat polazni skup podataka: 1,2,4,4,5,5,5,6,8,9,10;

aritmetička sredina iznosi:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{59}{11} = 5.364$$

Za ovaj skup podataka, koji je uređen po veličini obeležja, **medijana** predstavlja srednju vrednost, i ona iznosi 5.

Mere lokacije za negrupisane podatke (nastavak)

Kvartili

Donji (prvi) kvartil Q_1 se određuje na osnovu formule:

$$Q_1 = x_{\frac{n+1}{4}}$$

Gornji (treći) kvartil Q_3 se određuje na osnovu formule:

$$Q_3 = x_{\frac{3(n+1)}{4}}$$

Za dati polazni skup podataka: 1,2,4,4,5,5,5,6,8,9,10;

- Donji kvartil Q_1 je treća vrednost u nizu i iznosi 4,
- Pozicija gornjeg kvartila Q_3 je vrednost 9, U tom slučaju, vrednost gornjeg kvartila je 8.

Modus je najčešća vrednost obeležja, i u ovom slučaju iznosi 5.

Mere lokacije za prostu distribuciju frekvencija

Aritmetička sredina

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{355}{130} = 2.73$$

x	f	X*f
1	20	20
2	30	60
3	50	150
4	25	100
5	5	25
Ukupno	**130**	**355**

Mere lokacije za prostu distribuciju frekvencija (nastavak)

Medijana

x	f	Kumulativ
1	20	20
2	30	50
3	50	100
4	25	125
5	5	130
Ukupno	**130**	

Pozicija medijane je određena izrazom:
(130+1)/2 = 65.5
Ova vrednost se nalazi u kumulativu vrednosti na poziciji za X=3. Stoga, vrednost **medijane** je 3.

Mere lokacije za prostu distribuciju frekvencija (nastavak)

Kvartili

Za određivanje pozicije donjeg kvartila Q_1 koristimo izraz n/4: 130/4 = 32.3
Ova vrednost se nalazi u kumulativu vrednosti na poziciji za X=2. Stoga, vrednost **donjeg kvartila Q_1** je 2.
Takođe, za određivanje pozicije gornjeg kvartila Q_3 koristimo izraz 3n/4: 3*130/4 =97.5.
Ova vrednost se nalazi u kumulativu vrednosti na poziciji za X=3. Stoga, vrednost **gornjeg kvartila Q_3** je 3.

x	f	Kumulativ
1	20	20
2	30	50
3	50	100
4	25	125
5	5	130
Ukupno	**130**	

Modus je vrednost obeležja sa najvećom frekvencijom, i ovom slučaju iznosi 3.

Mere lokacije za distribuciju frekvencija sa grupnim intervalima

Aritmetička sredina

$$\bar{x}' = \frac{\bar{x}_1 \cdot f_1 + \bar{x}_2 \cdot f_2 + \ldots + \bar{x}_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{950}{100} = 9.5$$

X (Broj radnih sati)	Prosek intervala	f	Prosek intervala *f
Od 0 do 5	2.5	20	50
Od 5 do 10	7.5	40	300
Od 10 do 15	12.5	30	375
Od 15 do 30	22.5	10	225
	Ukupno	**100**	**950**

Mere lokacije za distribuciju frekvencija sa grupnim intervalima (nastavak)

Medijana

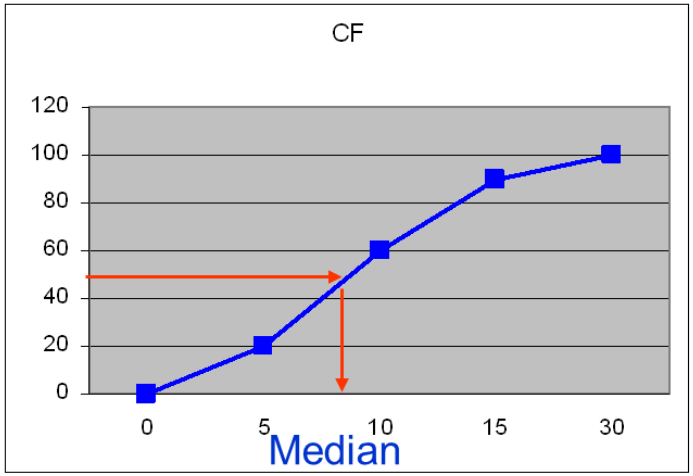
$$M_e = L_1 + i\left(\frac{\frac{n}{2} - \sum fi_{premedijalna_klasa}}{f_{medijalne_intervalne_klase}}\right) = 5 + 5 \cdot \frac{\frac{100}{2} - 20}{40} = 8.75$$

Gde su:

L1- donja granica intervalne klase u kojoj je medijana, i

i – širina intervalne klase u kojoj je medijana

X (Broj radnih sati)	f	kumulativ
Od 0 do 5	20	20
Od 5 do 10	40	60
Od 10 do 15	30	90
Od 15 do 30	10	100
Ukupno	**100**	



Medijana= 8.75

Mere lokacije za distribuciju frekvencija sa grupnim intervalima (nastavak)

Kvartili

$$Q_1 = L_1 + i\left(\frac{\frac{n}{4} - \sum fi_{prekvartilna_klasa}}{f_{kvartilne_intervalne_klase}}\right) = 5 + 5 \cdot \frac{\frac{100}{4} - 20}{40} = 5.625$$

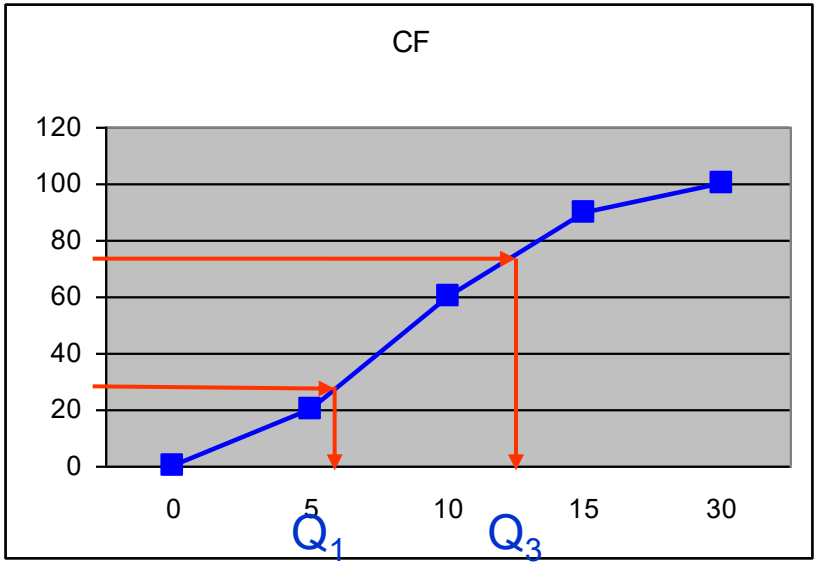
$$Q_3 = L_1 + i\left(\frac{\frac{3n}{4} - \sum fi_{prekvartilna_klasa}}{f_{kvartilne_intervalne_klase}}\right) = 10 + 5 \cdot \frac{\frac{3 \cdot 100}{4} - 60}{30} = 12.5$$

Gde su:

L_1- donja granica intervalne klase u kojoj je kvartil, i

i – širina intervalne klase u kojoj je kvartil

X (Broj radnih sati)	f	kumulativ
Od 0 do 5	20	20
Od 5 do 10	40	60
Od 10 do 15	30	90
Od 15 do 30	10	100
Ukupno	**100**	

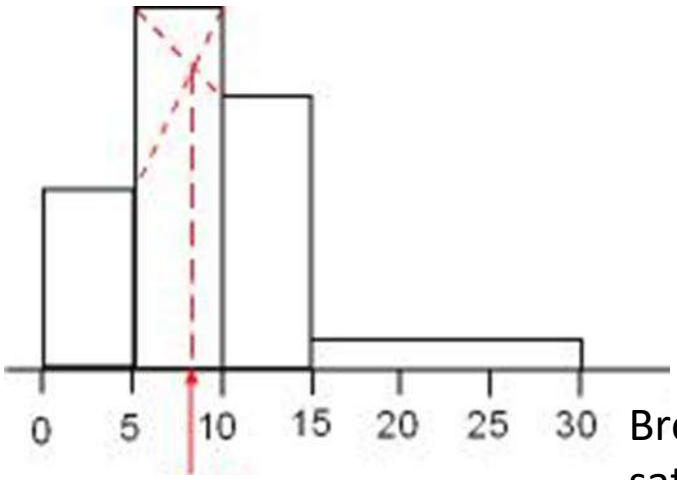


Mere lokacije za distribuciju frekvencija sa grupnim intervalima (nastavak)

Modus

X (Broj radnih sati)	f
Od 0 do 5	20
Od 5 do 10	40
Od 10 do 15	30
Od 15 do 30	10
Ukupno	**100**

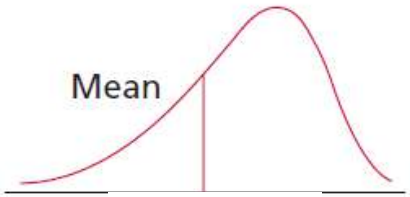
Modus se može odrediti na osnovu histograma. U ovom primeru vrednost je nešto preko 8 časova.



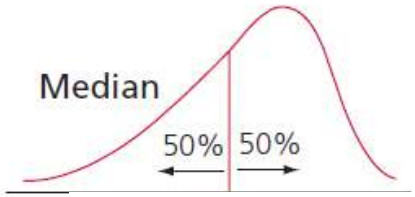
$$M_e = L_1 + i\left(\frac{f_{medijalni_interval_klase} - fi_{premedijalna_klasa}}{(f_{medijalni_interval_klase} - fi_{premedijalna_klasa}) + (f_{medijalni_interval_klase} - fi_{poslemedijalna_klasa})}\right) =$$

$$= 5 + 5 \cdot \frac{40-20}{(40-20)+(40-30)} = 8.33$$

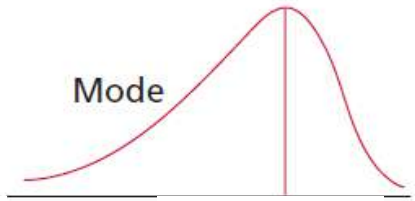
Međusobni odnos između mera centralne tendencije



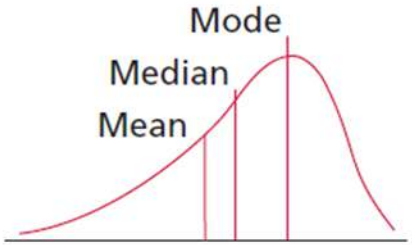
„Centar gravitacije“



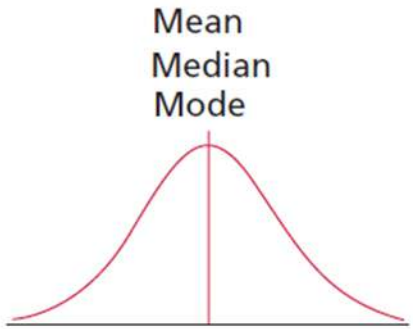
Deli skup na dva jednaka dela



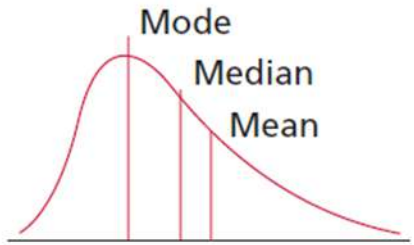
Najviša tačka



Negativna iskrivljenost



Simetričnost



Pozitivna iskrivljenost

Mere disperzije

- **Opseg**
  - Razlika između najveće vrednosti obeležja i najmanje vrednosti obeležja
- **Varijansa i Standardna devijacija**
  - Varijansa predstavlja prosek kvadratnih odstupanja originalnih podataka od aritmetičke sredine

$$1)\, s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$2)\, s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \right)^2$$

Mere disperzije za negrupisane podatke

Xi	Xi-Xsred	$(Xi-Xsred)^2$
X1=1	-4	16
X2=2	-3	9
X3=4	-1	1
X4=4	-1	1
X5=5	0	0
X6=5	0	0
X7=5	0	0
X8=6	1	1
X9=8	3	9
X10=10	5	25
	Ukupno	62

$$\bar{x} = \frac{50}{10} = 5$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{62}{10} = 6.2$$

$$s = \pm\sqrt{6.2} = \pm 2.489$$

Mere disperzije za prostu distribuciju frekvencija

x	f	X*f	f*X²
1	20	20	20
2	30	60	120
3	50	150	450
4	25	100	400
5	5	25	125
Ukupno	**130**	**355**	**1115**

$$s = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fX}{\sum f}\right)^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{1115}{130} - \left(\frac{355}{130}\right)^2}$$

$$s = \sqrt{8.5769 - (2.7308)^2}$$

$$s = \sqrt{1.1198} = \pm 1.058$$

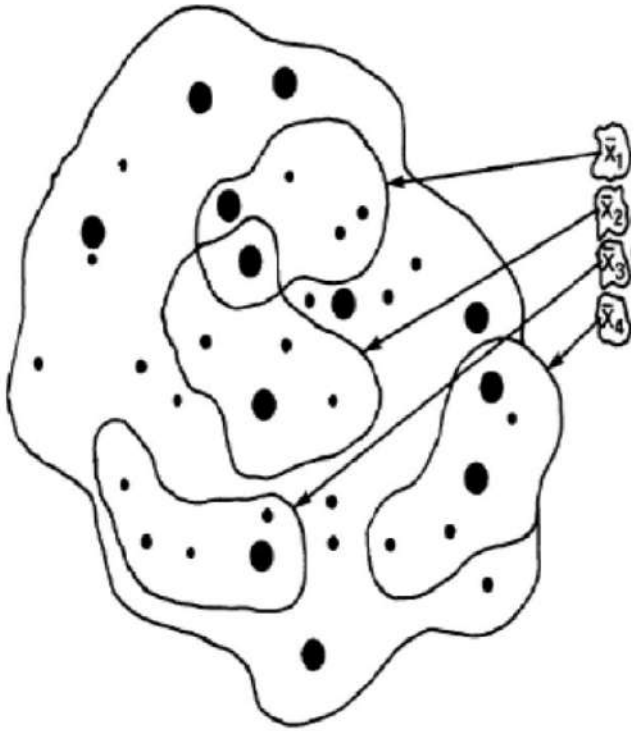
Mere disperzije za distribuciju frekvencija sa grupnim intervalima

X (Broj radnih sati)	Prosek intervala	f	Prosek intervala *f	Prosek intervala^2 *f
Od 0 do 5	2.5	20	50	125
Od 5 do 10	7.5	40	300	2250
Od 10 do 15	12.5	30	375	4687.5
Od 15 do 30	22.5	10	225	5062.5
	Ukupno	**100**	**950**	**12125**

$$\bar{x}' = \frac{\bar{x}_1 \cdot f_1 + \bar{x}_2 \cdot f_2 + \ldots + \bar{x}_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{950}{100} = 9.5$$

$$s = \sqrt{\frac{12125}{100} - \left(\frac{950}{100}\right)^2} = \sqrt{121.25 - 90.25} = \pm 5.568$$

Statističko zaključivanje

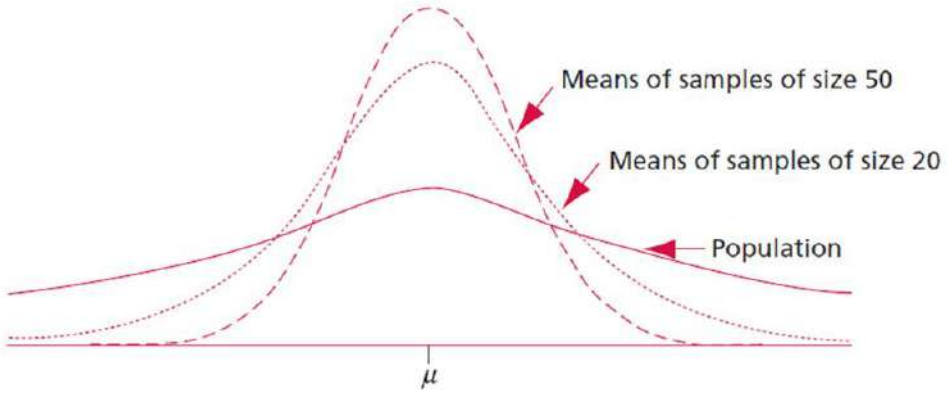


Aritmetička sredina će varirati od uzorka do uzorka

Poznato je da će veličina srednje vrednosti uzorka varirati od uzorka do uzorka.

Prateći distribuciju uzorkovanja:

- može se očekivati da će srednja vrednost uzorka varirati oko prave (populacijske) srednje vrednosti, i
- varijacija će zavisiti od veličine uzorka, što je veći uzorak, manje je rasprostranjena distribucija (uzorkovanja).



Centralna granična teorema

Bez obzira kakav je oblik matične distribucije, distribucija uzorkovanja srednjih vrijednosti uzorka će se približiti normalnoj distribuciji sa srednjom vrednošći μ i standardnom greškom:

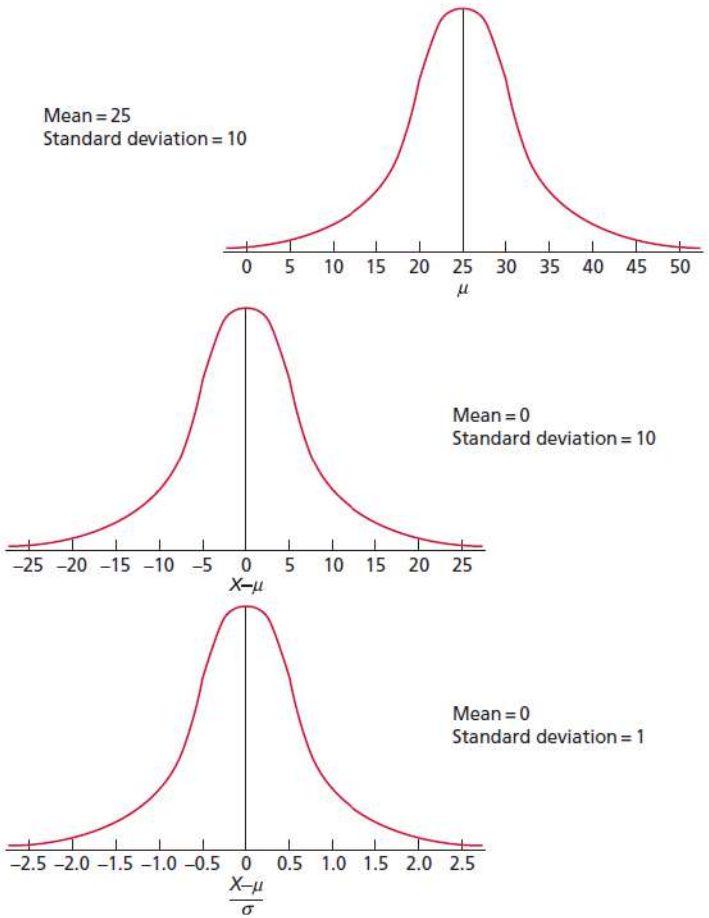
$$\sqrt{\sigma^2/n} = \sigma/\sqrt{n}$$

pod uslovom da je veličina uzorka dovoljno velika (n ≥ 30). Gde je standardna greška mera širenja (standardna devijacija) za distribuciju uzorkovanja.

Standardna greška (SE – Standard Error) fizički i praktično objašnjava koliko je pouzdan i precizan naš uzorak u odnosu na celu populaciju. Ona meri **varijabilnost (šum) aritmetičkih sredina** koje bismo dobili kada bismo iznova i iznova ponavljali isto istraživanje na različitim uzorcima.

Za razliku od standardne devijacije, koja opisuje koliko se pojedinačni ljudi ili objekti razlikuju unutar jednog uzorka, standardna greška opisuje **koliko sam prosečni rezultat uzorka (aritmetička sredina) "šeta" oko prave, istinite vrednosti populacije**

Normalna distribucija



Standardna normalna distribucija

Postoji mnogo različitih normalnih distribucija opisanih različitim vrednostima srednje vrednosti i standardne devijacije. Međutim, sve se one mogu transformisati u **standardnu normalnu distribuciju.**

Z-vrednost za srednju vrednost uzorka (često se naziva i z-statistika) računa se kada želimo da proverimo koliko se aritmetička sredina našeg uzorka razlikuje od pretpostavljene aritmetičke sredine populacije, izraženo u jedinicama standardne greške.

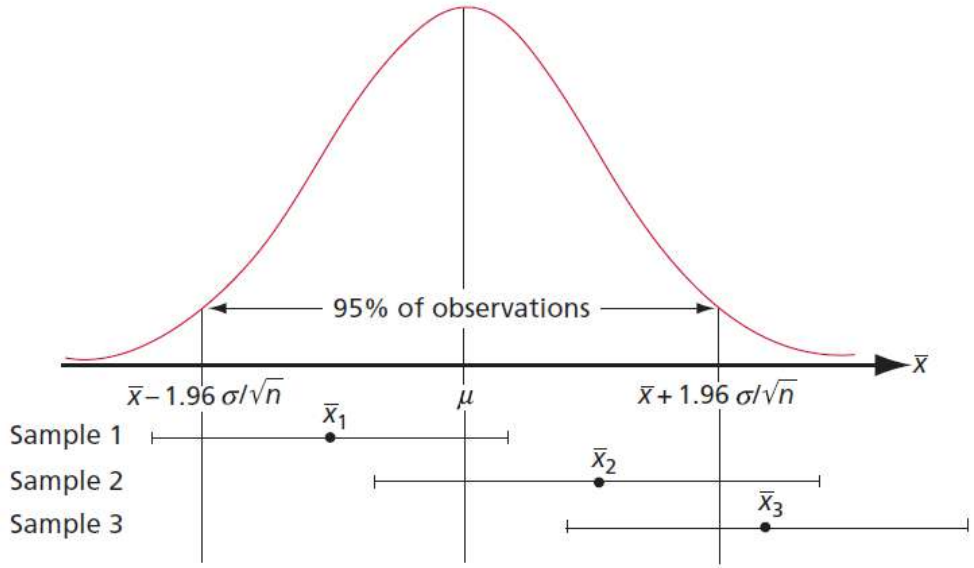
Z transformacija za srednje vrednosti uzorka je data sa:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Statističko ocenjivanje

- Statističko ocenjivanje za aritmetičku sredinu:

$$\mu = \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



- Statističko ocenjivanje za proporciju:

$$\pi = \bar{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Određivanje veličine uzorka

Često je slučaj da želimo da znamo koja je veličina uzorka potrebna da bi se proizvela prihvatljiva greška (e).

Za aritmetičku sredinu:

$$n = \left(\frac{zs}{e} \right)^2$$

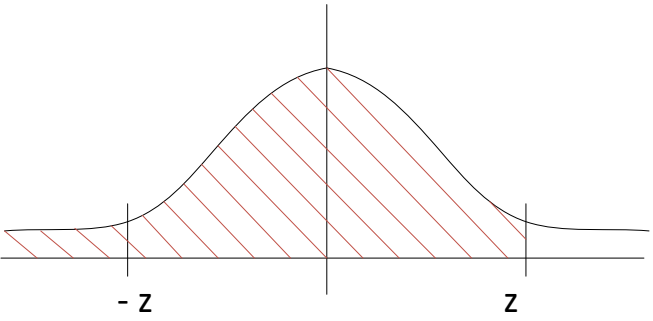
Za proporciju:

$$n = \left(\frac{z}{e} \right)^2 \times p \times (100 - p)$$

Normalna distribucija

Verovatnoće

Ukupna površina ispod krive normalne distribucije je 1. Možemo koristiti tabele da pronađemo oblasti verovatnoće za određene z-vrednosti.



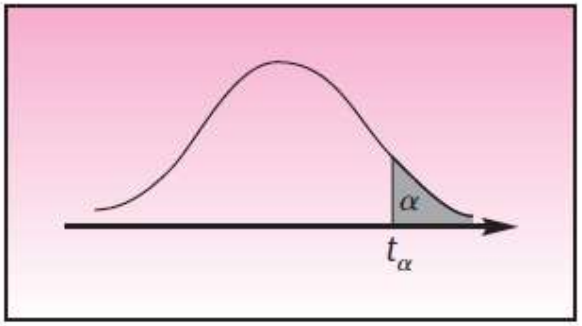
Označena površina za vrednost z ≤1 iznosi 84.13%.

To znači da je verovatnoća za dobijanje vrednosti manje od 1σ iznad aritmetičke sredine 0.3413.

Takođe, moglo bi se reći da procenat distribucije između z = -1 i z = +1 iznosi 68.26%

x↓ y→	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-1.00	0.1586553	0.1562477	0.1538642	0.1515050	0.1491700	0.1468591	0.1445723	0.1423097	0.1400711	0.1378566
-0.90	0.1840601	0.1814112	0.1787864	0.1761855	0.1736088	0.1710561	0.1685276	0.1660232	0.1635431	0.1610871
-0.80	0.2118553	0.2089700	0.2061080	0.2032693	0.2004541	0.1976625	0.1948945	0.1921502	0.1894296	0.1867329
-0.70	0.2419636	0.2388520	0.2357624	0.2326950	0.2296499	0.2266273	0.2236272	0.2206499	0.2176954	0.2147638
-0.60	0.2742531	0.2709308	0.2676288	0.2643472	0.2610862	0.2578460	0.2546268	0.2514288	0.2482522	0.2450970
-0.50	0.3085375	0.3050257	0.3015318	0.2980559	0.2945985	0.2911597	0.2877397	0.2843388	0.2809573	0.2775953
-0.40	0.3445783	0.3409030	0.3372428	0.3335979	0.3299686	0.3263552	0.3227581	0.3191775	0.3156137	0.3120669
-0.30	0.3820886	0.3782805	0.3744842	0.3707000	0.3669283	0.3631694	0.3594236	0.3556913	0.3519728	0.3482683
-0.20	0.4207403	0.4168339	0.4129356	0.4090459	0.4051652	0.4012937	0.3974319	0.3935802	0.3897388	0.3859082
-0.10	0.4601721	0.4562046	0.4522415	0.4482832	0.4443300	0.4403823	0.4364405	0.4325051	0.4285763	0.4246546
0.00	0.5000000	0.5039894	0.5079784	0.5119665	0.5159535	0.5199389	0.5239223	0.5279032	0.5318814	0.5358565
0.10	0.5398279	0.5437954	0.5477585	0.5517168	0.5556700	0.5596177	0.5635595	0.5674949	0.5714237	0.5753454
0.20	0.5792597	0.5831661	0.5870644	0.5909541	0.5948348	0.5987063	0.6025681	0.6064198	0.6102612	0.6140918
0.30	0.6179114	0.6217195	0.6255158	0.6293000	0.6330717	0.6368306	0.6405764	0.6443087	0.6480272	0.6517317
0.40	0.6554217	0.6590970	0.6627572	0.6664021	0.6700314	0.6736448	0.6772419	0.6808225	0.6843863	0.6879331
0.50	0.6914625	0.6949743	0.6984682	0.7019441	0.7054015	0.7088403	0.7122603	0.7156612	0.7190427	0.7224047
0.60	0.7257469	0.7290692	0.7323712	0.7356528	0.7389138	0.7421540	0.7453732	0.7485712	0.7517478	0.7549030
0.70	0.7580364	0.7611480	0.7642376	0.7673050	0.7703501	0.7733727	0.7763728	0.7793501	0.7823046	0.7852362
0.80	0.7881447	0.7910300	0.7938920	0.7967307	0.7995459	0.8023375	0.8051055	0.8078498	0.8105704	0.8132671
0.90	0.8159399	0.8185888	0.8212136	0.8238145	0.8263912	0.8289439	0.8314724	0.8339768	0.8364569	0.8389129
1.00	0.8413447	0.8437523	0.8461358	0.8484950	0.8508300	0.8531409	0.8554277	0.8576903	0.8599289	0.8621434
1.10	0.8643339	0.8665004	0.8686431	0.8707618	0.8728568	0.8749280	0.8769755	0.8789995	0.8809998	0.8829767
1.20	0.8849303	0.8868605	0.8887675	0.8906514	0.8925122	0.8943502	0.8961653	0.8979576	0.8997274	0.9014746

Student-ova t distribucija-tabelarne vrednosti



Degrees of Freedom	$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Rezime poglavlja

- Pitanja?
- Diskusija!