Инжењерска статистика
-Вежба 4-



Интервали поверења

- Величина популације **није** позната:
  - Интервал поверења за средину је $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$
  - Прорачун грешке:

Случај	ε
σ непознато n>30	$z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n-1}}$
σ познато n<30	$t_{n-1,\alpha} \frac{s}{\sqrt{n-1}}$

- *n – величина узорка*
- *α – ниво поверења*
- *s – стандардна девијавија узорка*
- $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ *- вредност очитана из z-таблице*
- $t_{n-1,\alpha}$ *- вредност очитана из z-таблице*

Интервали поверења

- Величина популације **N јесте** позната:
  - Интервал поверења за средину је $(\bar{X} - \kappa\varepsilon, \bar{X} + \kappa\varepsilon)$
  - Прорачун грешке:
    - $\frac{n}{N} < 0.04 = 4\%$ - користи се претходни образац
    - $\frac{n}{N} \geq 0.04 = 4\%$ - уводи се корективни фактор *к*

$$\kappa = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Интервали поверења - Пример

- У оквиру истраживања животног циклуса једне врсте сисара испитивао се број младунаца из једног легла. Прикупљени подаци о 800 случајно изабраних легала сврстани су у табелу:

Број младунаца	1	2	3	4	5
Број легала	145	240	194	126	95

- *а)* одредити интервал поверења за средњу вредност на нивоу поверења 95%, ако се не зна величина популације
- *б)* са сигурношћу од 95% проценити укупан број младунаца, ако је посматрани узорак узет на територији региона на којој је процењено да има 2000 легала

Интервали поверења - Пример

x_i	f_i
1	145
2	240
3	194
4	126
5	95
$\sum$	800

Узорак	
n	800
$\bar{x}$	2.7325
s^2	1.5859
s	1.1293

Ниво поверења $\alpha = 95\%$

а)

Корекција	
$z_{0.975}$	1.96
ε	0.0873

Интервал поверења	
$\bar{x} - \varepsilon$	2.6452
$\bar{x} + \varepsilon$	2.8198

б)

Популација	
N	2000
n/N	40%

Корекција	
$z_{0.975}$	1.96
ε	0.0873
κ	0.7748

Интервал поверења	
$\bar{x} - \kappa\varepsilon$	2.6648
$\bar{x} + \kappa\varepsilon$	2.8002

Укупна процена	
од	5330
до	5600

Параметарски тестови хипотеза

- Параметри који се разматрају код параметарског тестирања хипотеза су:
  - Аритметичка средина μ
  - Разлика аритметичких средина μ_1-μ_2
  - Пропорција π
  - Разлика пропорција π_1-π_2
  - Варијанса σ^2
  - Однос варијанси σ_1^2 / σ_2^2

Кораци у поступку тестирања

1. Одређивање параметра који се испитује
2. Постављање система хипотеза
3. Одређивање (усвајање) прага значајности α
4. Одређивање статистике одлучивања
5. Одређивање критеријума одбацивања нулте хипотезе
6. Прорачун и
7. Одлука

Пример 1

Пречник отвора цеви има познату стандардну девијацију од 0.15мм. На основу 15 случајних мерења установљено је да је **просечни попречни пречник** отвора 18.055мм. Уколико је ниво значајности α**=0.05** потребно је:

а) тестирати хипотезу да је стварни пречник цеви 18 мм

б)одредити *P* ниво теста

в) одредити грешку II врсте уколико је стварни пречник 18.09мм

Корак 1: Одређивање параметара тестирања

Шта се тестира?

μ

Дато:

$$\sigma = 0.15$$
$$n = 15$$
$$\bar{x} = 18.055$$
$$\alpha = 0.05$$

Корак 2 – Постављање система хипотеза

$$H_0(\mu = 18mm)$$

$$H_1(\mu \neq 18mm)$$

Корак 3 – Одређивање прага значајности

из текста: $\alpha = 0.05$

Корак 4 – Одређивање статистике одлучивања

H_0	H_1	KO	statistika	uslov	napomena
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2}$	$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	σ^2 $\vee$ $n \geq 30$	$s^2 \approx \sigma^2$ $(po\ CGT)$
	$\mu < \mu_0$	$z_0 < -z_\alpha$			
	$\mu > \mu_0$	$z_0 > z_\alpha$			
	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2,n-1}$	$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$	$\sigma^2 = ? \wedge$ $n < 30$	
	$\mu < \mu_0$	$t_0 < -t_{\alpha,n-1}$			
	$\mu > \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha,n-1}$			

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Корак 5 – Критеријум одбацивања H_0

H_0	H_1	KO	statistika	uslov	napomena
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2}$	$z_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	σ^2 $\vee$ $n \geq 30$	$s^2 \approx \sigma^2$ $(po\ CGT)$
	$\mu < \mu_0$	$z_0 < -z_\alpha$			
	$\mu > \mu_0$	$z_0 > z_\alpha$			
	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2,n-1}$	$t_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$	$\sigma^2 = ? \wedge$ $n < 30$	
	$\mu < \mu_0$	$t_0 < -t_{\alpha,n-1}$			
	$\mu > \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha,n-1}$			

Односно: $H_1(\mu \neq 18mm)$ и $z_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

Следи: $\lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2} \Rightarrow (z_0 < -z_{\alpha/2}) \vee (z_0 > z_{\alpha/2})$

Корак 6 – Прорачун

Дато:

$\sigma = 0.15$

$n = 15$

$\bar{x} = 18.055$

$\alpha = 0.05$

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{18.055 - 18}{\frac{0.15}{\sqrt{15}}} = 1.4200939 = 1.42$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.96$$

Корак 7 – Одлука

$$1.42 < 1.96 \Rightarrow |z_0| < z_{\frac{\alpha}{2}}$$

Математички закључак: Нулта хипотеза се не може одбацити. Односно, на основу испитиваног узорка не може се одбацити претпоставка да је пречник отвора 18мм.

Инжењерски закључак: На основу испитивања се закључује да је пречник отвора 18мм.

P ниво теста

- P-ниво теста је највиши ниво значајности за који се нулта хипотеза одбацује, када се у обзир узму параметри добијени на основу узорка.

$$p = \begin{cases} 2\left[1-\Phi\left(|z_0|\right)\right] & H_1 : (\mu \neq \mu_0) \\ 1-\Phi(z_0) & H_1 : (\mu > \mu_0) \\ \Phi(z_0) & H_1 : (\mu < \mu_0) \end{cases}$$

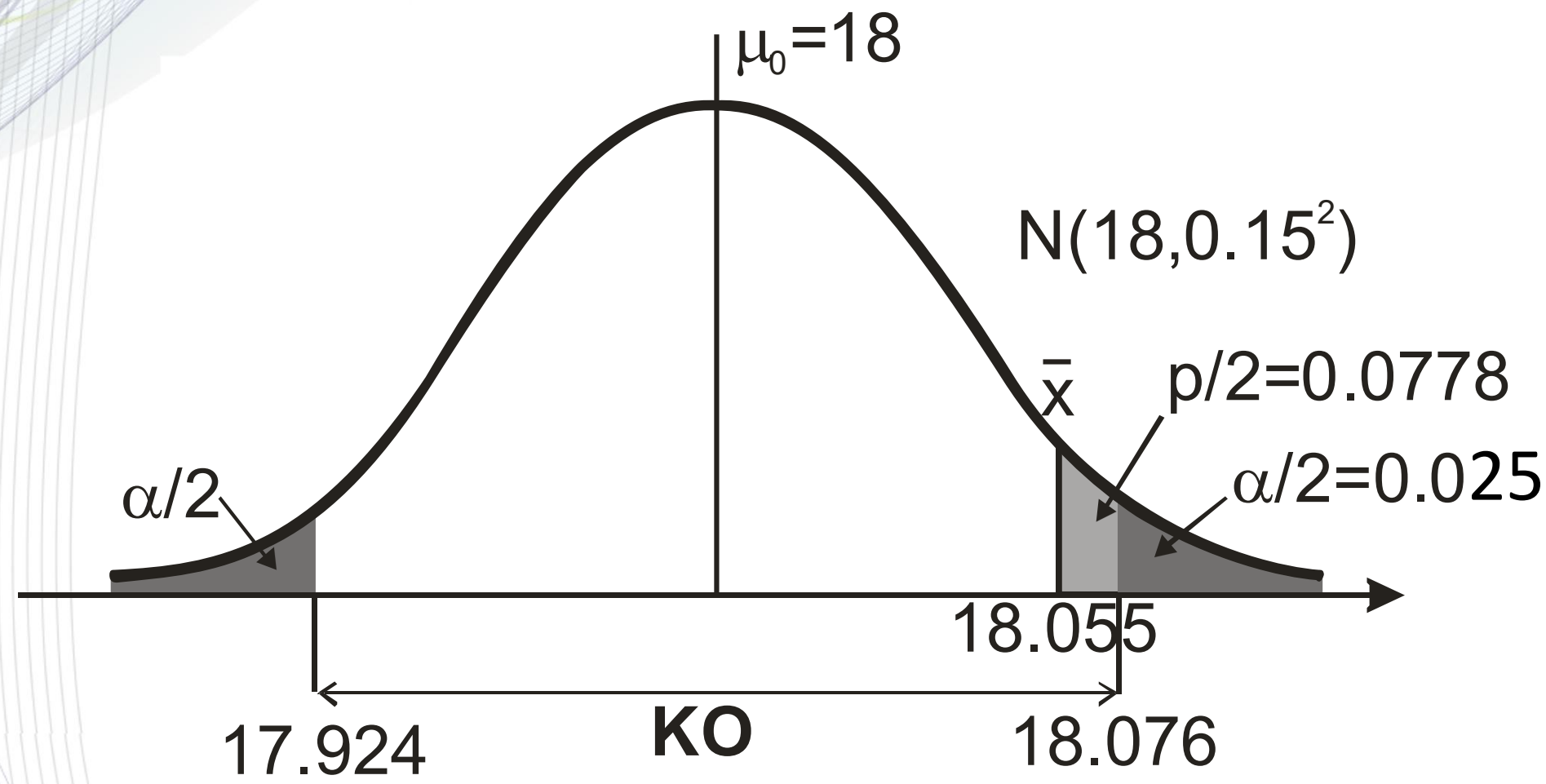
За дати пример:

$$p = 2\left[1-\Phi\left(|z_0|\right)\right] = 2\left[1-\Phi(1.42)\right] = 2[1-0.9221961] = 0.1556$$

$$p/2 = 0.078$$

Значи да ће нулта хипотеза бити одбачена за свако $\alpha_p \leq 0.157$, а прихваћена за свако $\alpha_p \geq 0.157$

Графички приказ:



Грешке I и II врсте

Шта се дешава ако је стварни просечни попречни пресек цеви 18.09мм?

Одлука	H_0 тачна	H_0 нетачна
прихвата се H_0	Нема грешке	грешка II врсте β
одбацује се H_0	грешка I врсте α	Нема грешке

α – Грешка продавца да ће одбацити исправан производ

β – Грешка купца да ће купити неисправан производ

$$H_1 : (\mu \neq \mu_0) \Rightarrow \quad \beta = \Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}} - (\mu_1 - \mu_0)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right) - \Phi\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} - (\mu_1 - \mu_0)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right)$$

$$H_1 : (\mu > \mu_0) \Rightarrow \quad \beta = \Phi\left(z_{\alpha} - (\mu_1 - \mu_0)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right)$$

$$H_1 : (\mu < \mu_0) \Rightarrow \quad \beta = 1 - \Phi\left(-z_{\alpha} - (\mu_1 - \mu_0)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right)$$

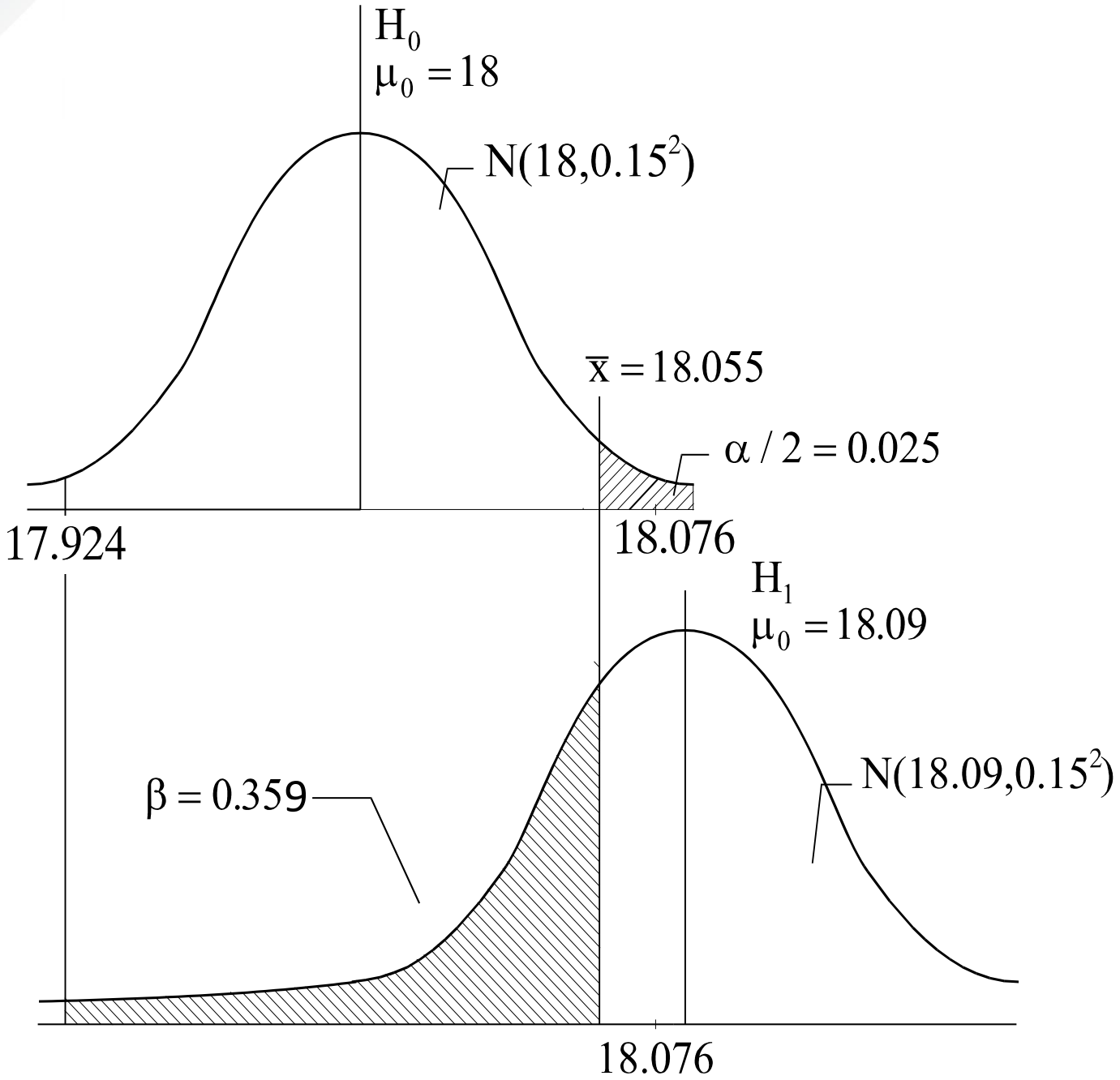
За пример:

$$\beta = \Phi\left(1.96 - (18.09 - 18)\frac{\sqrt{15}}{0.15} \right) - \Phi\left(-1.96 - (18.09 - 18)\frac{\sqrt{15}}{0.15} \right)$$

$$\beta = \Phi(-0.36) - \Phi(-4.28)$$

$$\beta = 0.3594 - 0 = 0.359$$

Уколико се нулта хипотеза прихвати као тачна постоји вероватноћа од 35.94% да ће одлука бити погрешна, када је стварни пречник 18.09мм


H_0
$\mu_0 = 18$
$N(18,0.15^2)$
$\bar{x} = 18.055$
$\alpha / 2 = 0.025$
17.924
18.076
H_1
$\mu_0 = 18.09$
$\beta = 0.359$
$N(18.09,0.15^2)$
18.076

Одредити потребну виличину узорка да би се утврдио стварни средњи пречник цеви од 18.06 са вероватноћом најмање 0.9?

$n \Leftrightarrow \alpha \Leftrightarrow \beta \quad \mu_0 = 18mm \quad \mu_1 = 18.06mm \quad n?$

$\alpha = 0.05 \qquad \beta = 0.1$

$$n = \frac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}} + z_{\beta}\right)^2 \sigma^2}{\left(\mu_1 - \mu_0\right)^2}$$

$$n = \frac{\left(1.96 + 1.28\right)^2}{\left(18.06 - 18\right)^2} \cdot 0.15^2 = 65.61 \approx 66 \text{мерења}$$

Пример 2

Претпоставља се да је дневна производња железаре 900 t. Током недељу дана мерена је дневна прозиводња. Количине добијеног челика у том периоду су приказане у табели. Претпоставља се да се расподељују по нормалној расподели. Да ли подаци добијени мерењем потврђују претпоставку и колики је p-ниво теста?

Дан	1	2	3	4	5	6	7
Количина (t)	885	905	890	895	902	904	870

Корак 1 – Одређивање параметра тестирања

Тестира се: μ

Корак 2 – Постављање система хипотеза $H_0(\mu = 900t)$

$H_1(\mu \neq 900t)$

Корак 3 – Одређивање прага значајности

Праг значајности није дат текстом, па се претпоставља:

$$\alpha = 0.05$$

Корак 4 – Одређивање статистике одлучивања

H_0	H_1	KO	statistika	uslov	napomena
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert z_0 \rvert > u_{\alpha/2}$	$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	σ^2 $\vee$ $n \geq 30$	$s^2 \approx \sigma^2$ $(po\ CGT)$
	$\mu > \mu_0$	$z_0 > u_{\alpha}$			
	$\mu < \mu_0$	$z_0 < -u_{\alpha}$			
	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2,n-1}$	$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$	$\sigma^2 = ? \wedge$ $n < 30$	
	$\mu > \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha,n-1}$			
	$\mu < \mu_0$	$t_0 < -t_{\alpha,n-1}$			

Статистика одлучивања је:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

Корак 5 – Критеријум одбацивања H0

H_0	H_1	KO	statistika	uslov	napomena
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert z_0 \rvert > u_{\alpha/2}$	$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	σ^2 $\vee$ $n \geq 30$	$s^2 \approx \sigma^2$ $(po\ CGT)$
	$\mu > \mu_0$	$z_0 > u_{\alpha}$			
	$\mu < \mu_0$	$z_0 < -z_{\alpha}$			
	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2,n-1}$	$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$	$\sigma^2 = ? \vee$ $n < 30$	
	$\mu > \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha,n-1}$			
	$\mu < \mu_0$	$t_0 < -t_{\alpha,n-1}$			

Односно: $H_1(\mu \neq 900t)$ и $t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$

Следи: $\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2,n-1} \Rightarrow \left(t_0 < -t_{\alpha/2,n-1}\right) \vee \left(t_0 > t_{\alpha/2,n-1}\right)$

Корак 6 – Прорачун

Дато: $n = 7$

Усваја се $\alpha = 0.05$

Из табеле мерења

$$\bar{x} = 893$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{7}(x_i - 893)^2 = 158$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{158} = 12.5963$$

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{893 - 900}{12.5963/\sqrt{7}} = -1.4703$$

Корак 7 - Одлука $|-1.47| < 2.447 \Rightarrow |t_0| < t_{\frac{\alpha}{2}}$

Математички закључак: Нулта хипотеза се не може одбацити. Односно, на основу испитиваног узорка не може се одбацити претпоставка да је производња 900t челика.

Инжењерски закључак: На основу испитивања се закључује да железара производи 900t челика дневно.

P ниво значајности се одређује на основу табличних вредности t-теста за одређени број степени слободе и прорачунску вредност статистике $t_0 = -1.4703$. Вредност броја степени слободе у овом задатку је 6 (n-1).

Прорачунска вредност статистике се налази између 1.44 и 1.943, а овим вредностима одговарају прагови значајности од 0.1 и 0.05, а пошто је овај тест двострани, ове вредности се множе са 2, па важи:

$$0.1 \leq P \leq 0.2$$

Прецизна вредност P-нивоа теста може се добити помоћу статистичких програмских пакета. Тачна вредност овог теста износи 0.1919 (SPSS).

Пример 3

Власник аутомобила је желео да провери да ли је просечна потрошња бензина на 100 км мања 13 литара. Стога је мерио просечну потрошњу након сваких 100 пређених километара, а резултати су приказани у табели.

Мерење	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количина (l)	9.2	13.4	8.8	14	12.6	15	6	11.8	10	7.2

Утврдити да ли је просечна потрошња **мања** од 13 литара кад је ниво значајности 0.1 и одредити границе P нивоа теста

Корак 1 – Одређивање параметра тестирања

Тестира се: μ

Корак 2 – Постављање система хипотеза

$H_0(\mu = 13)$

$H_1(\mu < 13)$

Корак 3 – Одређивање прага значајности

Праг значајности је дат текстом и износи:

$$\alpha = 0.1$$

Корак 4 – Одређивање статистике одлучивања

H_0	H_1	KO	statistika	uslov	napomena
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert z_0 \rvert > u_{\alpha/2}$	$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	σ^2 $\vee$ $n \geq 30$	$s^2 \approx \sigma^2$ $(po\ CGT)$
	$\mu > \mu_0$	$z_0 > u_{\alpha}$			
	$\mu < \mu_0$	$z_0 < -u_{\alpha}$			
	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2,n-1}$	$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$	$\sigma^2 = ? \wedge$ $n < 30$	
	$\mu > \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha,n-1}$			
	$\mu < \mu_0$	$t_0 < -t_{\alpha,n-1}$			

Статистика одлучивања је:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

Корак 5 – Критеријум одбацивања H0

H_0	H_1	KO	statistika	uslov	napomena
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert z_0 \rvert > u_{\alpha/2}$	$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	σ^2 $\vee$ $n \geq 30$	$s^2 \approx \sigma^2$ $(po\ CGT)$
	$\mu > \mu_0$	$z_0 > u_{\alpha}$			
	$\mu < \mu_0$	$z_0 < -z_{\alpha}$			
	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2,n-1}$	$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$	$\sigma^2 = ? \vee$ $n < 30$	
	$\mu > \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha,n-1}$			
	$\mu < \mu_0$	$t_0 < -t_{\alpha,n-1}$			

Односно: $H_1(\mu < 13)$ и $t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$

Следи: $\left(t_0 < -t_{\alpha,n-1}\right)$

Корак 6 – Прорачун

Дато: $n = 10$

Усваја се $\alpha = 0.1$

Из табеле мерења

$$\bar{x} = 10.8$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 10.8)^2 = 9.12$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{9.12} = 3.0199$$

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{10.8 - 13}{3.0199/\sqrt{10}} = -2.3037$$

Корак 7 - Одлука

$$(t_0 < -t_{0.1,9}) \Leftrightarrow -2.3037 < -1.383$$

Математички закључак: Нулта хипотеза се може одбацити пошто је значајност теста мања од граничне, чиме је испуњен услов, тј. може се усвојити алтернативна хипотеза.

Инжењерски закључак: На основу испитивања се закључује да је потрошња аутомобила нижа од 13 литара.

$$df = 9 \quad 0.01 \leq P \leq 0.025$$

Пример 3

- Пореди се дебљина два типа пластичних изолатора који се одређеним термичким поступком наносе на производ. Стандардне девијације мерених дебљина изолатора 2.6 и 2.4мм. Тестирано је наношење 12 изолатора првог типа и 15 изолатора другог. Добијене су средње дебљине пластичне изолације за први и други тип од 26.3мм, односно 25.2мм. Потребно је утврдити да ли је дебљина изолатора оба типа иста ако:
  a) Су стандардне девијације познате
  b) Ако стандардне девијације нису познате али су величине узорака 32 и 45
  c) Ако су узорци 12 и 15, а стандардна девијација није позната али се може претпоставити да је иста

a), b)

1. Određivanje parametra koji se ispituje

Razlika sredina

2. Postavljanje sistema hipoteza

$$H_0 : (\mu_1 = \mu_2)$$

$$H_1 : (\mu_1 \neq \mu_2)$$

3. Usvaja se nivo značajnosti $\alpha = 0.05$

4. Određivanje statistike odlučivanja

$$z_0 = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n2}}}$$

5. Određivanje kriterijuma odbacivanja nulte hipoteze

$$|z_0| > z_{\alpha/2}$$

6. Proračun

7. Odluka – *Matematički zaključak* i *Inženjerski zaključak*

c)

1. Određivanje parametra koji se ispituje

Razlika sredina

2. Postavljanje sistema hipoteza

$$H_0 : (\mu_1 = \mu_2)$$

$$H_1 : (\mu_1 \neq \mu_2)$$

3. Usvaja se nivo značajnosti $\alpha = 0.05$

4. Određivanje statistike odlučivanja

$$t_0 = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad , s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

5. Određivanje kriterijuma odbacivanja nulte hipoteze

$$|t_0| > t_{\alpha/2, n_1 + n_2 - 2}$$

6. Proračun

7. Odluka – *Matematički zaključak* i *Inženjerski zaključak*

Пример 3 - наставак

1. Утврдити да ли је дебљина изолатора оба типа иста, ако је $\alpha = 0.01$
2. Одредити P-ниво теста
3. Одредити потребан број узорака да би се са вероватноћом од 0.95 утврдиле стварне средње дебљине изолатора од 28мм, односно 25мм

$$z_0 = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{26.3 - 25.2}{\sqrt{\frac{2.6^2}{12} + \frac{2.4^2}{15}}} = 1.1302$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.01}{2}} = z_{0.005} = 2.576 \qquad \beta = 0.05 \Rightarrow z_\beta = 1.65$$

$$p = 2\left[1 - \Phi\left(|z_0|\right)\right] = 2\left[1 - \Phi(1.14)\right] = 2\left[1 - 0.87285\right] = 0.2543$$

$$n_1 = n_2 = n = \frac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}} + z_\beta\right)^2}{\left(\mu_1 - \mu_2\right)^2} * \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right) = \frac{(2.576 + 1.645)^2}{3^2} * \left(2.6^2 + 2.4^2\right) = 24.78 \approx 25 \text{мерења}$$

Самостални задатак Д3

- Урадити одговарајуће задатке који ће бити постављени на сајту

Напомена 1: Сваки задатак се састоји из 2 теста хипотеза која је потребно урадити

Напомена 2: Користити Обрасце који се налазе достављени у фајлу са задацима