



Инжењерска статистика

-Вежба 2-





Статистике

Нумеричке мере које описују карактеристике узорка, односно популације, називају се статистике и деле се на:

- Мере локације података
 - Аритметичка средина
 - Медијана
 - Мода
- Мере варијације података
 - Ранг
 - Варијанса
 - Стандардна девијација

Пример



- Нека су дата два скупа података

А: 130, 140, 145, 150, 158, 165

Б: 90, 128, 140, 160, 165, 205

Аритметичка средина свих мерења:

$$\bar{x} = \frac{1}{12} (130 + 140 + 145 + \dots + 165 + 205) = 148$$

Медијана: 90, 128, 130, 140, 140, **145**, **150**, 158, 160, 165, 165, 205

$$Me = \frac{145 + 150}{2} = 147,5$$

Мода: 90, 128, 130, **140**, **140**, 145, 150, 158, 160, **165**, **165**, 205

2x140, 2x165

Пример



A: 130, 140, 145, 150, 158, 165

B: 90, 128, 140, 160, 165, 205

Ранг: $R_A = \max(x_i) - \min(x_i) = x_5 - x_1 = 165 - 130 = 35$
 $R_B = 205 - 90 = 115$

Варијанса:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad n < 30$$

$$s_A^2 = \frac{1}{6-1} [(130-148)^2 + \dots + (140-148)^2] = 158$$

$$s_B^2 = \frac{1}{6-1} [(90-148)^2 + \dots + (160-148)^2] = 1502$$

Стандардна девијација: $S_A = \sqrt{158} = 12.57$ $S_B = \sqrt{1502} = 38.76$

	sredina	varijansa	st.devijacija
uzorak	$\bar{x}$	s^2	s
populacija	μ	σ^2	σ

Случајна променљива



- Варијабилност се описује функцијом која се назива **случајна променљива**

$$X = \mu + e$$

μ - је константа

e - случајно одступање константе

- Расподела променљиве X може бити:
 - Дискретна
 - Континуална



Дискретне случајне променљиве

Дискретна случајна променљива X може имати само одређене вредности.

Расподела случајне променљиве X дефинише се **функцијом расподеле**.

Функција расподеле је **опис вероватноћа** које се везују за могуће вредности случајне променљиве X .

Особине функције расподеле дискретне случајне величине су:

$$F(X) = P(X = x)$$

$$F(X) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^n F(X_i) = 1$$



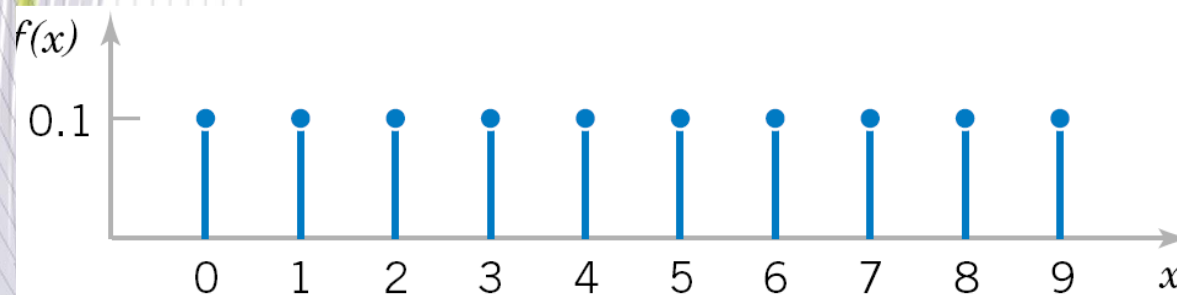
- Средина очекиване вредности случајне променљиве X је:

$$\mu = E(X) = \sum X \cdot F(X)$$

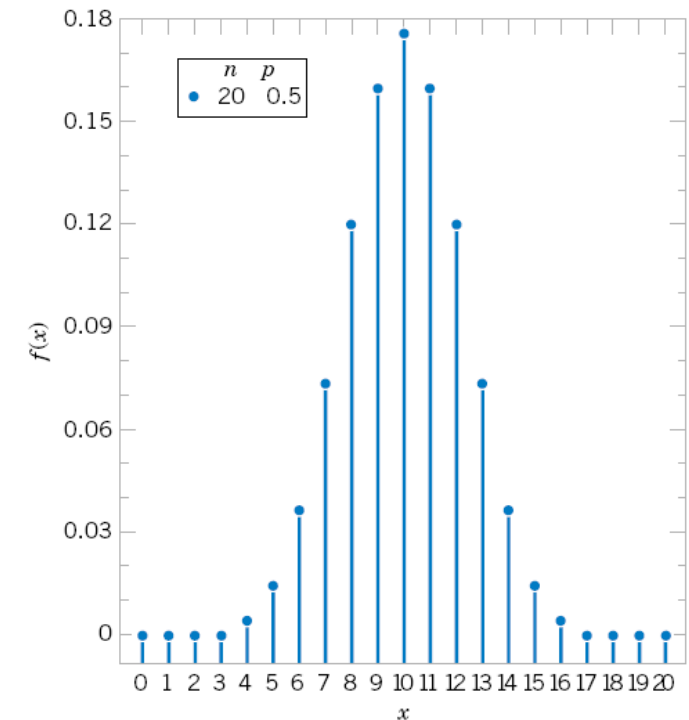
- Варијанса случајне променљиве X је:

$$\sigma^2 = D(X) = \sum (X - \mu)^2 \cdot F(X)$$

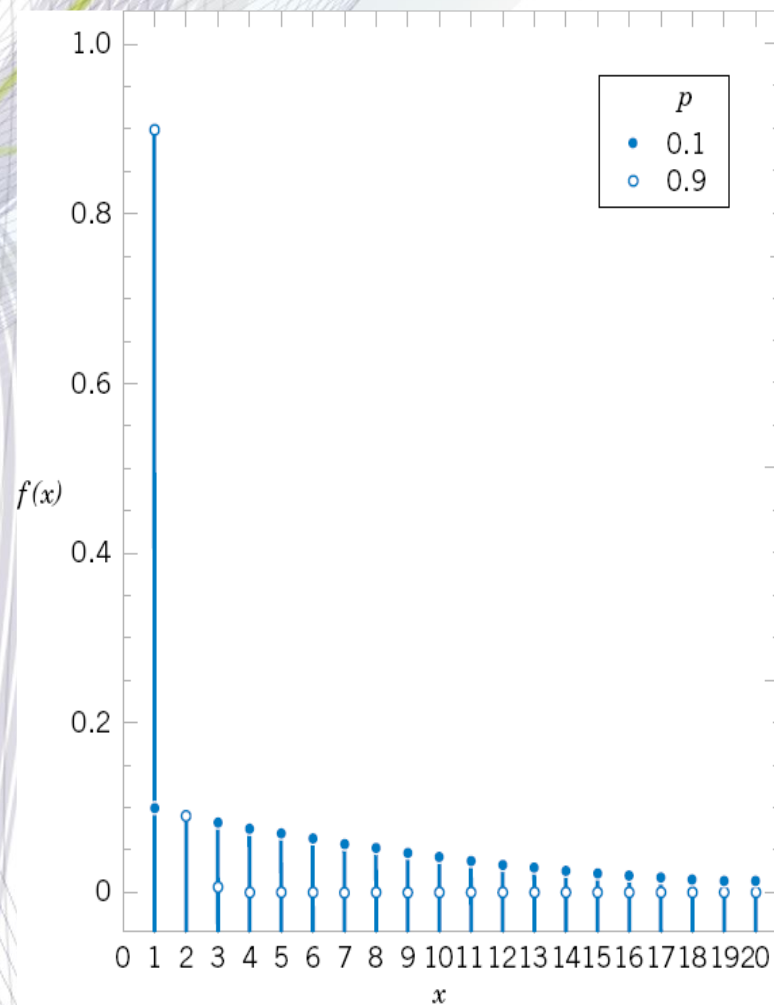
Примери дискретних расподела:



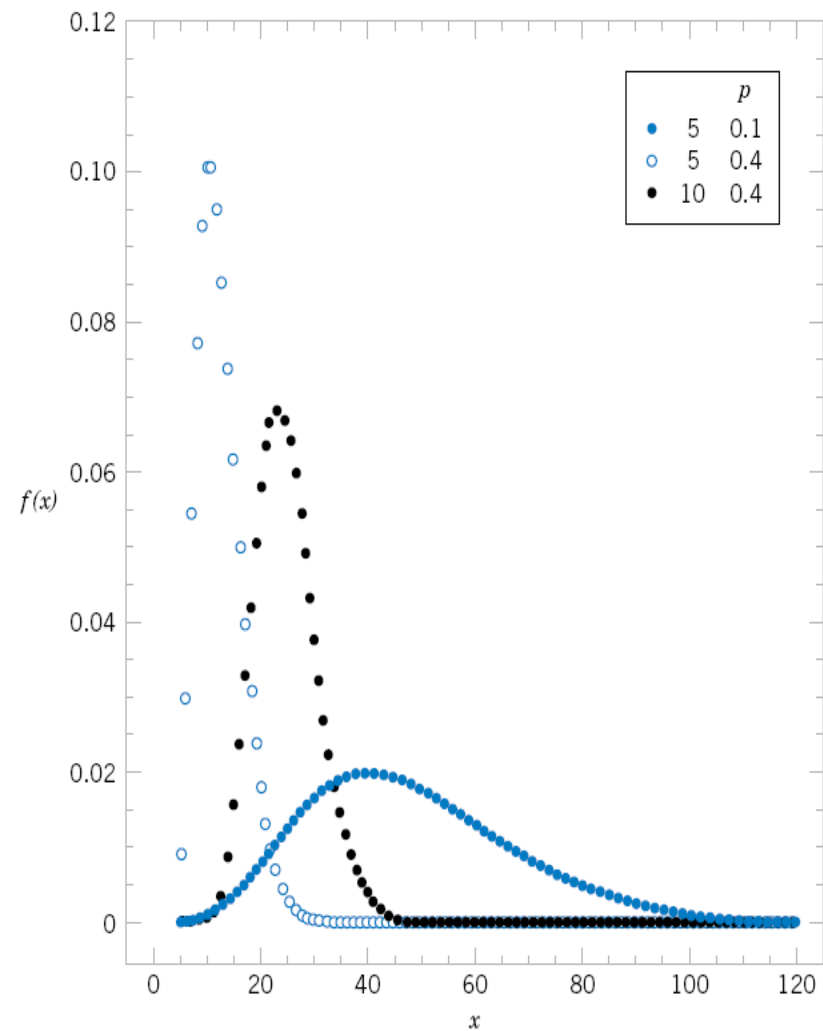
Униформна дискретна
расподела



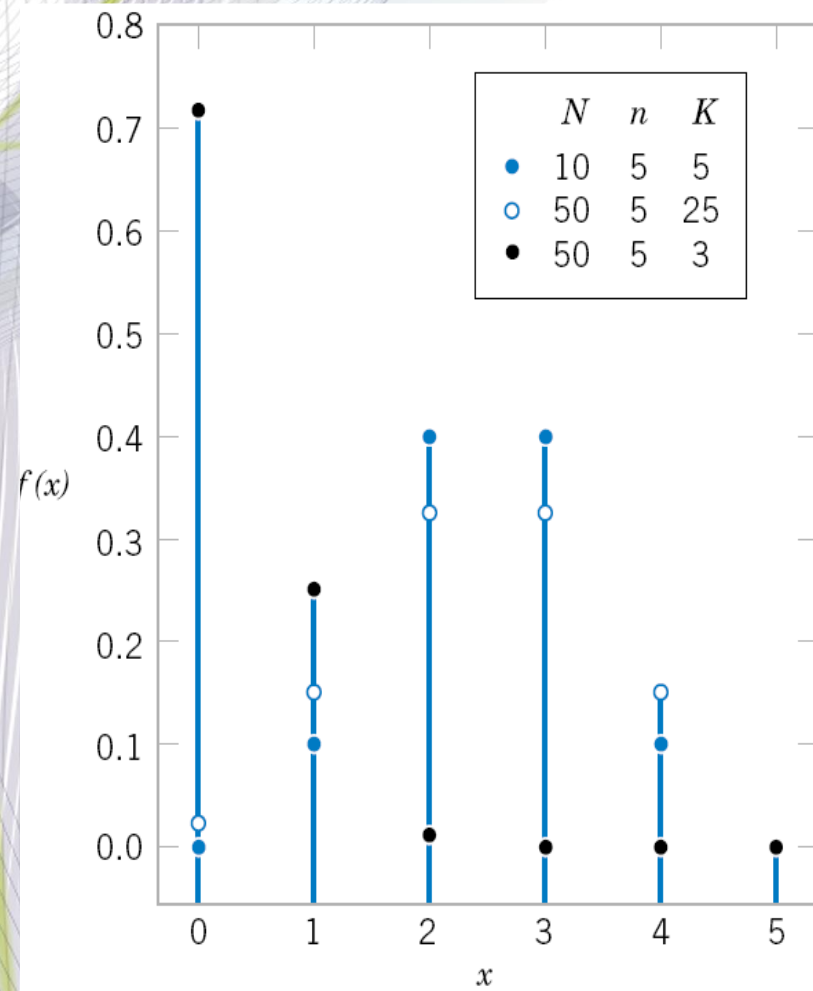
Биномна расподела



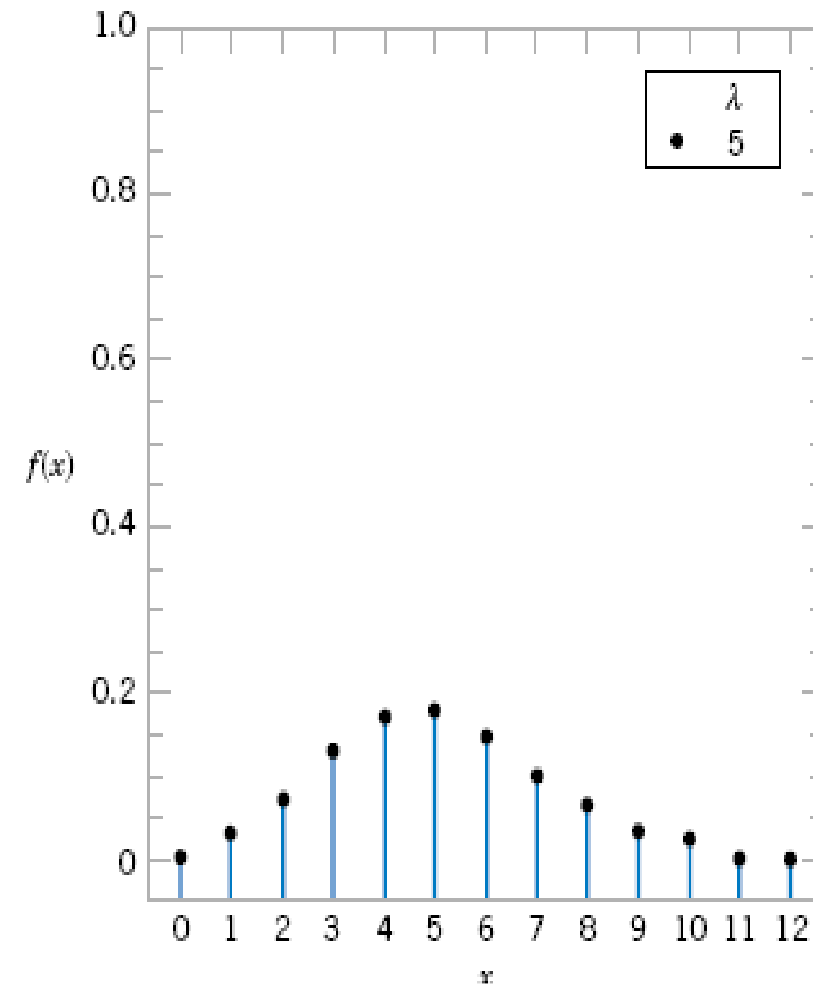
Геометријска



Негативна биномна



Хипергеометријска



Poasonova

Задатак 1



Оцењују се квалитет боје и скупљање изливене пластике која се добија при новом производном процесу. Испитивања су показала следеће информације које су дате у табели, а потребно је испитати расподелу:

Боја	Скупљање	p	x
одговара	одговара	0.54	2
одговара	не одговара	0.20	1
не одговара	одговара	0.20	1
не одговара	не одговара	0.06	0

Функција расподеле појединих вредности случајне променљиве X је:

$$x : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.06 & 0.40 & 0.54 \end{pmatrix}$$

За дати пример, важе све особине функција расподеле:



$$F(X) = P(X = x) \Rightarrow$$

$$F(x_1) = F(0) = P(x = 0) = 0.06$$

$$F(x_2) = F(1) = P(x = 1) = 0.40$$

$$F(x_3) = F(2) = P(x = 2) = 0.54$$

$$F(X) \geq 0 \Rightarrow F(x_1) = 0.06 > 0; F(x_2) = 0.40 > 0; F(x_3) = 0.54$$

$$\sum_{i=1}^n F(X_i) = 1 \Rightarrow F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) = 0.06 + 0.40 + 0.54 = 1$$



$$\mu = \sum X F(X)$$

$$\bar{x} = 0 \cdot 0.06 + 1 \cdot 0.40 + 2 \cdot 0.54 = 0.40 + 1.08 = 1.48$$

$$\sigma^2 = \sum (X - \mu)^2 F(X)$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \left[(0 - 1.48)^2 \cdot 0.06 + (1 - 1.48)^2 \cdot 0.40 + (2 - 1.48)^2 \cdot 0.54 \right] = \\ &= 0.131424 + 0.09216 + 0.146016 = 0.3696 \end{aligned}$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0.3696} = 0.608$$

Задатак 2



Постоји вероватноћа од 0.2 да ће настати грешка при преносу 1 податка кроз дигитални преносни кабл. Претпоставити да су испитивања тачности преноса независна. Случајна променљива X је дефинисана као број нетачно пренесених информација у наредна 3 преноса. Испитати особине расподеле.

Излаз	x
TTT	0
TTN	1
TNT	1
NTT	1
TNN	2
NTN	2
NNT	2
NNN	3



Имамо 4 могуће вредности случајне променљиве x и оне су 0, 1, 2 и 3.

Вероватноћа да ће податак бити тачно пренесен је 0.8, а мерења су међусобно независна.

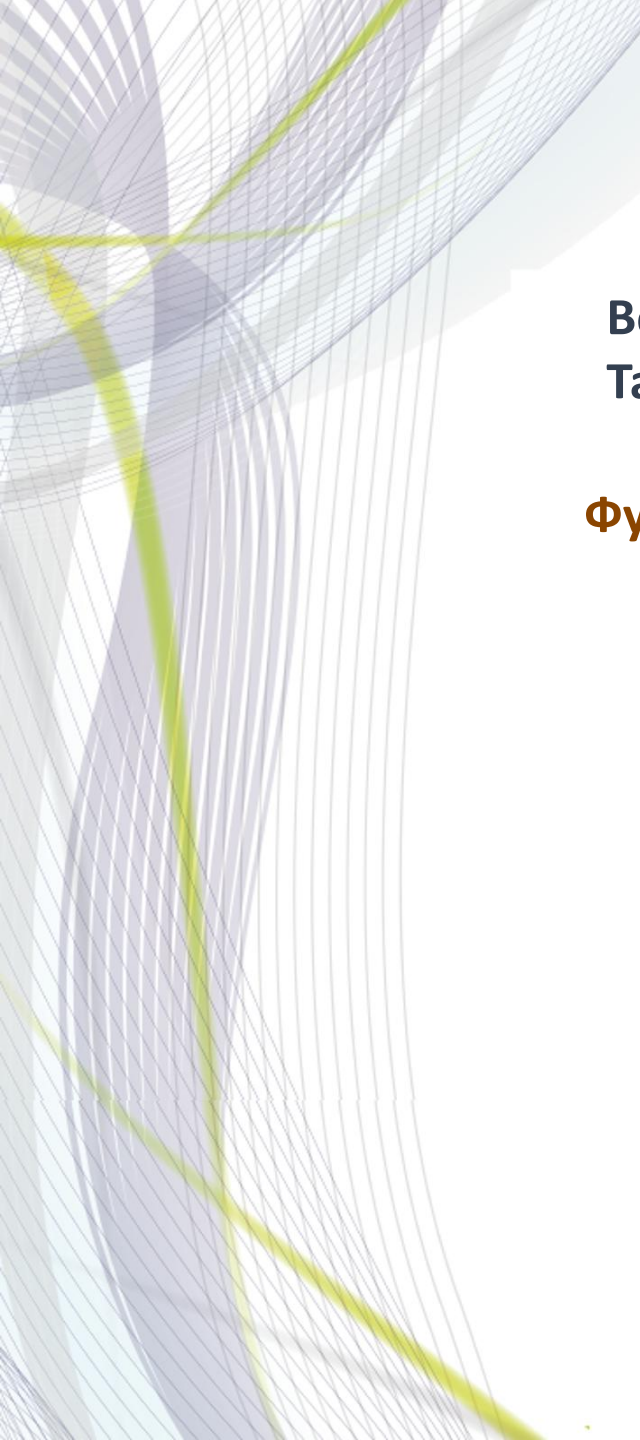
Вероватноће појављивања сваке од вредности случајне променљиве су:

$$P(x = 0) = P(TTT) = P(T) \cdot P(T) \cdot P(T) = 0.8^3 = 0.512$$

$$\begin{aligned} P(x = 1) &= P(TTN) + P(TNT) + P(NTT) = \\ &= 3 \cdot P(T) \cdot P(T) \cdot P(N) = \\ &= 3 \cdot 0.8^2 \cdot 0.2 = 0.384 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x = 2) &= P(TNN) + P(NTN) + P(NNT) = \\ &= 3P(T) \cdot P(N) \cdot P(N) = \\ &= 3 \cdot 0.8 \cdot 0.2^2 = 0.096 \end{aligned}$$

$$P(x = 3) = P(NNN) = P(N) \cdot P(N) \cdot P(N) = 0.2^3 = 0.008$$


$$\forall F(X) \geq 0 \quad \wedge \quad F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) + F(x_4) = \\ = 0.512 + 0.384 + 0.096 + 0.008 = 1$$

Вероватноћа да ће податак бити погрешно пренесен је $p=0.2$
Тада је вероватноћа да ће бити исправно пренесен $(1-p)=0.8$.

Функција расподеле је:

$$F(x) = \binom{4}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{4-x}$$

Binomna raspodela

$$\bar{x} = np = 4 \cdot 0.2 = 0.8$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$s^2 = np(1-p) = 4 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.64 \Rightarrow$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0.64} = 0.8$$



Континуалне случајне променљиве

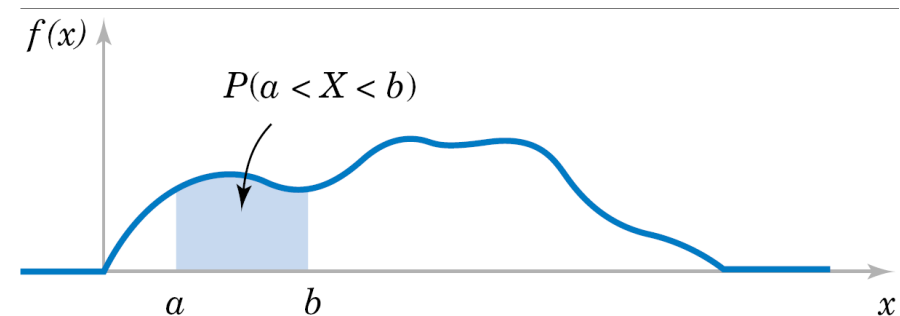
Код **континуалних променљивих**, број вредности које може имати случајна променљива X је бесконачан. X може обухватити све вредности реалних бројева, па се може сматрати континуалном.

Вероватноћа појављивања случајне променљиве X која је континуална величина, има **функцију густине расподеле**, која се налази у неком интервалу $[x_1, x_2]$ реалних бројева са особинама:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(u) du$$



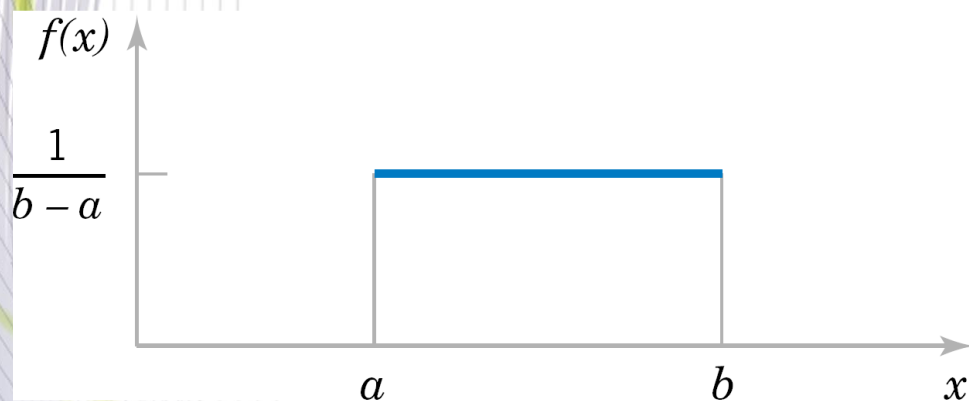
- Аритметичка средина очекиване вредности случајне променљиве X је:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X \cdot F(X) dX$$

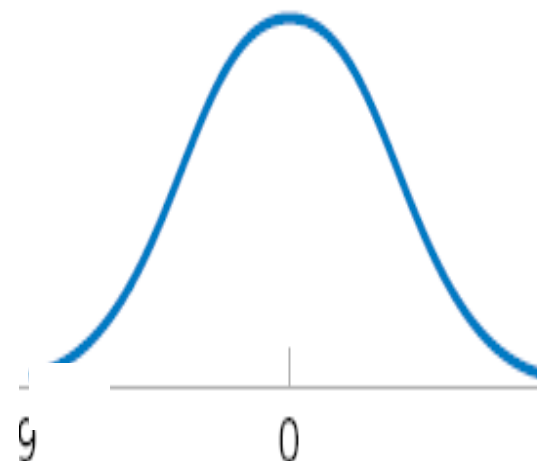
- Варијанса случајне променљиве X је:

$$\sigma^2 = D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^2 \cdot F(X) dX$$

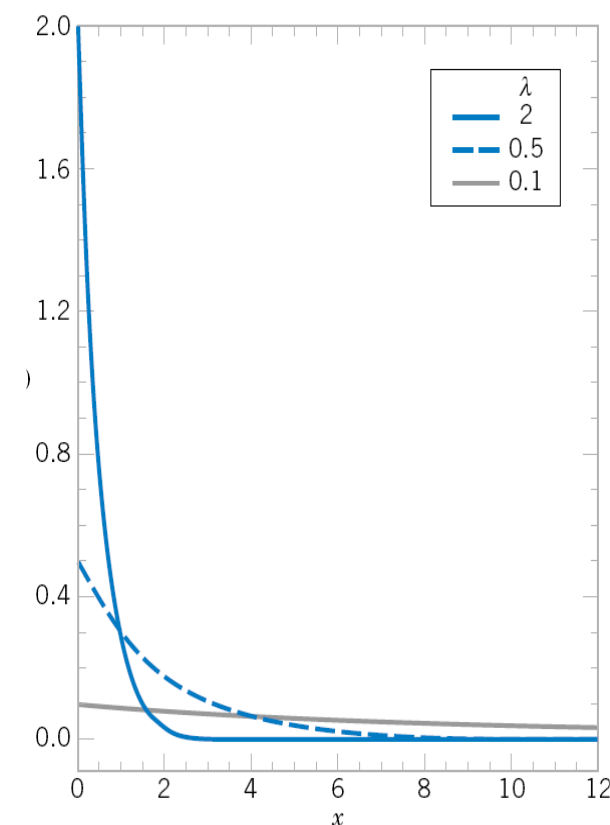
Примери дискретних расподела:



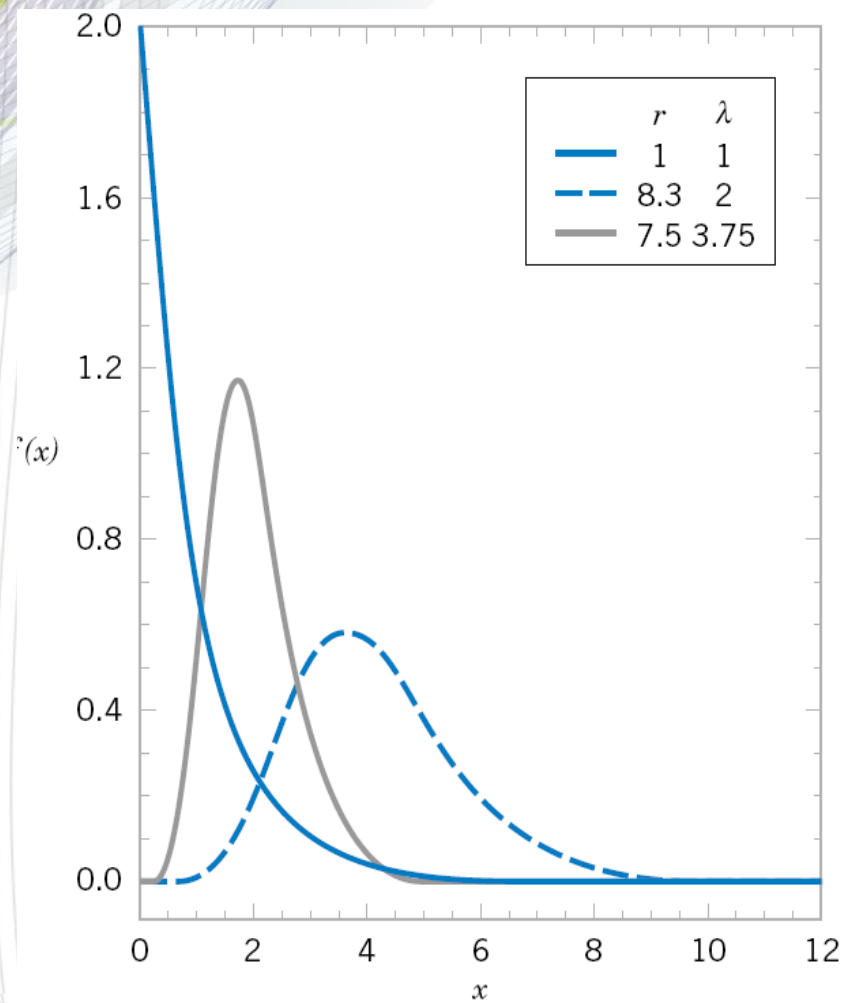
Униформна



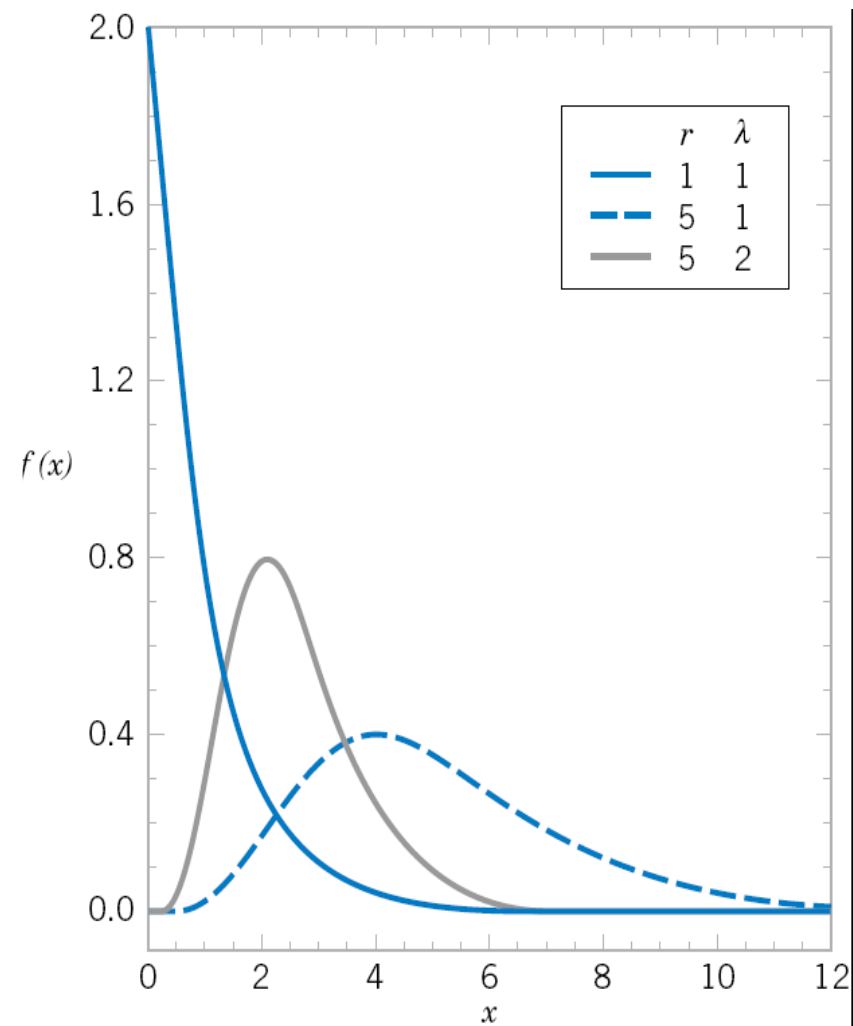
Нормална



Експоненцијална



Γαμα



Erlangova

Задатак 3



Нека је X случајна променљива, која описује континуалну величину на интервалу од $[0, 40]$. Нека се, даље, претпостави да је теоријска функција по којој се X распоређује: **$F(x) = 0.025$**

Испитати особине функције и одредити вероватноћу да се променљива нађе у области мањој од 10, и у области мањој од 10, а већој од 5.

$$\bar{x} = E(x) = \int_0^{40} xF(x)dx = 0.025 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{40} = 20$$

$$s^2 = \int_0^{40} (x - 20)^2 F(x)dx = 0.025 \frac{(x - 20)^3}{3} \Big|_0^{40} = 66.67$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{66.67} = 8.16$$

$$P(X < 10) = \int_0^{10} F(x)dx = 0.025 x \Big|_0^{10} = 0.25$$

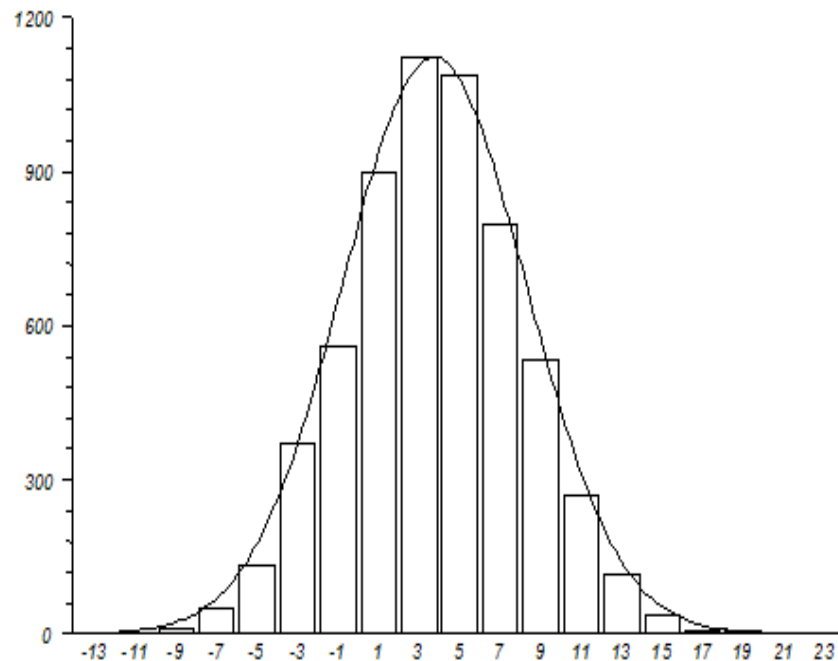
$$P(5 < X < 10) = \int_5^{10} F(x)dx = 0.025 x \Big|_5^{10} = 0.025 \cdot 10 - 0.025 \cdot 5 = 0.125$$



Нормална расподела

$$F(X) = N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < X < \infty$$

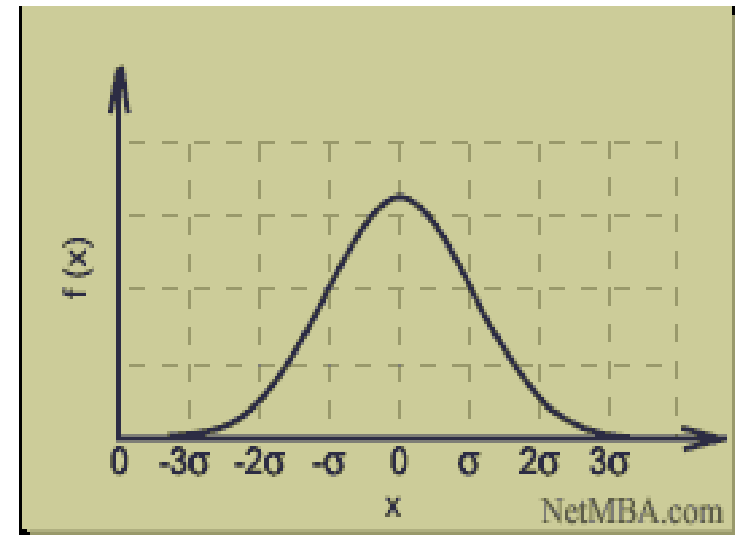
Histogram for Normal Distribution (mean = 3.8, sd = 4.3)



Mid Points for Normal Distribution (mean = 3.8, sd = 4.3)

Стандардизована нормална расподела

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1^2)$$



Стандардизована нормална расподела – Правила за коришћење таблица

а) $P(Z < 3.64) = 0.9998636$

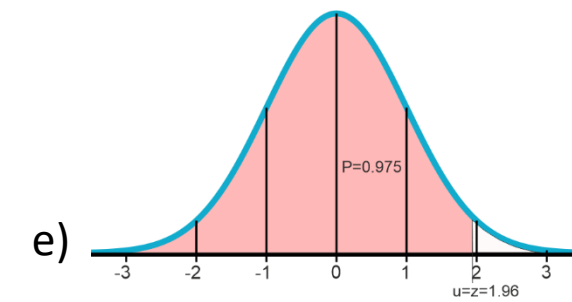
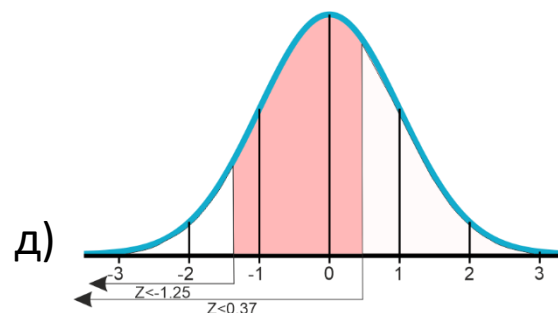
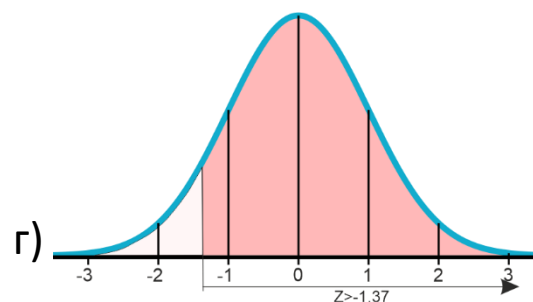
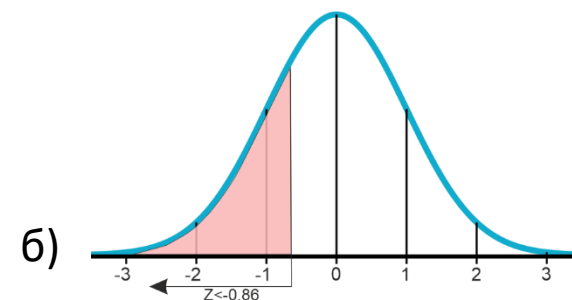
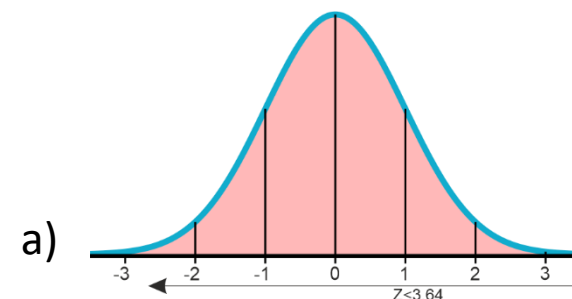
б) $P(Z < -0.86) = 0.19489$

в) $P(Z > 1.26) = 1 - P(Z < 1.26) = P(Z < -1.26) = 0.10383$

г) $P(Z > -1.37) = P(Z < 1.37) = 0.91466$

д) $P(-1.25 < Z < 0.37) = P(Z < 0.37) - P(Z < -1.25) = 0.6443087 - 0.1056498 = 0.53866$

е) $P(Z < u) = 0.975 \Rightarrow u = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$



Задатак 4



Претпоставља се расподела случајне променљиве, која одговара нормалној, са средином 10 и варијансом 4.

Испитати вероватноћу да се вредност нађе у област већој од броја 13, и вероватноћу да се вредност нађе у области између бројева 9 и 11?

$$X \sim N(10, 2^2)$$

$$\begin{aligned} P(X > 13) &= P\left(Z > \frac{13-10}{2}\right) = P(Z > 1.5) = \\ &= 1 - P(Z < 1.5) = 0.06681 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(9 < X < 11) &= P\left(\frac{9-10}{2} < Z < \frac{11-10}{2}\right) = \\ &= P(-0.5 < Z < 0.5) = P(Z < 0.5) - P(Z < -0.5) = \\ &= P(Z < 0.5) - [1 - P(Z < 0.5)] = 2 \cdot P(Z < 0.5) - 1 = \\ &= 2 \cdot 0.69146 - 1 = 0.3892 \end{aligned}$$



Самостални задатак Д2

- Користећи таблицу за нормалну расподелу по густини пронаћи вредности за одговарајући задатак са списка окаченог на сајту предмета