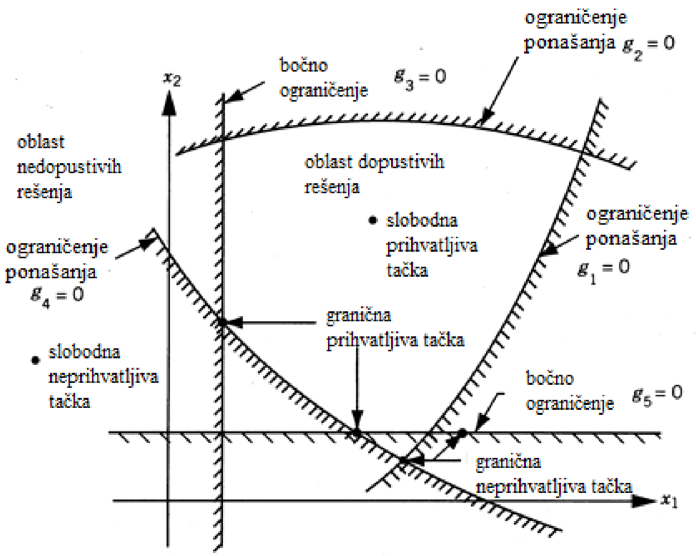
Optimizacija proizvodnih procesa

Lekcija 10

Problem optimizacije obima proizvodnje za dva proizvoda



Neka su:

$$x_1 = \text{količina proizvoda 1}$$

$$x_2 = \text{količina proizvoda 2}$$

Za svaki proizvod postoji dobit:

$$P_1(x_1) = C_{p1}(x_1) - C_{k1}(x_1)$$

$$P_2(x_2) = C_{p2}(x_2) - C_{k2}(x_2)$$

Ukupna dobit sistema:

$$P_{uk}(x_1, x_2) = P_1(x_1) + P_2(x_2)$$

odnosno:

$$P_{uk}(x_1, x_2) = [C_{p1}(x_1) - C_{k1}(x_1)] + [C_{p2}(x_2) - C_{k2}(x_2)]$$

uz ograničenja:

$$g_1(x_1, x_2) \leq 0$$

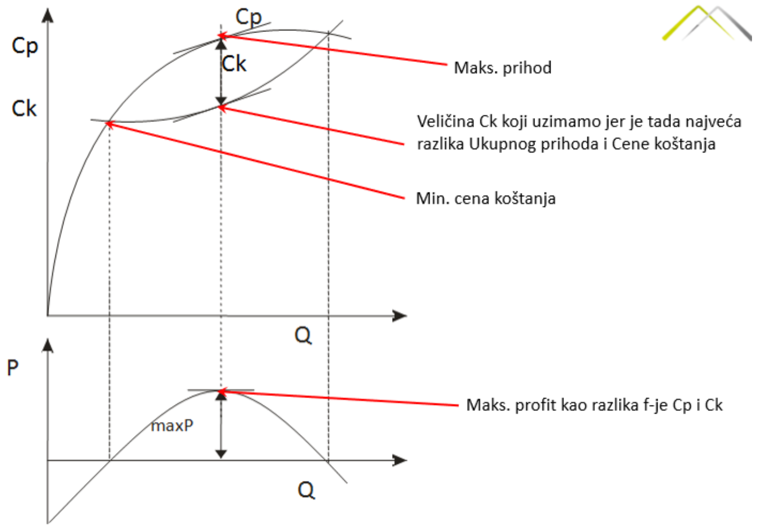
$$g_2(x_1, x_2) \leq 0$$

$$\ldots$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

i traži se:

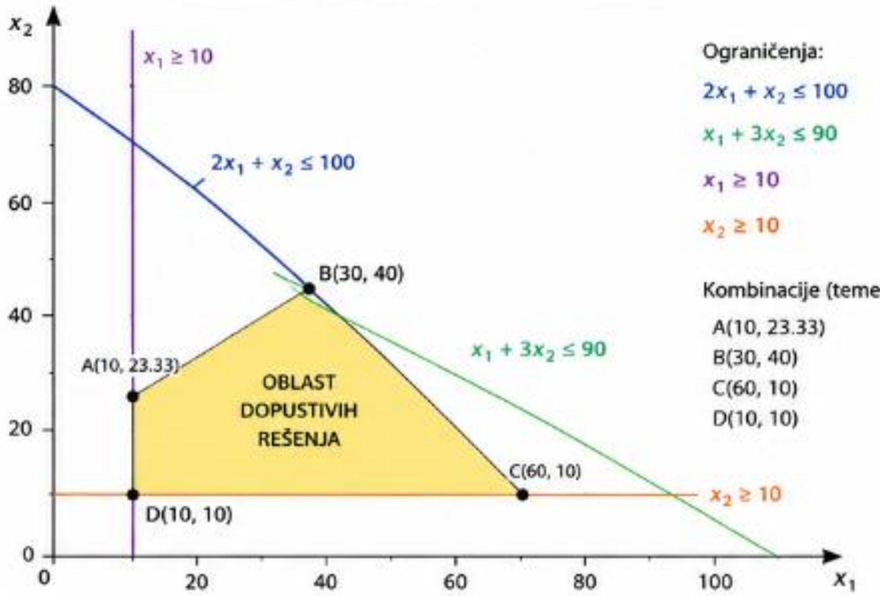
$$P_{uk}(x_1, x_2) \rightarrow \max$$



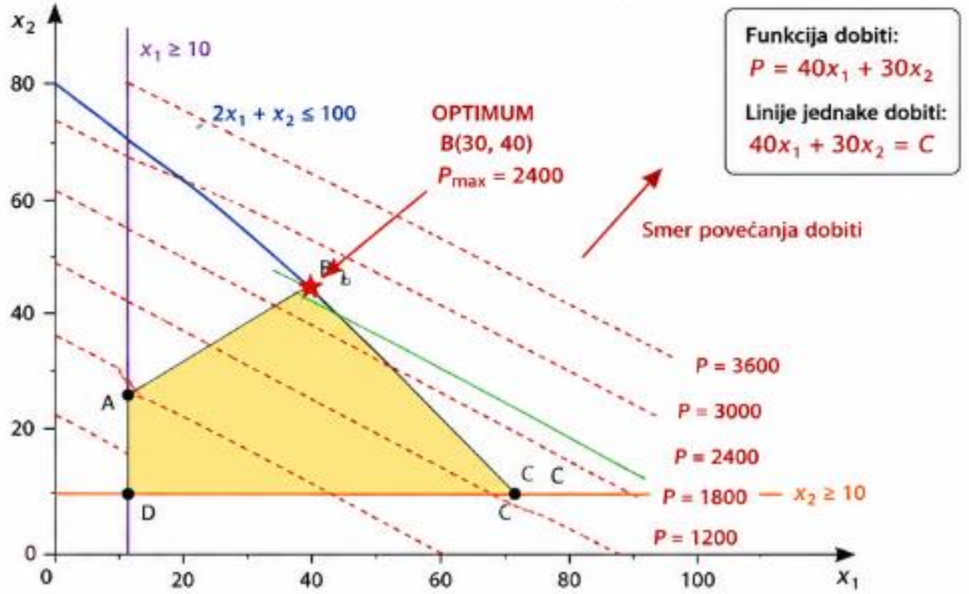
OPTIMIZACIJA PROIZVODNJE DVA PROIZVODA

– oblast dopustivih rešenja i funkcija dobiti –

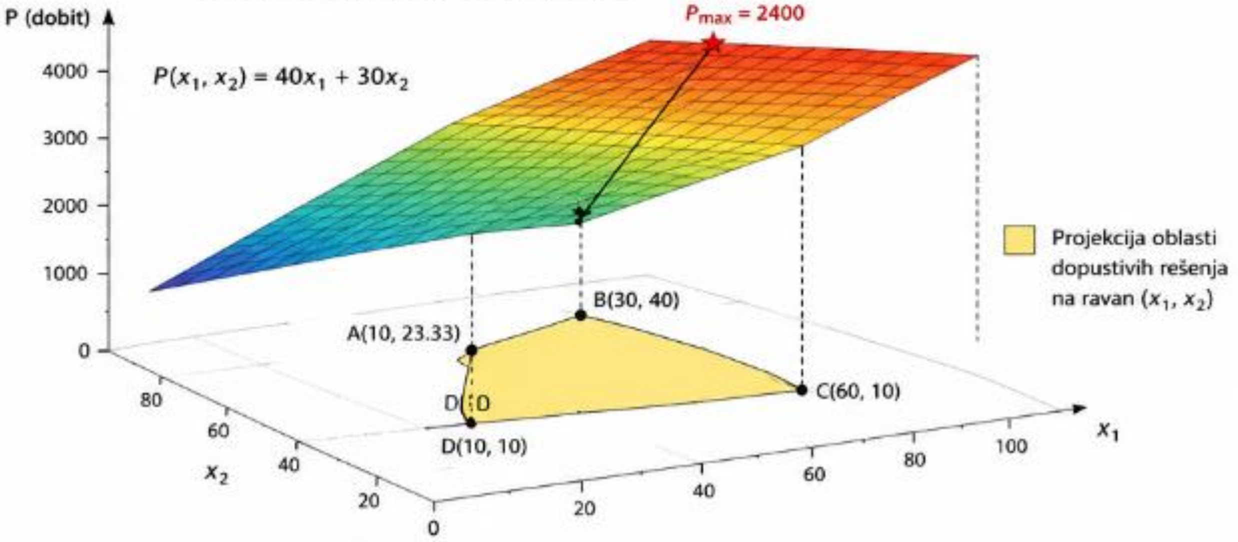
1. OGRANIČENJA I OBLAST DOPUSTIVIH REŠENJA



2. LINIJE JEDNAKE DOBITI (IZOLINIJE)



3. FUNKCIJA DOBITI U 3D PROSTORU



REZIME REZULTATA

Optimalna kombinacija proizvodnje:

$x_1^* = 30$ (proizvod 1)
$x_2^* = 40$ (proizvod 2)

Maksimalna ukupna dobit:

$P_{max} = 2400$

Provera ograničenja u optimumu:

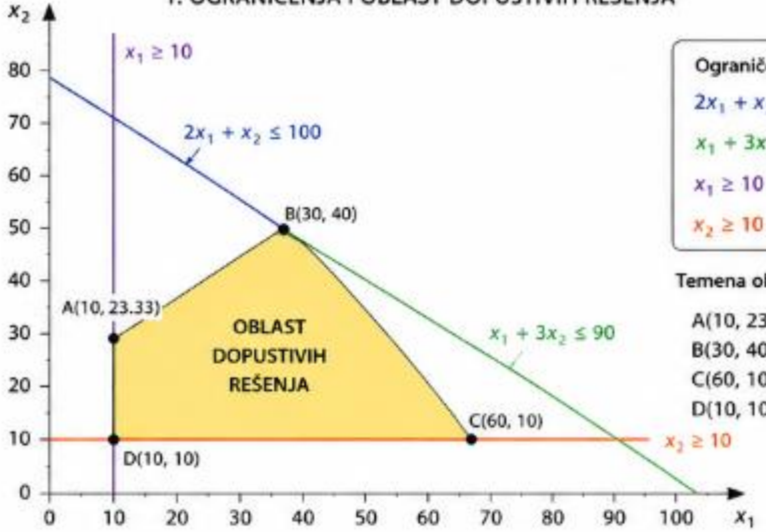
$2x_1 + x_2 = 2 \cdot 30 + 40 = 100$ (≤ 100) ✓
$x_1 + 3x_2 = 30 + 3 \cdot 40 = 150$ (≤ 90) ✓
$x_1 = 30$ (≥ 10) ✓
$x_2 = 40$ (≥ 10) ✓

Optimum se postiže u temenu B(30, 40), odnosno u preseku aktivnih ograničenja $2x_1 + x_2 = 100$ i $x_1 + 3x_2 = 90$.

OPTIMIZACIJA PROIZVODNJE DVA PROIZVODA

– nelinearne (kvadratne) funkcije dobiti i linearna ograničenja–

1. OGRANIČENJA I OBLAST DOPUSTIVIH REŠENJA



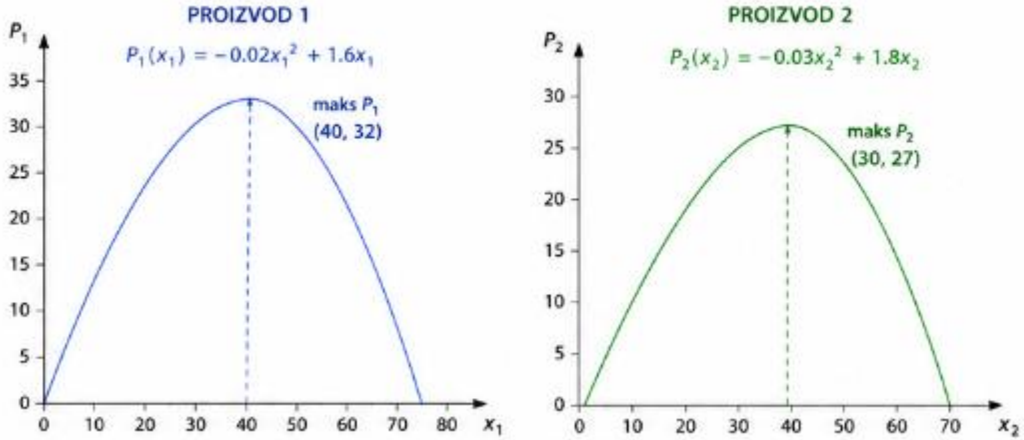
Ograničenja:

- $2x_1 + x_2 \leq 100$
- $x_1 + 3x_2 \leq 90$
- $x_1 \geq 10$
- $x_2 \geq 10$

Temena oblasti:

A(10, 23.33)
B(30, 40)
C(60, 10)
D(10, 10)

2. FUNKCIJE DOBITI PO PROIZVODIMA

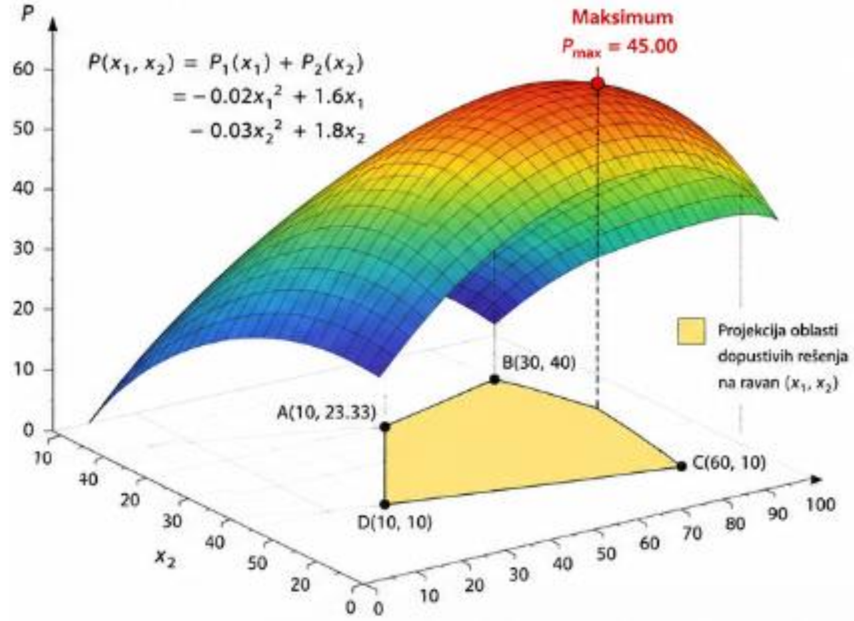


Ukupna dobit:

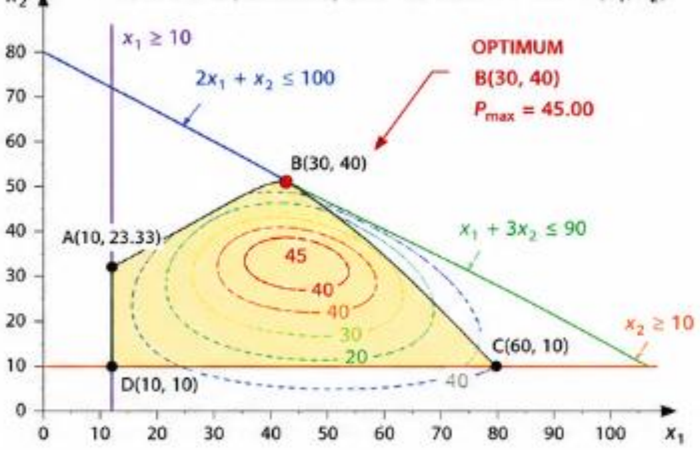
$$P(x_1, x_2) = P_1(x_1) + P_2(x_2) = (-0.02x_1^2 + 1.6x_1) + (-0.03x_2^2 + 1.8x_2)$$

Svaki proizvod ima svoju kvadratnu funkciju dobiti.

3. UKUPNA FUNKCIJA DOBITI U 3D PROSTORU



4. KONTOURE (IZOLINIJE) UKUPNE DOBITI U RAVNI (x_1, x_2)



Najviša izolinija koja dodiruje oblast dopustivih rešenja određuje optimalno rešenje.

REZIME REZULTATA

Optimalna kombinacija proizvodnje:

$x_1^* = 30$ (proizvod 1)
$x_2^* = 40$ (proizvod 2)

Maksimalna ukupna dobit:

$P_{max} = 45.00$

Provera ograničenja u optimumu:

$2x_1 + x_2 = 2 \cdot 30 + 40 = 100$	(≤ 100)	✓
$x_1 + 3x_2 = 30 + 3 \cdot 40 = 150$	(≤ 90)	✓
$x_1 = 30$	(≥ 10)	✓
$x_2 = 40$	(≥ 10)	✓

Optimum se postiže u temenu B(30, 40), odnosno u preseku aktivnih ograničenja $2x_1 + x_2 = 100$ i $x_1 + 3x_2 = 90$.

Za **5 proizvoda** problem se piše ovako:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

gde je x_i količina proizvoda i.

Dobit svakog proizvoda je kvadratna:

$$P_i(x_i) = a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i$$

Ukupna dobit:

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = P_1(x_1) + P_2(x_2) + P_3(x_3) + P_4(x_4) + P_5(x_5)$$

odnosno:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{5} P_i(x_i)$$

Uz ograničenja, na primer:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 \le b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 \le b_2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

Traži se:

$$\max P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

Primer

Imamo problem:

$$\max P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

gde je:

$$P = \sum_{i=1}^{5} P_i(x_i)$$

Na primer:

$$P_1 = -0.02x_1^2 + 8x_1$$

$$P_2 = -0.015x_2^2 + 7x_2$$

$$P_3 = -0.018x_3^2 + 9x_3$$

$$P_4 = -0.012x_4^2 + 6x_4$$

$$P_5 = -0.01x_5^2 + 5x_5$$

uz ograničenje:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 1440$$

1. Prvo gledamo pojedinačne maksimume

Za svaki proizvod važi:

$$P_i(x_i) = a_i x_i^2 + b_i x_i$$

Maksimum parabole je:

$$x_i^{max} = -\frac{b_i}{2a_i}$$

Dobijamo:

$$x_1 = \frac{8}{0.04} = 200$$

$$x_2 = \frac{7}{0.03} = 233.33$$

$$x_3 = \frac{9}{0.036} = 250$$

$$x_4 = \frac{6}{0.024} = 250$$

$$x_5 = \frac{5}{0.02} = 250$$

Ali proverimo ograničenje:

$$2(200) + 3(233.33) + 4(250) + 250 + 2(250)$$

$$= 400 + 700 + 1000 + 250 + 500 = 2850$$

A dozvoljeno je samo:

$$1440$$

Znači ne možemo uzeti pojedinačne maksimume. Mora se rešiti zajednički problem.

2. Formira se Lagrangeova funkcija

Pošto je prvo ograničenje aktivno, pišemo ga kao jednakost:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 1440$$

Lagrangeova funkcija:

$$L = P + \lambda(1440 - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 - 2x_5)$$

3. Izvodi po svim promenljivima

Za optimum mora da važi:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

Za x_1:

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_1} = -0.04x_1 + 8$$

$$-0.04x_1 + 8 - 2\lambda = 0$$

odakle:

$$x_1 = \frac{8 - 2\lambda}{0.04}$$

Za x_2:

$$-0.03x_2 + 7 - 3\lambda = 0$$

$$x_2 = \frac{7 - 3\lambda}{0.03}$$

Za x_3:

$$-0.036x_3 + 9 - 4\lambda = 0$$

$$x_3 = \frac{9 - 4\lambda}{0.036}$$

Za x_4:

$$-0.024x_4 + 6 - \lambda = 0$$

$$x_4 = \frac{6 - \lambda}{0.024}$$

Za x_5:

$$-0.02x_5 + 5 - 2\lambda = 0$$

$$x_5 = \frac{5 - 2\lambda}{0.02}$$

4. Sve ubacujemo u ograničenje

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 1440$$

Posle zamene izraza za x_i, dobija se:

$$\lambda \approx 1.298$$

5. Računaju se optimalne količine

$$x_1 = \frac{8 - 2(1.298)}{0.04} = 135.10$$

$$x_2 = \frac{7 - 3(1.298)}{0.03} = 103.53$$

$$x_3 = \frac{9 - 4(1.298)}{0.036} = 105.78$$

$$x_4 = \frac{6 - 1.298}{0.024} = 195.92$$

$$x_5 = \frac{5 - 2(1.298)}{0.02} = 120.20$$

Dakle:

$$x^* = (135.10,\ 103.53,\ 105.78,\ 195.92,\ 120.20)$$

6. Provera ograničenja

$$2(135.10) + 3(103.53) + 4(105.78) + 195.92 + 2(120.20)$$
$$= 1440$$

Znači ograničenje je tačno iskorišćeno.

7. Maksimalna dobit

$$P_{\max} = P_1(135.10) + P_2(103.53) + P_3(105.78) + P_4(195.92) + P_5(120.20)$$

$$P_{\max} \approx 3201.43$$