

Primer 01: Simulacija bacanja novčića

Srećni dobitnik je na jednom takmičenju kao nagradu osvojio odmor u Las Vegasu sa plaćenim svim troškovima, uključujući i žetone za kockanje u hotelskom kasinu.

Kasino pored standardnih igara na sreću (blackjack, rulet itd.), nudi jednu novu igru sa sledećim pravilima.



Pravila igre:

1. Svako igranje obuhvata uzastopno bacanje neobeleženog novčića sve dok *razlika* između broja dobijenih (realizacija) grbova i pisama ne bude tri.
2. Ko se odluči da igra, mora za svako bacanje novčića da plati 1 NJ. Igra se ne sme prekinuti pre završetka tj. dok *razlika* između broja dobijenih grbova i pisama ne bude tri.
3. Na kraju svake igre igrač dobija 8 NJ.

Prema tome, igrač će da osнови novac ako je broj bacanja novčića manji od 8, ali će ga izgubiti ako mu bude potrebno više od 8 bacanja za završetak igre. Neki od mogućih tokova igre prikazani su u sledećoj tabeli (G –grb, P – pismo):

GGG	3 bacanja	zarada 5 NJ
PHPPP	5 bacanja	zarada 3 NJ
PGGPGPGPPPP	11 bacanja	gubitak 3 NJ

Da li igrati ovu igru ili ne?

Veliki broj ljudi bi ovu odluku bazirao na *simulaciji*, mada je verovatno ne bi nazvao tim imenom. U ovom slučaju, simulacija se odnosi na ništa drugo nego na

samostalno igranje igre više puta dok ne postane jasno da li je vredi igrati za novac. Npr. pola sata neprekidnog bacanja novčića i zapisivanje dobitaka i gubitaka je najverovatnije dovoljno. Ovo bi predstavljalo istinsku (pravu) simulaciju zato što se *imitira* stvarna igra, novčić se baca ali se novac u stvarnosti niti dobija niti gubi.

Umesto fizičkog bacanja novčića, može se upotrebiti računar da simulira isti eksperiment. Jasno je da računar ne može da baca novčić, ali može da simulira datu operaciju. Računar to postiže tako što generiše niz slučajnih brojeva generisanih po ravnomernoj raspodeli u intervalu od 0 do 1, tj. generiše *uniformne slučajne brojeve* na intervalu [0, 1]. Jedan od jednostavnih načina za generisanje uniformnih slučajnih brojeva je korišćenje **RAND()** funkcije u Excel-u. Npr. na slici P1-1 u donjem levom uglu pokazano je da je funkcija =RAND() dodeljena polju C10 i dalje kopirana na polja u intervalu C11:C59, komadom *Copy*. (Zagrade su obavezni deo ove komande, iako se ništa u njih ne unosi). Ovo uslovljava da Excel generiše slučajne brojeve prikazane u poljima C10:C59 radne tabele. (Redovi 24-53 su izostavljeni radi smanjenja veličine slike)

Verovatnoće realizacija bacanja novčića su:

$$P(\text{Grb}) = \frac{1}{2}, \quad P(\text{Pismo}) = \frac{1}{2}.$$

	A	B	C	D	E	F	G
1	Coin Flipping Game						
2							
3	Summary of Game						
4			Number of Flips =	11			
5			Winnings =	-\$3			
6							
7				Result			
8			Random	(0=Tails,	Total	Total	
9		Flip	Number	1=Heads)	Heads	Tails	Stop?
10		1	0.7520	0	0	1	
11		2	0.4184	1	1	1	
12		3	0.4189	1	2	1	
13		4	0.5982	0	2	2	
14		5	0.9559	0	2	3	
15		6	0.1403	1	3	3	
16		7	0.9345	0	3	4	
17		8	0.0801	1	4	4	
18		9	0.6892	0	4	5	
19		10	0.5146	0	4	6	
20		11	0.6290	0	4	7	Stop
21		12	0.1612	1	5	7	NA
22		13	0.0989	1	6	7	NA
23		14	0.1155	1	7	7	NA
54		45	0.1898	1	25	20	NA
55		46	0.3814	1	26	20	NA
56		47	0.7810	0	26	21	NA
57		48	0.5110	0	26	22	NA
58		49	0.9735	0	26	23	NA
59		50	0.0881	1	27	23	NA

	D
4	=COUNTBLANK(G10:G59)+1
5	=8-D4

	C	D	E	F	G
10	=RAND()	=IF(C10<0.5,1,0)	=D10	=B10-E10	
11	=RAND()	=IF(C11<0.5,1,0)	=E10+D11	=B11-E11	
12	=RAND()	=IF(C12<0.5,1,0)	=E11+D12	=B12-E12	=IF(ABS(E12-F12)>=3,"Stop","")
13	=RAND()	=IF(C13<0.5,1,0)	=E12+D13	=B13-E13	=IF(G12="",IF(ABS(E13-F13)>=3,"Stop",""),"NA")
14	=RAND()	=IF(C14<0.5,1,0)	=E13+D14	=B14-E14	=IF(G13="",IF(ABS(E14-F14)>=3,"Stop",""),"NA")
15	=RAND()	=IF(C15<0.5,1,0)	=E14+D15	=B15-E15	=IF(G14="",IF(ABS(E15-F15)>=3,"Stop",""),"NA")
16	:	:	:	:	:
17	:	:	:	:	:

Slika P1-1. Radna tabela modela za simulaciju igre bacanja novčića (Primer 1).

Prema tome, da bi simuliralo bacanje novčića, računar može da dodeli da bilo koja polovina mogućih slučajnih brojeva odgovara *grbovima* i da druga polovina odgovara *pismima*. U ovom slučaju usvojiće se sledeće:

slučajni broj generisan u intervalu od 0.0000 do 0.4999 odgovara *grbu*.

slučajni broj generisan u intervalu od 0.5000 do 0.9999 odgovara *pismu*.

Korišćenjem formule:

= IF(RAND()<0.5, 1, 0),

u svakom polju kolone D, na slici P1-1, Excel ubacuje 1 (što odgovara grbu) ako je generisani slučajni broj manji od 0,5 ili ubacuje 0 (što odgovara pismu) u suprotnom slučaju. Prema tome, prvih 11 slučajnih brojeva generisanih u koloni C daje sledeći niz pojavljivanja grbova (G) i pisama (P):

PGGPPGPGPPP,

na ovom mestu igra se završava pošto broj pisama (7) premašuje broj grbova (4) za 3. U poljima D4 i D5 zapisan je ukupan broj bacanja novčića (11) i rezultujuća zarada ili gubitak ($8 \text{ NJ} - 11 \text{ NJ} = -3 \text{ NJ}$).

Jednačine u donjem delu slike P1-1 prikazuju formule koje su unesene u različite kolone tako što se prvo unesu u polje na vrhu kolone pa se potom korišćenjem komande Copy unesene komande kopiraju na ostala polja u koloni. Korišćenjem ovih jednačina, radna tabela zabeležava simulaciju jedne kompletirane igre. Da bi se virtuelno osiguralo da se igra završi, simulirano je 50 bacanja novčića. Kolone E i F prikazuju ukupni broj grbova i pisama posle svakog bacanja. Jednačine unete u polja kolone G ostavljaju svako polje prazno dok se razlika u brojevima grbova i pisama ne dostigne 3, kada se u odgovarajuće polje ispisuje STOP. U narednim poljima, kolone G se ispisuje NA (for Not Applicable). Formule preko kojih se izračunavaju ukupan broj bacanja novčića (polje D4) i rezultujuća zarada ili gubitak (polje D5) prikazane su u gornjem desnom delu slike P1-1.

Simulacija bacanja novčića može se na ovaj način, korišćenjem radne tabele prikazane na slici P1-1, ponavljati po želji. Svaki put, Excel generiše novi niz slučajnih brojeva, pa tako i novi niz grbova i pisama. (Excel će ponoviti niz slučajnih brojeva jedino ako se selektuju slučajni brojevi koji se hoće ponoviti, kopiraju koristeći komandu *Copy*. Nakon toga se bira komanda *Paste Special* sa menija *Edit* i izabere se opcija *Values*, i klikne se OK.)

	H	I	J	K
1	Data Table for Coin Flipping Game			
2	(14 Replications)			
3				
4			Number	
5		Play	of Flips	Winnings
6			7	\$1
7		1	11	-\$3
8		2	5	\$3
9		3	5	\$3
10		4	9	-\$1
11		5	7	\$1
12		6	7	\$1
13		7	5	\$3
14		8	3	\$5
15		9	17	-\$9
16		10	5	\$3
17		11	5	\$3
18		12	3	\$5
19		13	9	-\$1
20		14	7	\$1
21				
22		Average	7	\$1.00

	J	K
6	=D4	=D5

Table

Row input cell:

Column input cell:

Cancel OK

Slika P1-2. Tabela u kojoj se zapisuju rezultati izvođenja 14 ponavljanja simulacije koristeći radnu tabelu na slici P1-1.

Simulacija se normalno ponavlja više puta da bi se dobila što pouzdanija procena izlaznog rezultata. Zato se prikazana radna tabela koristi za generisanje podataka u tabeli na slici P1-2 za 14 ponavljanja igre. Kao što je prikazano u gornjem desnom uglu slike P1-2, ovo se postiže unošenjem jednačina u prvi red tabele koja se povezuje sa poljima u koja se upisuju izlazni rezultati simulacije, slika P1-1, tako da je =D4 uneto u polje J6 i =D5 je uneto u polje K6. Sledeći korak je da se selektuje ceo sadržaj tabele (tj. polja I6:K20) i izabere opcija *Table* iz menija *Data*. Konačno, potrebno je izabrati *bilo koje* prazno polje (npr. polje E4) za ulazno polje kolone i kliknuti OK. Excel će tada preračunati izlazna polja u kolonama J i K za svaki red gde unet *bilo koji* broj u kolonu I. Unošenjem jednačina =AVERAGE(J7:J20) i =AVERAGE(K7:K20), u polja J22 i K22 dobijaju se srednje vrednosti broja bacanja i zarade.

Polje J22 na slici P1-2 pokazuje da je prosečni potreban broj bacanja novčića, na uzorku od 14 ponavljanja igre, za završetak igre 7. Dobijeni prosečni broj bacanja novčića daje procenu matematičkog očekivanja raspodele verovatnoća slučajne promenljive: broj potrebnih bacanja novčića za završetak igre. Prema tome, srednja vrednost od 7 ukazuje na to da će se, u proseku, zaraditi 1 NJ (polje K22) svaki put kada se igra. Zato, ako potencijalni igrač nema relativno veliku averziju prema riziku, čini se da bi trebalo da igra igru što veći broj puta.

Ali potrebno je biti oprezan. Jedna od čestih grešaka u primeni simulacije je da se zaključci donose na osnovu malih uzoraka, zato što je statistička analiza bila neodgovarajuća ili je nije bilo uopšte. U ovom slučaju, *standardno odstupanje* uzorka je 3,67, što dovodi do toga da je procenjeno *standardno odstupanje* srednje vrednosti uzorka $3,67 / \sqrt{14} \approx 0,98$. Prema tome, čak iako se pretpostavi da je raspodela verovatnoća broja bacanja novčića potrebnih da se završi igra, *Normalna*

(što je veoma gruba pretpostavka), bilo koji razuman interval poverenja za matematičko očekivanje ove raspodele bi bio daleko iznad 8. Stoga, da bi se doneli valjani zaključci sa razumnim nivoom statističke značajnosti, potrebno je imati veći uzorak. Nažalost, pošto je standardno odstupanje srednje vrednosti uzorka obrnuto proporcionalno kvadratnom korenu veličine uzorka, potrebno je veliko povećanje veličine uzorka da bi se ostvarilo malo povećanje u preciznosti procene matematičkog očekivanja. U ovom slučaju, čini se da bi 100 simuliranih igara (ponavljanja) bilo dovoljno, zavisno od toga koliko blizu 8 je srednja vrednost uzorka, ali rezultati dobijeni sa 1000 ponavljanja bi bili mnogo pouzdaniji.

Na osnovu 1000 simuliranih igara dobija se da je matematičko očekivanje broja potrebnih bacanja novčića do završetka igre 9 (što se može pokazati i analitički). Tako da, na duge staze, igrač će u proseku gubiti 1 NJ svaki put kada igra igru. Jedan od razloga zašto na osnovu prethodnog simulacionog eksperimenta nije bilo moguće doneti ovakav zaključak je to što su šanse za veliki gubitak u bilo kojoj igri male (zbog malog broja ponavljanja), dok se sa druge strane ne može zaraditi više od 5 NJ.

Slika P1-3 daje rezultate 1000 simuliranih igara (redovi 17-1000 nisu prikzani). Polje J1008 pokazuje da je srednji broj potrebnih bacanja novčića 8,98, što je veoma blisko stvarnom matematičkom očekivanju od 9. Dobijeni potreban broj ponavljanja, i prosečna zarada od -0.98 NJ (data u polju K1008) sada daje pouzdaniju osnovu za zaključak da ova igra neće igraču zaraditi novac na duge staze. (Može se svako kladiti da je kasino pre uvođenja igre, upotrebio simulaciju da unapred verifikuje ovu činjenicu)

	H	I	J	K
1	Data Table for Coin Flipping Game			
2	(1000 Replications)			
3				
4			Number	
5		Play	of Flips	Winnings
6			3	\$5
7		1	15	-\$7
8		2	9	-\$1
9		3	11	-\$3
10		4	9	-\$1
11		5	3	\$5
12		6	7	\$1
13		7	11	-\$3
14		8	9	-\$1
15		9	11	-\$3
16		10	7	\$1
1001		995	3	\$5
1002		996	15	-\$7
1003		997	7	\$1
1004		998	11	-\$3
1005		999	7	\$1
1006		1000	3	\$5
1007				
1008		Average	8.98	-\$0.98

Slika P1-3 Tabela sa rezultatima 1000 ponavljanja igre.

Formalno postavljanje simulacionog modela ovako jednostavan primer nije bilo potrebno. Radi ilustracije to će biti učinjeno sada. *Stohastički (slučajni) sistem* koji se simulira je uzastopno bacanje novčića radi igranja igre. *Simulacioni sat* beleži broj (simuliranih) bacanja novčića t koji su se do sad odigrali. Informacija o sistemu koja definiše njegov trenutni status tj. *stanje sistema*, je:

$N(t)$ = broj grbova manje broj pisama posle t bacanja novčića.

Događaji koji menjaju stanje sistema su pojavljivanje grba odnosno pojavljivanje pisma kao realizacije bacanja novčića. *Metod za generisanje događaja* je generisanje uniformnih slučajnih brojeva na intervalu $[0, 1]$, gde je

0.0000 do 0.4999 → grb,
0.5000 do 0.9999 → pismo.

Formula kojom se definiše promena stanja sistema je:

$$N(t) = \begin{cases} N(t-1) + 1 & \text{ako se u bacanju } t \text{ pojavio grb} \\ N(t-1) - 1 & \text{ako se u bacanju } t \text{ pojavilo pismo.} \end{cases}$$

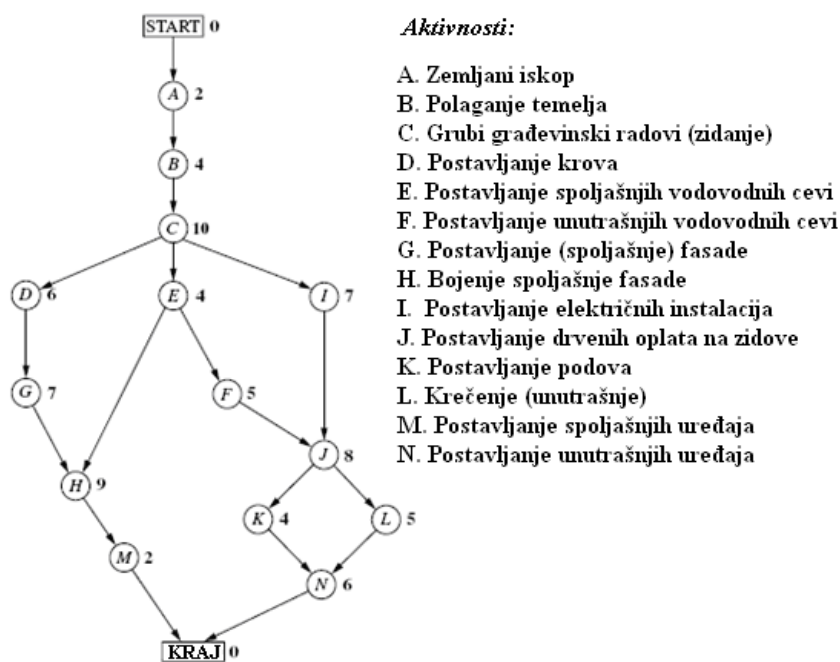
Simulacija igre se završava za prvu vrednost t za koju je $N(t)=\pm 3$. Iznos koji se zaradi (pozitivni ili negativni) za datu simulaciju igre se određuje na osnovu izraza $8 - t$.

Primer 04: Određivanje verovatnoće završetka projekta

Jedna od najvećih briga rukovodioca projekta je da li će njegov tim uspeti da završi projekat u zadatom roku. Grubu procenu verovatnoće završetka projekta za dati plan (redosled) aktivnosti moguće je odrediti primenom PERT metode koja se zasniva na tri aproksimacije koje omogućuju (pojednostavljaju) izračunavanje ove verovatnoće. Na žalost, zbog uvedenih aproksimacija, procena verovatnoće završetka projekta je uvek optimistička, što može navesti rukovodioca projekta da donese neke pogrešne odluke.

U današnjoj projektantskoj praksi postalo je uobičajeno da se verovatnoća završetka projekta određuje primenom simulacije. Postupak simulacije u ovom slučaju podrazumeva određivanje vremena trajanja aktivnosti preko generisanja slučajnih brojeva na osnovu raspodela vremena trajanja pojedinih aktivnosti projekta. Koristeći mrežni dijagram projekta tj. redosled i međuzavisnost aktivnosti, simulacijom se određuje kad koja aktivnost počinje odnosno kad se završava i konačno kad se završava projekat. Ponavljanjem postupka simulacije hiljadama puta (u jednom eksperimentu), moguće je odrediti verovatnoću završetka projekta sa zadovoljavajućom tačnošću.

Kratko podsećanje vezano za radni primer, preduzeće Construction Co. je pobedilo na tenderu i postalo glavni izvođač u izgradnji nove fabrike. Između ostalog ugovor sadrži velike penale ukoliko izgradnja ne bude završena u roku od 47 nedelja. U tom smislu osnovni element za evaluaciju alternativnih planova izgradnje jeste verovatnoća završetka do zadatog roka. U usvojenom izvođačkom projektu postoji 14 velikih aktivnosti čiji je raspored i međuzavisnost prikazana na slici P4-1.



Slika P4-1: Mrežni dijagram projekta.

Broj pored aktivnosti u mrežnom dijagramu projekta predstavlja očekivano vreme trajanja aktivnosti u nedeljama, ako se aktivnost izvodi na normalan način. Najduža putanja u mrežnom dijagramu, kritičan put, iznosi 44 nedelje. Kako je vreme trajanja projekta jednako vremenu trajanja najduže putanje u mrežnom dijagramu zaključuje se da se projekat može završiti za 44 nedelje, 3 nedelje pre roka.

Kako su vremena trajanja aktivnosti pretpostavljena kao očekivane vrednosti određene iskustveno, postoji velika neizvesnost u vezi sa stvarnim trajanjem aktivnosti pa samim tim i sa trajanjem čitavog projekta. Drugim rečima postoji mogućnost da se vreme trajanja projekta značajno razlikuje od 44 nedelje pa čak i da premaši krajnji rok od 47 nedelja.

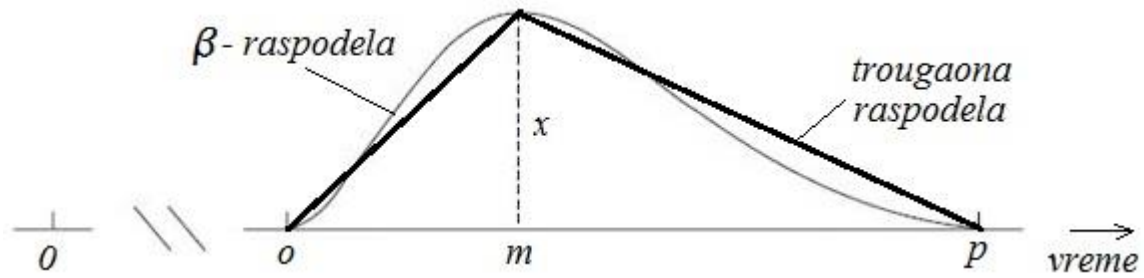
Iz tih razloga se uvodi neizvesnost u vremena trajanja aktivnosti. Trajanje aktivnosti se definiše preko tri vremena i to: optimističkog (*o*), najverovatnijeg (*m*) i pesimističkog (*p*) vremena trajanja (vidi tabelu P4-1). Takođe uvodi se pretpostavka da se trajanje svih aktivnosti ponaša po zakonu Beta raspodele. Ovako definisana vremena trajanja aktivnosti uz tri aproksimacije koje uvodi metoda PERT omogućuju da se analitički odredi gruba procena verovatnoće završetka projekta do zadatog roka.

Tabela P4-1: Optimistička, najverovatnija i pesimistička vremena trajanja aktivnosti.

Aktivnost	Optimističko vreme <i>o</i>	Najverovatnije vreme <i>m</i>	Pesimističko vreme <i>p</i>
A	1	2	3
B	2	$3\frac{1}{2}$	8
C	6	9	18
D	4	$5\frac{1}{2}$	10
E	1	$4\frac{1}{2}$	5
F	4	4	10
G	5	$6\frac{1}{2}$	11
H	5	8	17
I	3	$7\frac{1}{2}$	9
J	3	9	9
K	4	4	4
L	1	$5\frac{1}{2}$	7
M	1	2	3
N	5	$5\frac{1}{2}$	9

Prednosti određivanja verovatnoće završetka projekta primenom simulacije su sledeće: nije potrebno uvoditi aproksimacije kao kod analitičkog određivanja i velika fleksibilnost u izboru raspodele vremena trajanja aktivnosti.

Najčešće se za generisanje vremena trajanja aktivnosti koristi trougaona raspodela. Veza između beta raspodele, trougaone raspodele i optimističkog (o), najverovatnijeg (m) i pesimističkog (p) vremena trajanja aktivnosti data je na slici P4-2.



Slika P4-2: Raspodele vremena trajanja aktivnosti.

Da bi se dobio izraz za slučajni broj generisan po trougaonoj raspodeli potrebno je primeniti *metodu inverzne transformacije*. Kao prvo potrebno je odrediti gustinu trougaone raspodele. Kako površina ispod krive gustine trougaone raspodele mora biti jednaka 1 (interval između o i p), veličina x ima sledeću vrednost:

$$\frac{1}{2} \cdot (m - o) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (p - m) \cdot x = 1 \rightarrow x = \frac{2}{p - o},$$

odakle se dobija gustina trougaone raspodele kao:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{2}{p - o} \cdot \frac{t - o}{m - o}, & 0 \leq t \leq m \\ \frac{2}{p - o} \cdot \left(1 - \frac{t - m}{p - m}\right), & m \leq t \leq p \\ 0, & t > p \end{cases}$$

Funkcija trougaone raspodele je sledeća:

$$F(t) = \int_0^t f(t) \cdot dt = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{(t - o)^2}{(p - o) \cdot (m - o)}, & 0 \leq t \leq m \\ 2 \cdot \frac{t - m}{p - o} - \frac{(t - m)^2}{(p - o) \cdot (p - m)}, & m \leq t \leq p \\ 0, & t > p \end{cases}$$

Inverzna funkcija trougaone raspodele, tj. izraz za izračunavanje slučajnog broja generisanog po trougaonoj raspodeli, za $o < m < p$, je sledećeg oblika:

$$F^{-1}(r) = t = \begin{cases} o + \sqrt{r \cdot (p - o) \cdot (m - o)}, & 0 \leq r \leq \frac{m - o}{p - o} \\ p - \sqrt{(1 - r) \cdot (p - m) \cdot (p - o)}, & \frac{m - o}{p - o} \leq r \leq 1 \end{cases}$$

gde je r slučajan broj generisan po ravnomernoj raspodeli u intervalu od 0 do 1.

U slučaju da je $o < m = p$ izraz za izračunavanje slučajnog broja generisanog po trougaonoj raspodeli je sledećeg oblika:

$$F^{-1}(r) = t = o + (m - o) \cdot \sqrt{r}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

U slučaju da je $o = m < p$ izraz za izračunavanje slučajnog broja generisanog po trougaonoj raspodeli je sledećeg oblika:

$$F^{-1}(r) = t = p - (p - m) \cdot \sqrt{1 - r}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Kada je $o = m = p = \text{const.}$, slučajan broj je konstanta tj. $t = \text{const.}$ za $0 \leq r \leq 1$.

U zavisnosti od odnosa procenjenih optimističkih, najverovatnijih i pesimističkih vremena pojedinih aktivnosti na gore prikazani način se generišu (izračunavaju) vremena trajanja aktivnosti koja se koriste pri simulaciji izračunavanja verovatnoće završetka projekta do određenog roka. Praktično, na osnovu gornjih izraza preko procedure Function RiskTriang(o , m , p , SL), izračunavaju se vremena trajanja aktivnosti. (slika P4-3)

```
Function RiskTriang(o, m, p, SL)
If ((o <= m) And (m <= p)) Then
  If ((o = m) And (m = p)) Then
    Vreme = m
  End If
  If ((o = m) And (m < p)) Then
    Vreme = p - (p - m) * Sqr(1 - SL)
  End If
  If ((o < m) And (m = p)) Then
    Vreme = o + (m - o) * Sqr(SL)
  End If
  If ((o < m) And (m < p)) Then
    If SL <= (m - o) / (p - o) Then
      Vreme = o + Sqr(SL * (p - o) * (m - o))
    Else
      Vreme = p - Sqr((1 - SL) * (p - m) * (p - o))
    End If
  End If
Else
  Vreme = -1
End If
End Function
```

Slika P4-3: Procedura za izračunavanje vremena trajanja aktivnosti.

Na slici P4-4 je prikazana Excel tabela za simulaciju vremena trajanja projekta preduzeća Construction Co.

1	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2	Template for PERT Simulation								
3	Sl. Broj		Immediate	Time estimates			Start	Activity	Finish
4		Activity	Predecessor	o	m	p	Time	Time	Time
5	0.489265	A	-	1	2	3	0	1.989	1.989
6	0.0682012	B	A	2	3.5	8	1.989	2.783	4.773
7	0.2394333	C	B	6	9	18	4.773	8.936	13.709
8	0.9250111	D	C	4	5.5	10	13.709	8.577	22.286
9	0.3889801	E	C	1	4.5	5	13.709	3.334	17.042
10	0.548128	F	E	4	4	10	17.042	5.967	23.009
11	0.7611186	G	D	5	6.5	11	22.286	8.460	30.746
12	0.4149417	H	E,G	5	8	17	30.746	9.051	39.797
13	0.6256334	I	C	3	7.5	9	13.709	7.110	20.819
14	0.6893908	J	F,I	3	9	9	23.009	7.982	30.991
15	0.9718023	K	J	4	4	4	30.991	4.000	34.991
16	0.0042296	L	J	1	5.5	7	30.991	1.338	32.329
17	0.0477643	M	H	1	2	3	39.797	1.309	41.106
18	0.1127273	N	K,L	5	5.5	9	34.991	5.475	40.465
19									
20							Project Completion =	41.106	
21							Project deadline =	47	
22							Deadline Met (1=Yes, 0=No)?	1	

5	0	=RiskTriang(D5,E5,F5)	=G5+H5
6	=I5	=RiskTriang(D6,E6,F6)	=G6+H6
7	=I6	=RiskTriang(D7,E7,F7)	=G7+H7
8	=I7	=RiskTriang(D8,E8,F8)	=G8+H8
9	=I7	=RiskTriang(D9,E9,F9)	=G9+H9
10	=I9	=RiskTriang(D10,E10,F10)	=G10+H10
11	=I8	=RiskTriang(D11,E11,F11)	=G11+H11
12	=MAX(I9,I11)	=RiskTriang(D12,E12,F12)	=G12+H12
13	=I7	=RiskTriang(D13,E13,F13)	=G13+H13
14	=MAX(I10,I13)	=RiskTriang(D14,E14,F14)	=G14+H14
15	=I14	=RiskTriang(D15,E15,F15)	=G15+H15
16	=I14	=RiskTriang(D16,E16,F16)	=G16+H16
17	=I12	=RiskTriang(D17,E17,F17)	=G17+H17
18	=MAX(I15,I16)	=RiskTriang(D18,E18,F18)	=G18+H18
19			
20		Project Completion =	=MAX(I17,I18)
21		Project Deadline =	47
22		Deadline Met (1=yes, 0=no)?	=IF(I20<=I21,1,0)

Slika P4-4: Excel tabela za simulaciju vremena trajanja projekta Construction Co.

Formula, = RiskTriang(o,m,p,SL), se ubacuje u svako ulazno polje u koloni H (vreme trajanja aktivnosti), koje predstavlja vreme trajanja aktivnosti izračunato na osnovu vrednosti za o , m , i p (Tabela P4-1). Relacije u ulaznim poljima kolona G (vreme početka aktivnosti) i I (vreme završetka aktivnosti) formiraju se na osnovu redosleda i međuzavisnosti aktivnosti prikazanih na mrežnom dijagramu projekta. U jednom od izlaznih polja prikazano je vreme trajanja projekta dobijeno simulacijom dok drugo izlazno polje pokazuje da li je ispunjen rok za završetak projekta od 47 nedelja (gde 1 znači da i 0 znači ne).

Rezultati simulacionog eksperimenta prikazani su na slici P4-5. Simulacija je izvršena 1000 puta.

L	M	N	O	P	Q	R
Broj	Project	Deadline Met				
Simulacije	Completion	(1=Yes, 0=No)				
	44.984	1			Srednja vrednost	46.231
1	43.687	1			Sr. kv. Od	3.651
2	42.528	1			Verovatnoca	0.578
3	49.546	0				
4	52.472	0			Procena greske	
5	52.250	0			vremena zavrsetka	0.1154
6	50.057	0				
7	45.480	1				
8	41.520	1				
9	52.024	0				
10	43.745	1				
11	54.291	0				
12	45.908	1				
13	50.567	0				
14	50.988	0				
15	41.141	1				
16	45.531	1				
17	39.464	1				
18	41.170	1				
19	51.778	0				
20	44.761	1				
21	49.036	0				
22	49.605	0				
23	46.304	1				
24	47.343	0				
25	44.342	1				
26	52.712	0				

Slika P4-5: Rezultati simulacionog eksperimenta.

U gornjem desnom uglu na slici P4-5 dati su rezultati simulacionog eksperimenta. U polju *Srednja vrednost* data je srednja vrednost trajanja projekta izračunata na osnovu svih 1000 vrednosti vremena trajanja projekta dobijenih u simulacionom eksperimentu. U polju *Sr.Kv.Od.* dato je srednje kvadratno odstupanje vremena trajanja projekta od njegove srednje vrednosti, takođe izračunato na osnovu svih 1000 vrednosti vremena trajanja projekta dobijenih u simulacionom eksperimentu. Konačno u polju *Verovatnoća* data je verovatnoća završetka projekta do zadatog roka kao odnos onih simulacija gde je ispunjen rok za završetak projekta od 47 nedelja i ukupnog broja izvršenih simulacija u eksperimentu (1000). Dobijena verovatnoća završetka projekta u predviđenom roku je 0,578. Treba primetiti da je dobijena relativno precizna vrednost dosta manja od vrednosti verovatnoće završetka projekta dobijene primenom metode PERT koja iznosi 0,84. Vrednost verovatnoće završetka projekta dobijena simulacijom daje bolju informaciju rukovodiocu projekta u kom smeru treba izmeniti plan izvođenja radova da bi se poboljšale šanse za završetak projekta u predviđenom roku.

Na kraju je prikazan još jedan značajan pokazatelj, a to je *Procena greške završetka projekta*. Kako je vreme trajanja aktivnosti dato u nedeljama to je i srednje vreme trajanja projekta izračunato u nedeljama. Greška iznosi 0,1154 nedelje što je približno 0,81 dan ili 19,39 časova.

Kao dodatak informaciji o verovatnoći završetka projekta do predviđenog roka, rukovodilac projekta je takođe zainteresovan raspodelu vremena trajanja projekta. Kako se simulacionim eksperimentom dobilo 1000 vrednosti vremena trajanja projekta moguće je odrediti blisku aproksimaciju raspodele vremena završetka projekta. Primenom χ^2 - testa verifikovano je da se uzorak dobijen simulacionim eksperimentom, za vreme trajanja projekta, može na zadovoljavajući način opisati Normalnom raspodelom $N(46,231;3,641)$. Drugim rečima vreme trajanja projekta u ovom slučaju raspodeljeno je po Normalnoj raspodeli, što odgovara trećoj pretpostavci PERT metode.

Na slici P4-6 je izveštaj testiranja uzorka simulacionog eksperimenta χ^2 - testom, poligon empirijske raspodele kao i gustina dobijene Normalne raspodele.

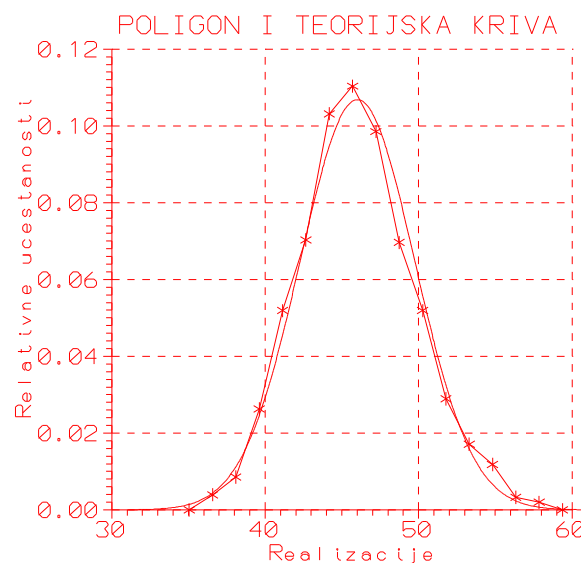
KARAKTERISTIKE UZORKA:

Obim uzorka N = 1001
Minimalni clan Xmin = 35.8110
Maximalni clan Xmax = 58.6220
Srednja vrednost Xsr = 46.2310
Disperzija D[x] = 13.9462
Srednje kvadratno odstupanje ... $\delta[x]$ = 3.6512
Broj intervala Ki = 15
Duzina intervala h = 1.5207

Intervali	Ucestanosti	Verovatnoce	HISR
35.8110 - 37.3317	6	0.0100	1.633
37.3317 - 38.8525	13	0.0175	1.185
38.8525 - 40.3732	40	0.0379	0.112
40.3732 - 41.8939	79	0.0695	1.274
41.8939 - 43.4147	107	0.1083	0.017
43.4147 - 44.9354	157	0.1432	1.307
44.9354 - 46.4561	168	0.1608	0.311
46.4561 - 47.9769	150	0.1533	0.077
47.9769 - 49.4976	106	0.1241	2.675
49.4976 - 51.0183	79	0.0853	0.480
51.0183 - 52.5391	44	0.0498	0.687
52.5391 - 54.0598	26	0.0247	0.067
54.0598 - 55.5805	18	0.0104	5.557
55.5805 - 57.1013	5	0.0037	0.444
57.1013 - 58.6220	3	0.0015	1.526
	1001	1.0000	17.353

IZVESTAJ :

Teorijska vrednost za 12 stepeni slobode i prag znacajnosti
 $\alpha = 0.1000$ za HI-KVADRAT raspodelu iznosi $H_{It} = 18.5490$
Posto je $H_{It} > H_{Isr}$ [$18.5490 > 17.3530$] mozemo prihvatiti hipotezu
da uzorak ima Normalnu raspodelu sa parametrima $m = 46.23$ i $\delta = 3.65$
sa pragom znacajnosti $\alpha = 0.01$.



Slika P4-6: Testiranje uzorka – vreme trajanja projekta – χ^2 - testom, Normalna raspodela.

Primer 12.1: Simulacija jednokanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom - $M/M/1/\infty$ sistem opsluživanja

Primer 12.2: Simulacija ulaznog ciklusa lifta

Бугарић, У., Петровић, Д.: Моделирање система опслуживања, Машински факултет Београд, Београд, 2011.