Теорија игара

1. Два конкурентна предузећа разматрају могућност промене производне стратегије на начин да уместо имитирања производа пређу на иновирање производа. Ако ниједно предузеће не промени стратегију, профит сваког предузећа износи 3 милиона динара. Промена стратегије подразумева трошак од 1 милион динара по предузећу. Ако се само једно предузеће одлучи да промени стратегију, оно остварује већу продају у односу на конкурента. Ако оба предузећа промене производну стратегију, продаја остаје иста као и у случају када ниједно не мења стратегију. Укупан приход на тржишту износи 6 милиона динара и равномерно се распоређује на оба предузећа уколико су оба одабрала исту стратегију. Одредити коју производну стратегију треба да одаберу предузећа.

Решење:

Ако једно предузеће промени стратегију, а друго не, предузеће које не мења стратегију имаће значајно нижу продају у односу на конкурента. Како је у услову задатка дато да предузеће које мења стратегију остварује за један милион динара већи профит него у случају када се стратегија не мења, а профит без промене стратегије износи три милиона динара, следи да ће предузеће које је променило стратегију остварити профит од четири милиона динара. Како је укупан приход који се распоређује на оба предузећа шест милиона динара, то значи да ће предузеће које није променило стратегију у том случају остварити профит од једног милиона динара. Ако оба предузећа промене стратегију, продаја се своди на исти ниво као и у случају када ниједно предузеће не мења стратегију, с тим што предузећа морају да плате трошкове промене стратегије. Ово значи да ће, уколико једно предузеће промени стратегију, и друго предузеће бити подстакнуто да учини исто. У овом случају једини резултат промене стратегије биће повећани трошкови, па ће се профит сваког предузећа умањити за један милион динара; без промене стратегије свако предузеће остварује профит од три милиона динара, док у случају да оба предузећа промене стратегију профит сваког предузећа износи два милиона динара. У матрицама су дати износи у милионима динара:

Предузеће 2 / Предузеће 1	Промена стратегије (иновирање)	Без промене стратегије (имитирање)
Промена стратегије (иновирање)	(2,2)	(4,1)
Без промене стратегије (имитирање)	(1,4)	(3,3)

Стратегије предузећа 1 представљене су врстама матрице, док су стратегије предузећа 2 представљене колонама. Исплате предузећа 1 приказане су као прва вредност уређеног пара, а исплате предузећа 2 као друга вредност. Ако предузеће 1 одлучи да не промени стратегију, а предузеће 2 се одлучи да промени стратегију, тада ће предузеће 1 остварити профит од једног милиона динара, док ће предузеће 2 остварити профит од четири милиона динара, што одговара пољу у матрици у коме се укрштају стратегија „Без промене стратегије“ предузећа 1 и стратегија „Промена стратегије“ предузећа 2. Посматрајмо сада свако предузеће појединачно.

Предузеће 1:

Претпоставимо да предузеће 2 неће променити стратегију. Тада матрица исплата за предузеће 1 има следећи облик (у овом тренутку исплате предузећа 2 нису од значаја, јер је предмет анализе избор стратегије предузећа 1, па су приказане само вредности његових исплата):

Предузеће 2 / Предузеће 1	Без промене стратегије
Промена стратегије	(4,)
Без промене стратегије	(3,)

Како предузеће 1 у овом случају бира између профита од четири милиона динара и три милиона динара, јасно је да ће се одлучити за промену стратегије. Сада претпоставимо да ће предузеће 2 променити стратегију. Тада матрица исплате за предузеће 1 има следећи облик:

Предузеће 2 / Предузеће 1	Промена стратегије
Промена стратегије	(2,)
Без промене стратегије	(1,)

Одабир предузећа 2 да промени стратегију примораће и предузеће 1 да промени стратегију, јер је у том случају повољније да оствари профит од два милиона динара него један милион динара. Може се закључити да се предузећу 1 у оба случаја више исплати да одабере стратегију иновирање производа. Сада, на сличан начин, размотримо предузеће 2.

Предузеће 2:

Претпоставимо да предузеће 1 неће променити стратегију (иако смо утврдили да ће је увести). Тада матрица исплате за предузеће 2 има следећи облик:

Предузеће 2 / Предузеће 1	Промена стратегије	Без промене стратегије
Без промене стратегије	(,4)	(,3)

Из ове матрице следи да се предузећу 2 више исплати да пређе на иновирање производа, јер у том случају остварује профит од четири милиона динара, док без мењања стратегије остварује профит од три милиона динара. Ако предузеће 2 претпостави да ће предузеће 1 променити стратегију и прећи на иновирање производа, тада је матрица исплате за предузеће 2:

Предузеће 2 / Предузеће 1	Промена стратегије	Без промене стратегије
Промена стратегије	(,2)	(,1)

И у овом случају закључујемо да се предузећу 2 више исплати да пређе на иновирање производа. **Сада је јасно да ће и предузеће 1 и предузеће 2 одабрати стратегију иновирање производа.**

Предузеће 2 / Предузеће 1	Промена стратегије (иновирање производа)	Без промене стратегије (имитирање производа)
Промена стратегије (иновирање производа)	(2,2)	(4,1)
Без промене стратегије (имитирање производа)	(1,4)	(3,3)

2. Три предузећа производе исти производ и желе да унапређењем еколошких перформанси производа, које такође носи известан трошак, повећају профит. Свако предузеће доноси одлуку хоће ли обухватити део или све фазе животног циклуса. Пораст профита предузећа зависи од тога да ли је једино изабрало део или све фазе животног циклуса. Ако је изабрало све фазе животног циклуса само једно предузеће (а преостала два део фаза), тада је пораст профита тог предузећа два, док остала предузећа немају пораст профита. Ако само једно предузеће бира део фаза животног циклуса (а преостала два обухвате све фазе), тада је пораст профита тог предузећа један, док остала предузећа немају пораст профита. Уколико два или сва три предузећа користе исту стратегију, нема пораста профита. Одредити стратегију за овај проблем.

Решење:

Обележимо предузећа са I, II и III, а пораст профита са R1, R2 и R3. Свако предузеће има две стратегије:

1-обухвата део фаза животног циклуса (Д)
2 -обухвата све фазе животног циклуса (С)

Према услову: ако је једино једно предузеће изабрало С (а друга два Д), тада то предузеће има пораст профита 2, а остали 0; ако је једино једно предузеће изабрало Д (а друга два С), тада то предузеће има пораст профита 1, а остали 0; ако два или сва три предузећа користе исту стратегију (тј. нема „јединственог“ избора), пораст профита је 0.

Посматрајмо следећу матрицу исплате:

I	II	III	R1	R2	R3
1	1	1	0	0	0
1	1	2	0	0	2
1	2	1	0	2	0
1	2	2	1	0	0
2	1	1	2	0	0
2	1	2	0	1	0
2	2	1	0	0	1
2	2	2	0	0	0

Уколико сва три предузећа обухвате исте фазе животног циклуса производа, ниједно предузеће не остварује пораст профита, што је приказано у првом и последњем реду табеле. Ако само једно предузеће обухвати све фазе животног циклуса, док преостала два обухвате само део фаза, то предузеће остварује пораст профита од два, док су пораст профита осталих предузећа једнаки нули. Ако само једно предузеће обухвати део фаза животног циклуса, а преостала два обухвате све фазе, то предузеће остварује пораст профита од један, док су пораст профита осталих предузећа једнаки нули. У свим осталим случајевима, када два предузећа користе исту стратегију, ниједно предузеће не остварује пораст профита.

Стратегије фирми се обележавају у облику вектора зато што свака фирма има две чисте стратегије и бира их са одређеним вероватноћама. Вредност x представља вероватноћу да предузеће I изабере прву стратегију, док $1-x$ представља вероватноћу избора друге стратегије, при чему збир вероватноћа мора бити једнак јединици. Исто важи и за предузећа II и III, са параметрима y и z. Овакво векторско представљање омогућава једноставно рачунање вероватноћа свих 2^3 могућих исхода и директно израчунавање очекиваних добитака играча.

Зато на почетку обележимо стратегије са:

$$\hat{x} = \binom{x}{1-x}, \hat{y} = \binom{y}{1-y}, \hat{z} = \binom{z}{1-z}$$

π_1 представља очекивани пораст профита предузећа I и добија се као збир производа вероватноћа свих могућих исхода и одговарајућих исплата предузећа I. Пошто предузећа не доносе увек исту одлуку о обухвату фаза животног циклуса производа, већ користе мешовите стратегије, неопходно је посматрати просечан, односно очекивани пораст профита. У изразу за π_1појављују се само они исходи у којима предузеће I остварује пораст профита, док сви остали исходи имају нулту исплату. Услов $\pi_1 \geq 0$обезбеђује да предузеће I нема мотив да једнострано промени изабрану стратегију, што представља један од основних услова равнотеже у мешовитим стратегијама.

$$\pi_1 = 0 \cdot xyz + 0 \cdot xy(1-z) + 0 \cdot x(1-y)z + 1 \cdot x(1-y)(1-z) + 2 \cdot (1-x)yz + 0 \cdot (1-x)y(1-z) + 0 \cdot (1-x)(1-y)z + 0 \cdot (1-x)(1-y)(1-z)$$

Ова формула за π_1 представља очекивани пораст профита предузећа I и добија се разматрањем свих 2^3могућих комбинација избора стратегија три предузећа. Сваки члан у изразу састоји се од два дела: први део представља пораст профита предузећа I у датом исходу, а други део представља вероватноћу да се тај исход догоди, која се добија множењем вероватноћа појединачних избора стратегија сваког предузећа. На пример, израз $x(1-y)(1-z)$ представља вероватноћу да предузеће I изабере стратегију обухвата дела фаза животног циклуса, док предузећа II и III изаберу стратегију обухвата свих фаза животног циклуса. У том случају предузеће I остварује пораст профита један, па се тај члан у изразу множи са један. Аналогно томе, израз $(1-x)yz$ одговара случају у коме предузеће I бира стратегију обухвата свих фаза животног циклуса, док предузећа

II и III бирају стратегију обухвата дела фаза, при чему предузеће I остварује пораст профита два. У свим осталим комбинацијама предузеће I не остварује пораст профита, па су одговарајући чланови у формули помножени са нулом.

Да би пораст профита био позитиван, мора да важи

$$\pi_1 \geq 0.$$

Приликом анализе услова равнотеже испитује се да ли предузећу I одговара да у потпуности пређе на једну од чистих стратегија или да остане при мешовитој стратегији. Због тога се посебно разматрају гранични случајеви x = 1 и x = 0.

Случај x = 1 значи да предузеће I увек бира стратегију обухвата дела фаза животног циклуса, односно да не користи мешовиту стратегију. Тада се у изразу за очекивани пораст профита уместо x ставља 1, а уместо (1 − x) нула, и проверава се да ли је та стратегија исплатива у односу на другу. Аналогно томе, случај x = 0 значи да предузеће I увек бира стратегију обухвата свих фаза животног циклуса, па се у формули уместо x ставља нула, а уместо (1 − x) јединица.

Ова два случаја се разматрају јер у равнотежи играч не сме имати мотив да пређе са једне чисте стратегије на другу. Тек након тога се посматра случај 0 < x < 1, који одговара мешовитој стратегији, где обе чисте стратегије дају исти очекивани пораст профита.

Дакле, за $x = 1$ имамо

$$1 \cdot x(1-y)(1-z) + 2 \cdot (1-x)yz \geq (1-y)(1-z),$$

а за $x = 0$ имамо

$$1 \cdot x(1-y)(1-z) + 2 \cdot (1-x)yz \geq 2yz.$$

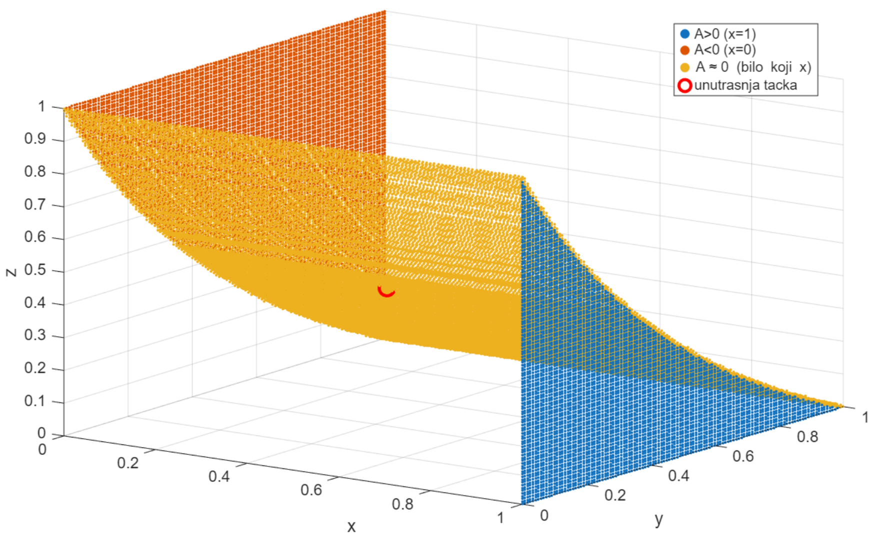
Сређивањем наведених неједнакости добија се систем:

$$\begin{aligned} &(x-1)(1-y-z-yz) \geq 0, \\ &x(1-y-z-yz) \geq 0. \end{aligned}$$

Решавањем система добијамо:

$$\begin{aligned} &x = 0, \qquad 1 \leq y + z + yz, \\ &0 < x < 1, 1 = y + z + yz \Rightarrow z = \frac{1-y}{1+y} \\ &x = 1, \qquad 1 \geq y + z + yz. \end{aligned}$$

Када се простор могућих стратегија прикаже у три димензије, осе x, y и z представљају вероватноће избора стратегије сваке од три предузећа, па су све дозвољене вредности ограничене интервалом од нуле до један. Зато се у тродимензионалном простору добија јединична коцка. Решења игре одређена су условом $1 - y - z - yz = 0$, који унутар коцке дефинише површ и садржи и симетричну тачку унутар коцке, у којој све три фирме користе исту мешовиту стратегију. Поред те унутрашње тачке, све тачке на рубу коцке које задовољавају услов такође представљају равнотежна решења, па оваквих решења има бесконачно много. Уколико не постоји договор између предузећа, могућ је прелазак из једне равнотежне тачке у другу, што доводи до нестабилности исхода, па је у оваквим ситуацијама договор међу предузећима пожељан.



Даље се не рачунају π_2 и π_3 зато што је игра потпуно симетрична у односу на сва три играча. Сва предузећа имају исте стратегије, исту структуру исплата и налазе се у истом положају на тржишту, па се изрази за очекивани пораст профита другог и трећег играча добијају на исти начин као и за првог, само заменом променљивих. Зато услови равнотеже који важе за π_1 важе и за π_2 и π_3, па није потребно понављати исти поступак три пута. Једном када се изведу услови за једног играча, решење важи симетрично за све играче.

На основу анализе мешовитих стратегија може се закључити да посматрана игра има бесконачно много равнотежних решења, што указује на то да не постоји јединствен исход који се природно намеће. У таквим условима, у одсуству било какве координације, предузећа могу често мењати своје стратегије и прелазити из једне равнотежне тачке у другу, што доводи до нестабилности и непредвидивости тржишних исхода. У пракси, ово не подразумева да се предузећа незаконито договарају, већ да се њихово понашање временом усмерава ка стабилнијим обрасцима кроз индиректну координацију, праћење понашања конкурената, тржишна правила и регулаторне оквире. Стога се резултат овог модела може тумачити као порука да, у ситуацијама у којима постоји више равнотежа, стабилност на тржишту настаје тек онда када се понашање предузећа на неки начин усклади, било кроз институционална правила, усвојене стандарде или понављање игре, а не нужно кроз експлицитан договор.

Производне стратегије за превласт на тржишту

3. Две фабрике индустријског уља, фабрика А и фабрика B, се боре за превласт на истом тржишту. Фабрике истовремено и независно унапред одређују количину индустријског уља коју ће произвести, при чему фабрика А производи количину Q_A, а фабрика B производи количину Q_B. Јединични трошак производње је исти за обе фабрике и износи c, где је c константа, па трошкови производње фабрике 1 износе $c \cdot Q_A$, а трошкови производње фабрике B $c \cdot Q_B$. Укупна количина која се пласира на тржишту је $Q = Q_A + Q_B$, а тржишна цена зависи од укупне понуђене количине, односно од Q. Одредити оптималну тржишну цену и количине производње тако да обе фабрике остварују профит.

Решење:

Укупна производња је $Q = Q_A + Q_B$. Цена производа износи $P(Q)$ и рачуна се по следећем правилу:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q, & 0 \leq Q \leq a \\ 0, & Q > a \end{cases}$$

односно $P(Q) = (a - Q)^{+}$, где је $a = \text{const}$.

Функција цене је дефинисана у овом облику јер представља поједностављен модел тражње на тржишту. За количине између 0 и a цена опада линеарно како укупна понуђена количина расте, што одражава чињеницу да већа понуда на тржишту доводи до нижих цена. Параметар a представља максималну цену коју су купци спремни да плате када је понуда занемарљиво мала. Уколико укупна количина пређе a, цена постаје нула јер тржиште више не може да апсорбује додатну количину производа по позитивној цени, па се вишак не може продати.

Запис $P(Q) = (a - Q)^{+}$ је скраћени начин да се исто правило искаже једном формулом, при чему знак „плус“ означава да се узима већа вредност између броја a − Q и нуле. Оваква функција цене омогућава једноставну аналитичку анализу и јасно показује утицај конкуренције на цену и профит.

Претпоставимо да, уколико се произведе више од a јединица производа, та разлика не може да се прода, па је остварена зарада једнака нули.

Ако узмемо да су Q_A и Q_B количине које ће свака од фабрика произвести, можемо их посматрати у интервалу $[0, \infty)$, али је реалније претпоставити да важи $Q_A, Q_B \in [0, a]$, јер се ни једној фабрици не исплати да производи више од a јединица. Претпоставићемо, дакле, да је $c < a$.

Профит који ће свака од фабрика остварити зависи од сопствене производње и производње конкурентне фабрике, односно од укупне количине производа која се појављује на тржишту:

$$u_A(Q_A, Q_B) = Q_A \cdot P(Q_A + Q_B) - cQ_A = Q_A(a - Q_A - Q_B)^+ - cQ_A$$

$$u_B(Q_A, Q_B) = Q_B \cdot P(Q_A + Q_B) - cQ_B = Q_B(a - Q_A - Q_B)^+ - cQ_B$$

Посматрамо монополистички случај, односно ситуацију када постоји само једна фабрика на тржишту ($Q_B = 0$).

Уколико прва фабрика произведе Q_A јединица производа, тада ће она остварити профит

$$u_A(Q_A) = Q_A(a - Q_A)^+ - cQ_A.$$

Монополиста жели да максимизује своју зараду. Поставља се питање колику количину производа монополиста треба да произведе како би зарада била максимална.

Прво, знамо да је $0 < Q_A < a$. Следи да важи

$$u_A(Q_A) = Q_A(a - c) - Q_A^2.$$

Извод профита по Q_Aје

$$u_A'(Q_A) = a - c - 2Q_A.$$

Постављањем услова максимума $u_A'(Q_A) = 0$ добијамо

$$Q_A = \frac{a - c}{2}.$$

Цена монополистичке производње износи

$$P\left(\frac{a - c}{2}\right) = a - \frac{a - c}{2} = \frac{a + c}{2},$$

односно профит фабрике је

$$u_A\left(\frac{a-c}{2}\right) = \frac{(a-c)^2}{4}.$$

Како да се пробијемо на монополистичком тржишту?

Посматрамо стратегију сваке фабрике и како изабрана стратегија утиче на конкурента. У том случају профитне функције су:

$$u_A(Q_A, Q_B) = Q_A(a - Q_A - Q_B) - cQ_A,$$
$$u_B(Q_A, Q_B) = Q_B(a - Q_A - Q_B) - cQ_B.$$

Из услова максимума добијамо:

$$\frac{\partial}{\partial Q_A} u_A(Q_A, Q_B) = a - 2Q_A - Q_B - c = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial Q_B} u_B(Q_A, Q_B) = a - Q_A - 2Q_B - c = 0.$$

Односно, решење система у ком обе фабрике имају максимални профит сугерише производњу:

$$Q_A^* = \frac{a-c}{3}, \quad Q_B^* = \frac{a-c}{3}.$$

У том случају остварује се профит:

$$u_A(Q_A^*, Q_B^*) = \frac{a-c}{3}\left(a - \frac{a-c}{3} - \frac{a-c}{3}\right) - c\,\frac{a-c}{3} = \left(\frac{a-c}{3}\right)^2,$$

а аналогно важи и за фабрику В.

Укупан профит обе фабрике износи:

$$u_A^* + u_B^* = 2\left(\frac{a-c}{3}\right)^2.$$

Поставља се питање да ли је зарада две фабрике у збиру већа од зараде коју би остварио монополиста.
Зарада монополисте износи:

$$\frac{(a-c)^2}{4},$$

што је мање од:

$$2\left(\frac{a-c}{3}\right)^2.$$

Уколико би фабрике међусобно сарађивале и понашале се као једна, оствариле би већу укупну зараду, а истовремено би производиле мању количину производа.

Посматрајмо сада како се мења цена производа. Цена код монополисте износи:

$$P = \frac{a+c}{2},$$

док је цена у случају дуопола нижа и износи:

$$P(Q_A^* + Q_B^*) = \frac{a+2c}{3}.$$

Дакле, дуопол је повољнији за купце због ниже цене, док је монополистичка производња повољнија за фабрике, јер доноси већу укупну зараду.

Шта ако се фабрике не могу договорити око количине коју ће производити?

Претпоставимо да фабрике не могу да се договоре око количине производа коју ће производити, већ да свака фабрика самостално одређује цену свог производа. У том случају конкуренција се више не одвија преко количина, већ преко цена.

Сада количина тражње зависи од цене производа и дата је функцијом:

$$Q(P) = \begin{cases} a-P, & 0 \leq P \leq a \\ 0, & P > a \end{cases}$$

односно

$$Q(P) = (a-P)^+,$$

где је $a = \text{const}$.

Подсетимо се да монополиста у овом случају поставља цену

$$P = \frac{a+c}{2}$$

и производи количину

$$Q = \frac{a-c}{2},$$

чиме остварује укупан профит

$$\frac{(a-c)^2}{4}.$$

Нека су цене по којима фабрике продају свој производ означене са P_Aи P_B. Уколико важи $P_A = P_B$, обе фабрике деле купце подједнако. Претпоставља се да је цена производње константна и иста код обе фабрике и износи c.

Профит по једном продатом производу износи $P_A - c$, односно $P_B - c$. Функције зараде за сваку фабрику дате су на следећи начин:

$$u_A(P_A, P_B) = \begin{cases} (P_A - c)(a - P_A)^+, & P_A < P_B, \\ \dfrac{(P_A - c)(a - P_A)^+}{2}, & P_A = P_B, \\ 0, & P_A > P_B, \end{cases}$$

$$u_B(P_A, P_B) = \begin{cases} (P_B - c)(a - P_B)^+, & P_B < P_A, \\ \dfrac{(P_B - c)(a - P_B)^+}{2}, & P_A = P_B, \\ 0, & P_B > P_A. \end{cases}$$

Задатак је да се одреди оптимална цена за обе фабрике.

Претпоставимо сада да фабрике не производе идентичне, већ сличне производе, али да је цена производње и даље идентична и износи c. Количина производа за производњу у том случају дата је функцијама:

$$Q_A(P_A, P_B) = (a - P_A + kP_B)^+,$$
$$Q_B(P_A, P_B) = (a - P_B + kP_A)^+,$$

где је k параметар који означава степен сличности између два производа.

Поново ћемо претпоставити да количина производа коју свака од фабрика може да произведе износи $x, y \in [0,\infty)$, односно да важи $Q_A, Q_B \in [0,\infty)$.

Профит фабрика одређује се по следећим формулама:

$$u_A(P_A, P_B) = Q_A(P_A, P_B)(P_A - c) = (a - P_A + kP_B)^+(P_A - c),$$
$$u_B(P_A, P_B) = Q_B(P_A, P_B)(P_B - c) = (a - P_B + kP_A)^+(P_B - c).$$

Да бисмо пронашли цене које максимизују профит обе фабрике, потребно је одредити оптималне цене P_A^*и P_B^*. У ту сврху решавамо систем диференцијалних једначина:

$$\frac{\partial}{\partial P_A} u_A(P_A, P_B) = a - 2P_A + kP_B + c = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial P_B} u_B(P_A, P_B) = a - 2P_B + kP_A + c = 0.$$

Решењем овог система добијају се оптималне цене:

$$P_A^* = P_B^* = \frac{a + c}{2 - k}.$$

Претпоставимо да се у фабрикама налазе „кртице“ и да, након што једна фабрика одлучи колику количину производа ће произвести, друга фабрика то сазна и реагује у своју корист.

Дакле, претпоставимо да ће прва фабрика произвести количину Q_A јединица производа, при чему је цена производње и даље константна и износи $c = \mathrm{const}$. Друга фабрика реагује тако што бира количину Q_Bу складу са реакционом функцијом:

$$Q_B(Q_A) = \frac{a - Q_A - c}{2}.$$

Профит који остварује прва фабрика у том случају износи:

$$u_A(Q_A, Q_B(Q_A)) = Q_A\left(a - Q_A - \frac{a - Q_A - c}{2}\right) - cQ_A = -\frac{1}{2}Q_A^2 + \frac{a - c}{2}Q_A.$$

Ова функција достиже максимум за:

$$Q_A^* = \frac{a - c}{2}.$$

За ову оптималну количину прве фабрике, друга фабрика остварује најбољи резултат производњом количине:

$$Q_B(Q_A^*) = \frac{a-c}{4}.$$

Како изгледа профит у овом случају?

$$u_A(Q_A^*, Q_B(Q_A^*)) = \frac{(a-c)^2}{8},$$
$$u_B(Q_A^*, Q_B(Q_A^*)) = \frac{(a-c)^2}{16}.$$

Дакле, прва фабрика има већи профит ако се одлучи за производњу количине Q_A^*. У том случају укупна производња износи:

$$Q_A^* + Q_B(Q_A^*) = \frac{a-c}{2} + \frac{a-c}{4} = \frac{3(a-c)}{4},$$

што је више од укупне количине која се добија када се фабрике договарају око производње, односно:

$$\frac{2(a-c)}{3}.$$

Са друге стране, укупна зарада у овом случају износи:

$$u_A + u_B = \frac{(a-c)^2}{8} + \frac{(a-c)^2}{16} = \frac{3(a-c)^2}{16},$$

што је мање од укупне зараде коју фабрике остварују када координишу производњу.

4. Нека је укупна цена производа 17 ($a = 17$). Израчунати оптималну количину за производњу ако су трошкови производње Q комада производа $Q + 9$. Одредити цену монопола и цену дуопола.

Решење:

Први корак у решавању овог задатка јесте одређивање функције цене, односно функције тражње на тржишту. Да би анализа била једноставна и прегледна, усваја се линеарна функција тражње најједноставнијег облика, $P(Q) = a - Q$, где параметар a представља максималну цену коју су потрошачи спремни да плате када је понуђена количина минимална. Ова претпоставка не ограничава општост закључака, већ омогућава да се јасно прикаже утицај количине производње и конкуренције на цену и профит, што је и основни циљ овог задатка.

Како је циљ сваке фирме максимизација профита, профит дефинишемо као разлику укупног прихода и укупних трошкова. Укупан приход добија се као производ цене и количине, односно $TR = P(Q) \cdot Q$, па је профит дат изразом $\pi(Q) = P(Q) \cdot Q - C(Q)$.

Када анализирамо монопол, полазимо од претпоставке да на тржишту постоји само једна фирма, која сама одређује укупну количину производње Q. Пошто не постоји конкуренција, одлука те фирме директно одређује и цену на тржишту.

Из првог корака већ имамо функцију цене:

$$P(Q) = a - Q,$$

где је у конкретном задатку $a = 17$.

Дати су и укупни трошкови производње:

$$C(Q) = Q + 9,$$

што значи да фирма има фиксни трошак 9 и константан маргинални трошак једнак 1.

Следећи корак је да формирамо функцију профита, јер је циљ монополисте да максимизује профит. Профит се дефинише као разлика укупног прихода и укупних трошкова:

$$\pi(Q) = TR(Q) - C(Q).$$

Укупан приход је једнак производу цене и количине:

$$TR(Q) = P(Q) \cdot Q = (17 - Q)Q.$$

Зато је профитна функција:

$$\pi(Q) = (17 - Q)Q - (Q + 9).$$

$$\pi(Q) = 17Q - Q^2 - Q - 9 = 16Q - Q^2 - 9.$$

Да бисмо нашли оптималну количину, тражимо максимум ове функције. То радимо тако што израчунамо први извод профита по Q и изједначимо га са нулом:

$$\pi'(Q) = \frac{d}{dQ}(16Q - Q^2 - 9) = 16 - 2Q.$$

Услов максимума је:

$$16 - 2Q = 0,$$

одакле следи оптимална количина производње:

$$Q_m^* = 8.$$

Када смо одредили оптималну количину, одговарајућу **монополску цену** добијамо тако што ту количину убацимо у функцију цене:

$$P_m = P(Q_m^*) = 17 - 8 = 9.$$

Дакле, у случају монопола фирма производи 8 јединица производа и продаје их по цени 9. Ова комбинација количине и цене обезбеђује максималан профит монополисте.

Пошто је $P(Q) = a - Q$, за $a = 17$ важи $P(Q) = 17 - Q$, а укупна количина је $Q = Q_A + Q_B$. Профит фабрике A је приход минус трошкови:

$$u_A(Q_A, Q_B) = Q_A \cdot P(Q_A + Q_B) - cQ_A = Q_A(17 - Q_A - Q_B) - 1 \cdot Q_A,$$

односно

$$u_A(Q_A, Q_B) = Q_A(16 - Q_A - Q_B).$$

Аналогно,

$$u_B(Q_A, Q_B) = Q_B(16 - Q_A - Q_B).$$

Сада тражимо максимум профита сваке фабрике по њеној количини. За фабрику A важи услов првог реда:

$$\frac{\partial}{\partial Q_A} u_A = 16 - 2Q_A - Q_B = 0,$$

па је оптимална количина производње фабрике А:

$$Q_A = \frac{16 - Q_B}{2}.$$

За фабрику B добијамо:

$$\frac{\partial}{\partial Q_B} u_B = 16 - Q_A - 2Q_B = 0 \Rightarrow Q_B = \frac{16 - Q_A}{2}.$$

Равнотежа је решење система ове две једначине. Због симетрије важи $Q_A^* = Q_B^*$. Нека је $Q_A^* = Q_B^* = q$. Тада:

$$q = \frac{16 - q}{2} \Rightarrow 2q = 16 - q \Rightarrow 3q = 16 \Rightarrow q = \frac{16}{3}.$$

Дакле,

$$Q_A^* = Q_B^* = \frac{16}{3}, \qquad Q^* = Q_A^* + Q_B^* = \frac{32}{3}.$$

Цена у дуополу је:

$$P^* = 17 - \frac{32}{3} = \frac{19}{3}.$$

Поређењем цена добијамо да важи:

$$P_D = \frac{19}{3} < P_M = 9.$$

Конкуренција између фирми доводи до веће укупне производње и ниже цене у односу на монопол. Монопол је повољнији за произвођача, јер омогућава постављање више цене и остваривање већег профита, док је дуопол повољнији за потрошаче, пошто конкуренција снижава цену и повећава доступност производа.

5. Посматра се тржиште на коме цене производа опадају линеарно са повећањем укупне количине производа. Нека две фабрике производе исти производ. Прва фабрика производи количину s, а друга фабрика количину t, тако да је укупна количина на тржишту једнака: $q = s + t$.

Цена производа зависи од укупне количине и дата је функцијом: $p = 20 - 2(s + t)$

Трошкови производње за обе фабрике су линеарни и износе $c_1(s) = 4s$ за прву фабрику и $c_2(t) = 4t$ за другу фабрику.

Претпоставља се да прва фабрика прва бира количину производње, док друга фабрика након тога посматра ту одлуку и бира своју количину као најбољи одговор. Одредити оптималне количине производње, цену производа и профите обе фабрике, и дати економску интерпретацију резултата.

Решење:

Профит прве фабрике једнак је укупном приходу умањеном за трошкове производње:

$$\pi_1(s,t) = ps - c_1(s) = (20 - 2(s + t))s - 4s.$$

Сређивањем добијамо:

$$\pi_1(s,t) = (16 - 2t)s - 2s^2.$$

Аналогно, профит друге фабрике је:

$$\pi_2(s,t) = pt - c_2(t) = (20 - 2(s + t))t - 4t,$$

односно

$$\pi_2(s,t) = (16 - 2s)t - 2t^2.$$

Пошто друга фабрика доноси одлуку након што прва фабрика изабере количину s, она бира количину t тако да максимизује свој профит за дато s. Услов максимума добијамо из првог извода профита по t:

$$\frac{\partial}{\partial t}\pi_2 = 16 - 2s - 4t = 0.$$

Решавањем ове једначине добијамо реакциону функцију друге фабрике:

$$t = b(s) = 4 - \frac{1}{2}s.$$

Прва фабрика, знајући како ће друга фабрика реаговати, бира количину s тако да максимизује сопствени профит. Зато у њену профитну функцију убацујемо реакциону функцију друге фабрике:

$$\pi_1(s, b(s)) = (16 - 2(4 - \frac{1}{2}s))s - 2s^2.$$

Сређивањем добијамо:

$$\pi_1(s, b(s)) = 8s - s^2.$$

Да бисмо одредили оптималну количину прве фабрике, изводимо ову функцију по s и постављамо услов максимума:

$$\frac{d}{ds}\pi_1 = 8 - 2s = 0,$$

одакле следи:

$$s^* = 4$$

За ову оптималну количину прве фабрике, друга фабрика ће произвести:

$$t^* = b(s^*) = 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

Укупна количина на тржишту је:

$$q^* = s^* + t^* = 6,$$

па је цена производа:

$$p^* = 20 - 2 \cdot 6 = 8.$$

Профит прве фабрике у равнотежи износи:

$$\pi_1^* = (16 - 2 \cdot 2) \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 = 16,$$

док је профит друге фабрике:

$$\pi_2^* = (16 - 2 \cdot 4) \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 = 8.$$

Из добијених резултата види се да фабрика која прва доноси одлуку о количини производње остварује већи профит у односу на фабрику која реагује након ње. Разлог је у томе што прва фабрика може да „искористи“ предвидиво понашање друге фабрике и да своју одлуку прилагоди тако да максимизује сопствени профит.