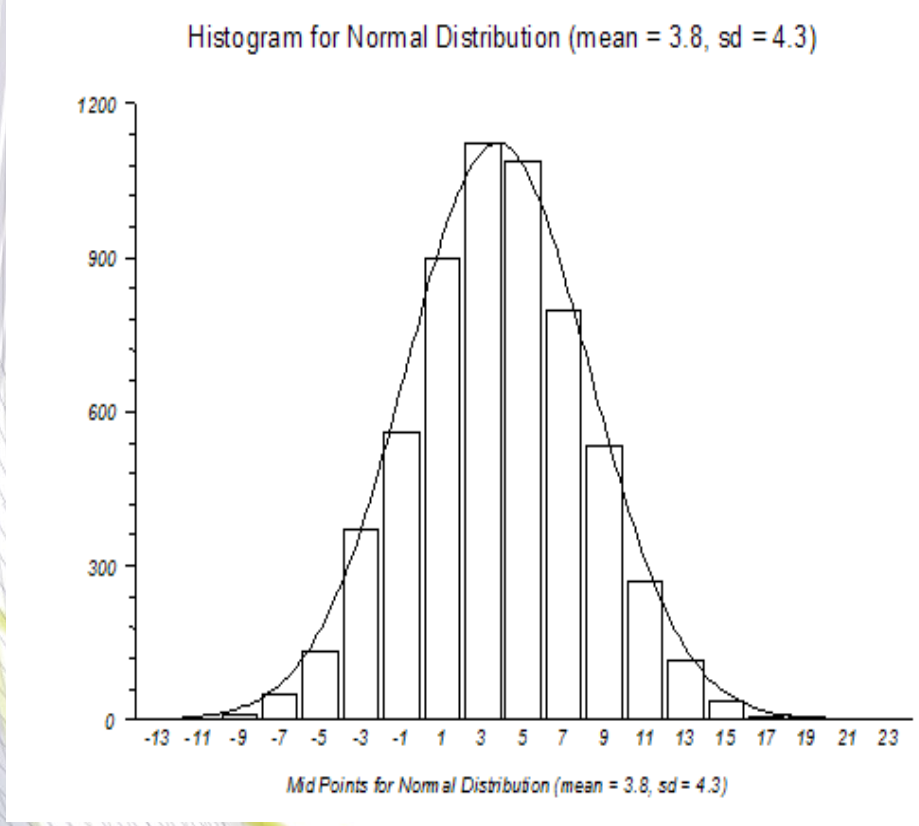
Инжењерска статистика
Вежба 3

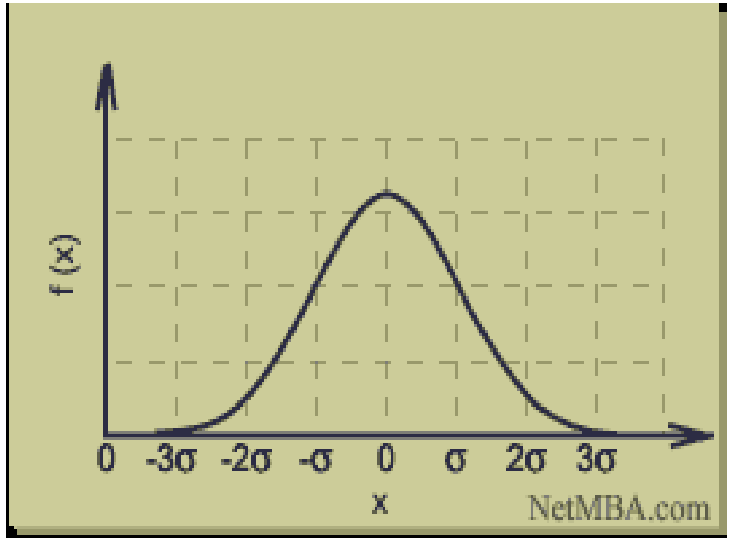
Нормална расподела - подсећање

$$F(X) = N\left(\mu, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < X < \infty$$



Стандардизована нормална расподела

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N\left(0, 1^2\right)$$



Стандардизована нормална расподела – Правила за коришћење таблица

а) $P(Z < 3.64) = 0.9998636$

б) $P(Z < -0.86) = 0.19489$

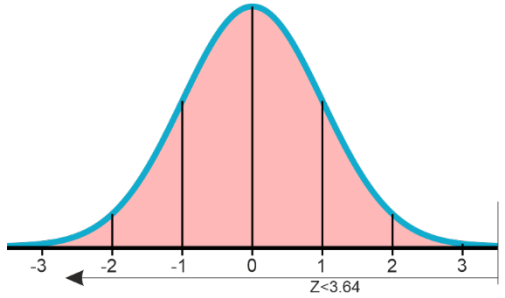
в) $P(Z > 1.26) = 1 - P(Z < 1.26) = P(Z < -1.26) = 0.10383$

г) $P(Z > -1.37) = P(Z < 1.37) = 0.91466$

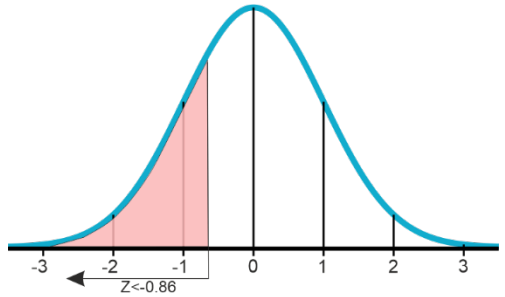
д) $P(-1.25 < Z < 0.37) = P(Z < 0.37) - P(Z < -1.25) = 0.6443087 - 0.1056498 = 0.53866$

е) $P(Z < u) = 0.975 \Rightarrow u = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$

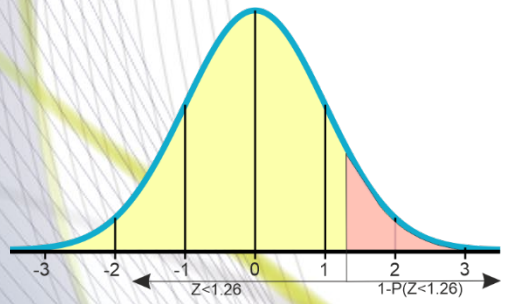
а)



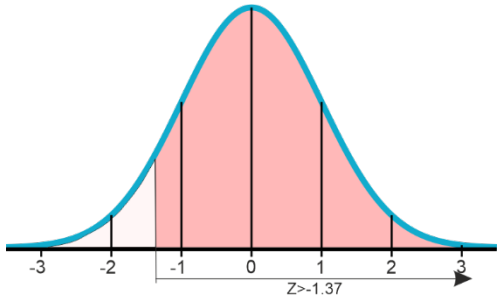
б)



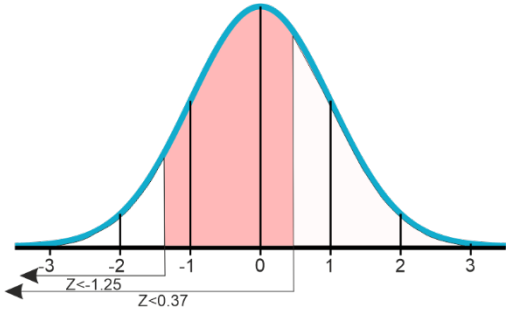
в)



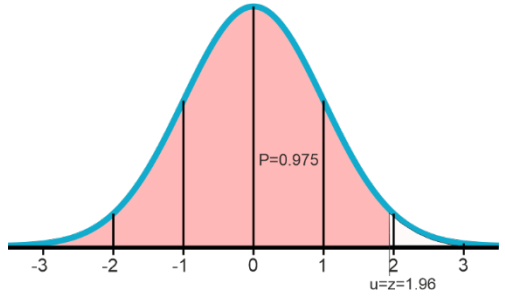
г)



д)



е)



Задатак 1

Претпоставља се расподела случајне променљиве, која одговара нормалној, са средином 10 и варијансом 4.

Испитати вероватноћу да се вредност нађе у област већој од броја 13, и вероватноћу да се вредност нађе у области између бројева 9 и 11?

$$x \sim N\left(10, 2^2\right)$$

$$P(X > 13) = P\left(Z > \frac{13-10}{2}\right) = P(Z > 1.5) =$$

$$= 1 - P(Z < 1.5) = 0.06681$$

$$P(9 < X < 11) = P\left(\frac{9-10}{2} < Z < \frac{11-10}{2}\right) =$$

$$= P(-0.5 < Z < 0.5) = P(Z < 0.5) - P(Z < -0.5) =$$

$$= P(Z < 0.5) - \left[1 - P(Z < 0.5)\right] = 2 \cdot P(Z < 0.5) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0.69146 - 1 = 0.3892$$

Пример – стандардизована нормална расподела

Користећи таблицу за нормалну расподелу по густини пронаћи:

а) $P(Z > 1.43) = 0.0763586$

б) $P(Z < -2.48) = 0.0065691$

в) $P(Z > -2.73) = 0.9968332$

г) $P(Z \notin (-2.07, 1.15)) = 0.1442981$

д) $\Phi^{-1}(0.040) = -1.75$

е) $\sigma(24, 4.2^2), P(x < 23) = 0.4051652$

Статистике - подсећање

Нумеричке мере које описују карактеристике узорка, односно популације, називају се статистике и деле се на:

- Мере локације података
  - Аритметичка средина
  - Медијана
  - Мода
  - Квартил (перцентил, децимил)
- Мере варијације података
  - Ранг
  - Варијанса
  - Стандардна девијација

Пример

Студент се припрема за испит радећи 10 рокова од претходних година. Максималан број бодова који се може добити на испиту је 20. Његови резултати дати су ниже. Израчунати просечан број поена, одредити медијану и модус и вредност 1. и 3. квартила

14 16 14 17 16 20 17 18 20 14

Аритметичка средина:

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(14 + 16 + \cdots + 20 + 14) = \frac{166}{10} = 16.6$$

Медијана: 14, 14, 14, 16, 16, 17, 17, 18, 20, 20

$$\mathrm{Me} = \frac{16 + 17}{2} = 16{,}5$$

Модус: 14, 14, 14, 16, 16, 17, 17, 18, 20, 20

3x14

Квартил: $\mathrm{Q1} = P(25\%) = \frac{25}{100} * 10 = 2{,}5$ $\mathrm{Q3} = P(75\%) = \frac{75}{100} * 10 = 7{,}5$

$\mathrm{Q1} = 14$ $\mathrm{Q3} = 18$

Пример

На основу података датих у табели израчунајте , $\bar{x}$, Mo и Me, 7. децимил и утврди да ли важи једнакост: $\bar{x}$=Mo=Me.

Zarada u 1000	15	19	20	25	28	30	35	40	∑
Број запослених	8	10	7	15	18	15	13	11	97

Аритметичка средина:

$$\bar{x} = \frac{1}{97}(8 * 15 + 10 * 19 + \cdots + 13 * 35 + 11 * 40) = \frac{2674}{97} = 27{,}57$$

Медијана:

$$Me = x_{\frac{97+1}{2}} = x_{49} = 28$$

Модус:

$$Mo = 28$$

Децимил:

$$\mathrm{D7} = P(70\%) = \frac{70}{100} * 97 = 67{,}9$$

$$\mathrm{D7} = 30$$

Пример

За претходна 2 примера израчунати варијансу и стандардну девијацију.

П1: $\bar{x}$=16.6

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1} \qquad n < 30$$

$$s^2 = \frac{1}{10-1}\left[(14-16{,}6)^2 + (16-16{,}6)^2 \ldots + (14-16{,}6)^2\right] = 5{,}16$$

$$S = \sqrt{5.16} = 2.27$$

П2: $\bar{x}$=27.57

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} f_i \cdot \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \qquad n \geq 30$$

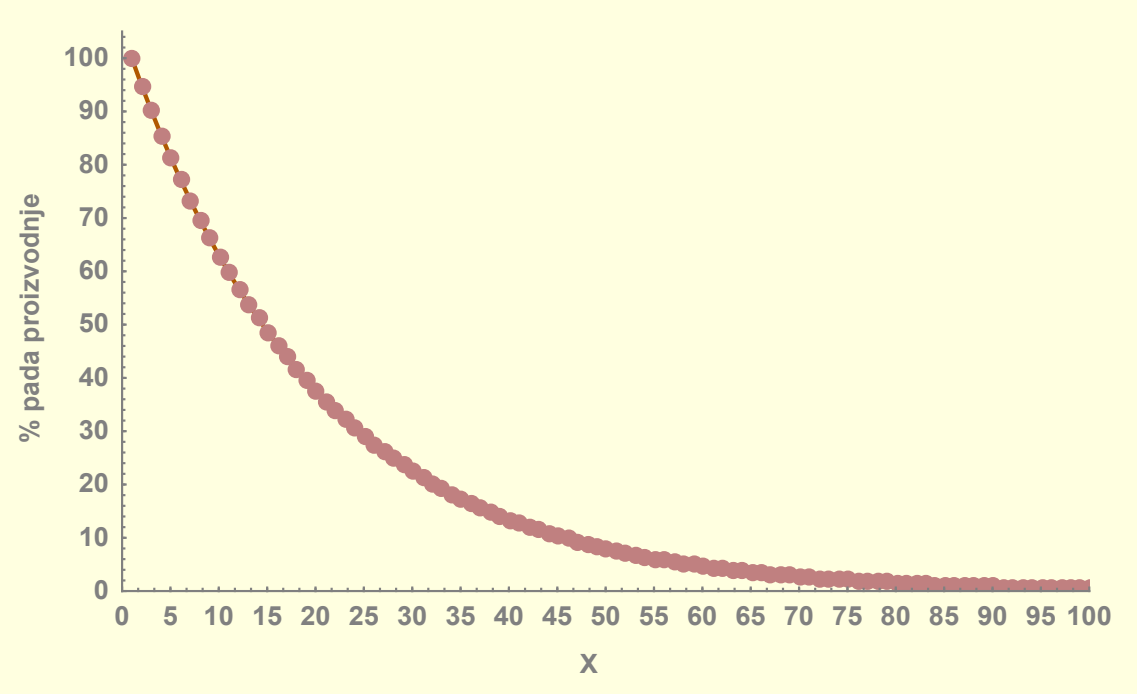
$$s^2 = \frac{1}{97}\left[8*(15-27.57)^2 + 10*(19-27.57)^2 \ldots + 11*(40-27.57)^2\right] = 51.63$$

$$S = \sqrt{51.63} = 7.18$$

Пример

Утврђено не да производња у фабрици континуално опада за 5% годишње. Колико година се може очекивати да фабрика опстане у раду, са оваквим падом производње?

У питању је експоненцијална функција расподеле са $\lambda = 0.05$ па је њена функција густине: $f(x) = 0.05e^{-0.05x}$



$$E(X) = \int_a^b xf(x)dx = \int_0^{+\infty} 0.05xe^{-0.05x}dx = \lim_{B\to+\infty}\int_0^B 0.05xe^{-0.05x}dx$$

$$E(X) = \lim_{B\to+\infty}\left\{-0.05\left[e^{-0.05x}(20x+400)\right]\Big|_0^B\right\} =$$

$$= 0.05\cdot 400 = 20$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.05} = 20 \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{0.05^2} = 400$$

Фабрика може да опстане још 20 година.

Самостални задатак Д2

a) Користећи таблицу за нормалну расподелу по густини пронаћи вредности за одговарајући додељени задатак са списка окаченог на сајту предмета

b) За популацију датој у Самосталном задатку 1 израчунати:
   a) Средњу аритметичку вредност
   b) Медијану
   c) Модус
   d) 64. Перцентил
   e) Стандардну девијацију