Poglavlje 3.
Merenje neizvesnosti

dr Đorđe Nikolić, redovni profesor
E-mail: djnikolictfbor@gmail.com

16. oktobar 2023. godine

Ciljevi poglavlja

- Koncept verovatnoće,
- Diskretna distribucija verovatnoće
- Normalna distribucija verovatnoće

Preporučena literatura

- Radojević, S, Veljković Z, Kvantitativne metode, CD, MF,
- Montgomery, DC, Runger, GC Applied Statistics and Probability for Engineers, Fourth Edition, Wiley, 2007.

Koncept verovatnoće

- U praksi koriste se različite operativne definicije verovatnoće:
  - Subjektivne verovatnoće

$$\text{Verovatnoća (događaja A)} = \frac{\text{Broj mogućih rezultata pri kojima se realizuje događaj A}}{\text{Ukupan broj mogućih rezultata}}$$

  - Objektvine verovatnoće:
    - Bacanje novčića
    - Bacanje kockice
    - Špil karata i sl.

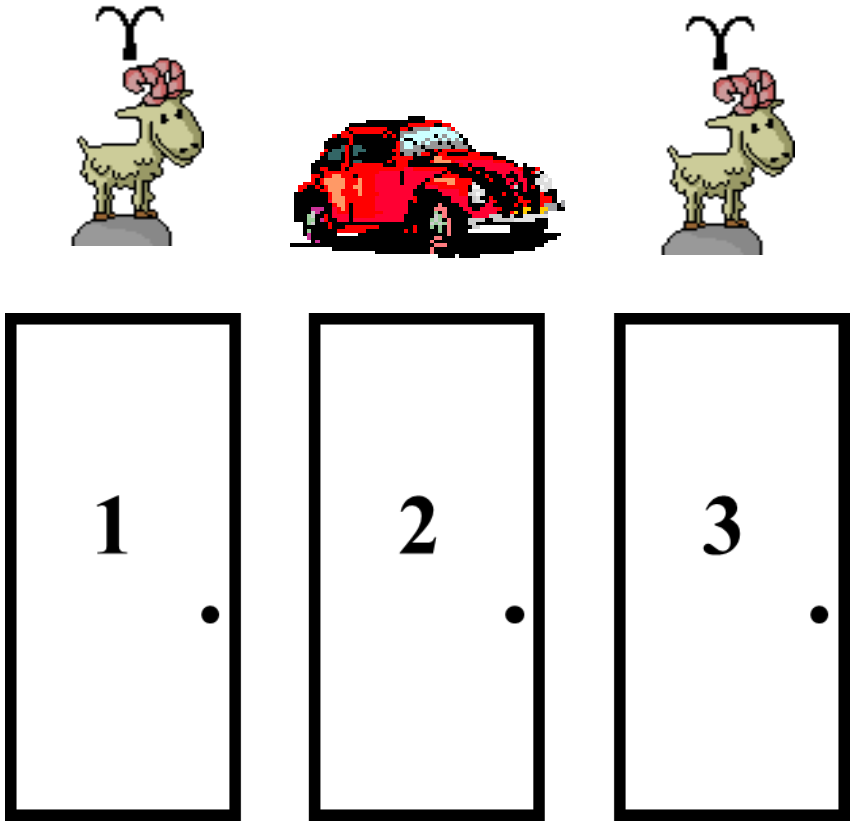
Koncept verovatnoće

- Opšta pravila:

1. Verovatnoća događaja se nalazi u opsegu od 0 do1
2. Ukoliko je nešto izvesno ima verovatnoću 1
3. Ukoliko dva ili više različitih okolnosti ne mogu da se dese istovremeno, onda je suma verovatnoća pojedinih događaja jednaka 1.

Određivanje verovatnoća

- ***Monty Hall problem***



Monty Hall show

Određivanje verovatnoća

Na fakultetu studira 100 studenata na master akademskim studijama, od kojih 20 studenata sluša polazni kurs iz predmeta Inženjerska statistika. Od ovih 20 studenta, 5 njih je uključeno na polaznom kursu Operaciona istraživanja. Takođe, ima i dodatnih 25 studenata koji slušaju Operaciona istraživanja ali ne slušaju Inženjersku statistiku.

a) Ukoliko se nasumično izabere jedan student ovog fakulteta, koja je verovatnoća da je student ili samo na premetu Operaciona istraživanja ili samo na predmetu Inženjerska statistika, ali ne i na oba?

b) Ukoliko se nasumično izabere jedan student ovog fakulteta, koja je verovatnoća da je student na predmetu Operaciona istraživanja?

c) Ukoliko se nasumično izabere jedan student ovog fakulteta, koja je verovatnoća da je student na predmetu Inženjerska statistika?

d) Ukoliko se nasumično izabere jedan student ovog fakulteta, koja je verovatnoća da student pohađa oba predmeta, i Operaciona istraživanja i Inženjersku statistiku?

e) Ukoliko se nasumično izabere jedan student ovog fakulteta, za koga se utvrdi da pohađa predmet Inženjerska statistika, koja je verovatnoća da ovaj student takođe pohađa i predmet Operaciona istraživanja ?

Odlučivanje na bazi verovatnoća

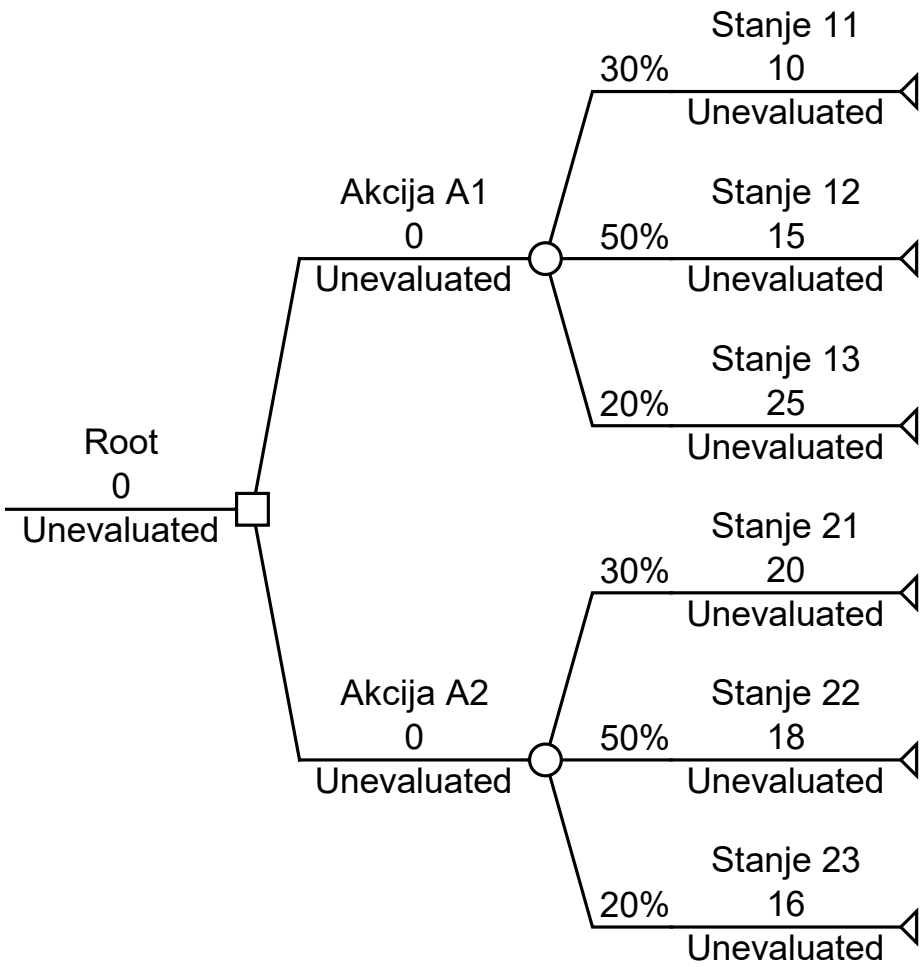
Nemački proizvođač automobila trenutno proizvodi svoj najbolje prodavani američki model u Nemačkoj. Međutim, relativna snaga Eura u odnosu na američki dolar, čini ovaj model automobila veoma skupim na tržištu na kome se takmiči. Kako bi obezbedila nižu i stabilniju cenu, kompanija razmatra mogućnost proizvodnje ovog modela za američko tržište u jednoj od svojih pogona u Južnoj Americi. Problem odlučivanja je sumiran na sledeći način:

- **Alternative:** 1) Nastaviti proizvodnju automobila za američko tržište u fabrici u Nemačkoj; 2) Započeti proizvodnju automobila za američko tržište u postrojenju u Južnoj Americi.
- **Moguća stanja:** Procenjeno je da u naredne dve godine, relativna snaga američkog dolara u odnosu Euro biti: 1) slaba; 2) umerena; ili 3) jaka.
- **Verovatnoće događaja:** Ekonomisti ove kompanije su procenili da će verovatnoće relativne snage dolara biti: 0.3 (slaba); 0.5 (umerena) i 0.2 (jaka).
- **Ishodi:** Procenjeni profit za ovaj model automobila direktno će zavisiti od alternative koja bude odabrana, kao i stanja koje će se odigrati. Očekuje se da ukoliko kompanija odluči da i dalje model proizvodi u Nemačkoj, profit kompanije u sva tri slučaja bude 10, 15, i 25 miliona dolara za svaki mogući događaj, respektivno. Takođe, procenjeno je da kompanija može da ostvari profit od 20, 18, 16 miliona dolara, za svaki događaj respektivno, ukoliko menadžment kompanije odluči da proizvodnju preseli u Južnu Ameriku.

Tabela odlučivanja

Stanja Alternative	Stanje S_1	Stanje S_2	Stanje S_3
Alternativa A_1	10 mil.$	15 mil.$	25 mil.$
Alternativa A_2	20 mil.$	18 mil.$	16 mil.$
Verovatnoća pj	0.3	0.5	0.2

Drvo odlučivanja



Decision Pro Software

Očekivana vrednost

- Ukoliko su poznate vrednosti ishoda događaja i njihove verovatnoće može se izračunati očekivana vrednost (OV):

$$OV(x) = \sum p(x) \cdot x;$$

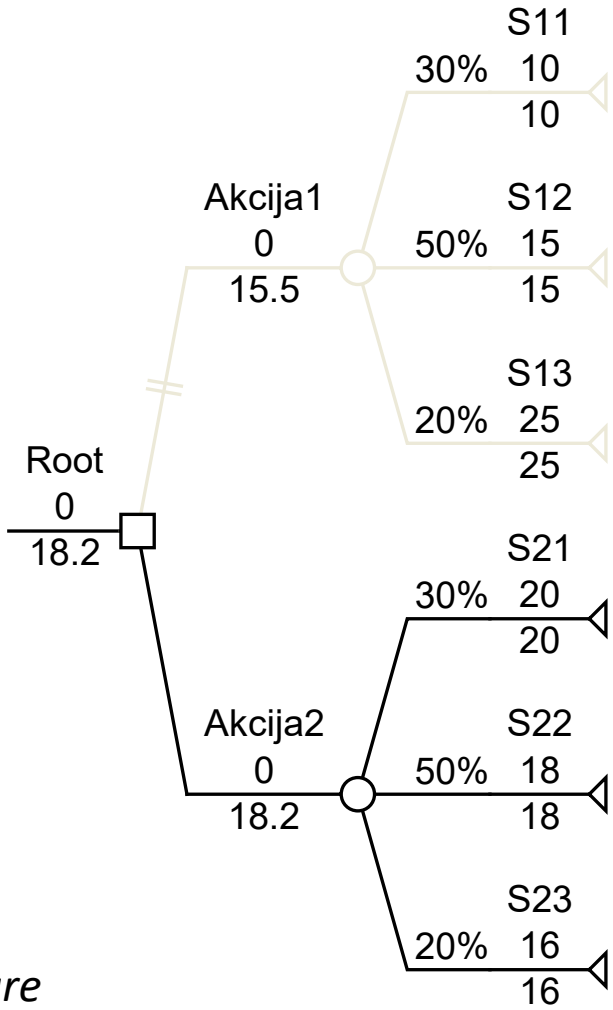
Odlučivanje u uslovima rizika

Metoda maksimalne očekivane vrednosti (MONV) preko Tabele odlučivanja

Stanja / Alternative	Stanje S_1	Stanje S_2	Stanje S_3	$ONV(Ai)=\Sigma p_j * v_{ij}$	$MONV(Ak)=max_i\{ONV(A_i)\}$
Alternativa A_1	10 mil.$	15 mil.$	25 mil.$	0.3*10+0.5*15+0.2*25 =15.5 mil.$	
Alternativa A_2	20 mil.$	18 mil.$	16 mil.$	0.3*20+0.5*18+0.2*16 =18.2 mil.$	A2(18.2 mil.$)
Verovatnoća pj	0.3	0.5	0.2		

Odlučivanje u uslovima rizika

- *Metoda maksimalne očekivane vrednosti (MONV) preko Drveta odlučivanja*



Decision Pro Software

Bayes-ova formula

- Bajesova teorema će biti predstavljena u kontekstu mogućih događaja S_j (j=1...n), i biće korišćena za transformaciju polaznih (a priori) verovatnoća razmatranih događaja S_j, pod uslovom da se realizuje neki dopunski događaj ili informacija X, u korigovane (a posteriori) verovatnoće istih događaj S_j.
- Dakle, razmatra se skup mogućih disjunktnih događaja Sj (j=1...n), pri čemu jedan od razmatranih događaja mora se realizovati u budućnosti (Σ_j p(Sj)=1), kao i da pojava jednog događaja isključuje pojavu ostalih ($Si \cap Sj$; i,j=1...n i $i \neq j$). Posmatra se i događaj X, koji se može javiti samo ako se javi neki od događaja S_j , onda verovatnoća javljanja nekog stanja S_j (j=1..n), pod uslovom da se događaj X već realizovao, može se računati uz pomoć Bajesove teoreme na sledeći način:

$$p(Sj \mid X) = \frac{p(Sj) \cdot p(X \mid Sj)}{p(X)} = \frac{p(Sj) \cdot p(X \mid Sj)}{\sum_{j=1}^{n} p(Sj) \cdot p(X \mid Sj)}; \qquad j = 1 \ldots n$$

Primena Bayes-ove formule

Predpostavimo da na prvoj godini master akademskih studija na MF studira 100 studenata, od čega su 60% muškarci, a 40% devojke. Studentkinje nose farmerice i suknje u podjednakom broju, dok svi muškarci nose farmerice.

Neutralni posmatrač posmatra studenta iz ove grupe sa veće distance i jedino što može da vidi je da ta osoba nosi farmerice. Koja je verovatnoća da je osoba koju je video studentkinja, a kolika je verovatnoća da je osoba student?

Primena Bayes-ove formule

Пример 2-Решење:

Da bismo primenili Bayes-ovu teoremu potrebno je da znamo sledeće:

- Neka je S1 stanje da je posmatrana osoba ženskog pola, S2 stanje da je posmatrana osoba muškog pola, a stanje X1 (informacija) da posmatrana osoba nosi farmerice.

- p(S1)=0.4=40% - verovatnoća da je osoba ženskog pola bez obzira na ostale informacije (a priori verovatnoća).
- p(S2)=0.6=60% - verovatnoća da je osoba muškog pola bez obzira na ostale informacije (a priori verovatnoća).
- p(X1|S1)=0.5=50% - verovatnoća da je osoba nosi farmerice ako samo posmatramo grupu studentkinja (uslovna verovatnoća).
- p(X1|S2)=1=100% - verovatnoća da je osoba nosi farmerice ako samo posmatramo grupu studenata (uslovna verovatnoća).
- p(X1)=0.8=80% - verovatnoća da je osoba nosi farmerice bez obzira na ostale informacije (zajednička verovatnoća).

$$p(X_1) = p(S_1) \cdot p(X_1|S_1) + p(S_2) \cdot p(X_1|S_2) = 0.4 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 1 = 0.8$$

Primena Bayes-ove formule

Na osnovu ovih polaznih informacija, primenjuje se Bayes-ova formula:

- Verovatnoća da je osoba koju je posmatrač video studentkinja:

$$p(S_1|X_1) = \frac{p(S_1)\cdot p(X_1|S_1)}{p(X_1)} = \frac{0.4\cdot 0.5}{0.8} = \frac{0.2}{0.8} = 0.25 = 25\%$$

- Verovatnoća da je osoba koju je posmatrač video student:

$$p(S_2|X_1) = \frac{p(S_2)\cdot p(X_1|S_2)}{p(X_1)} = \frac{0.6\cdot 1}{0.8} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75 = 75\%$$

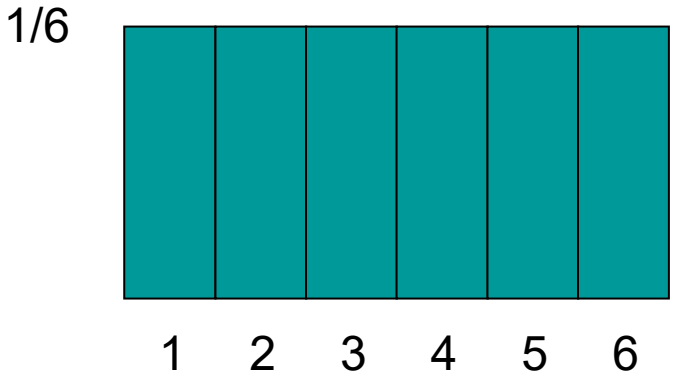
Diskretna distribucija verovatnoće

- Neki od primera distribucija:
  - Uniformna distribucija
  - Binomna distribucija
  - Poasonova distribucija

Uniformna distribucija

Ova distribucija opisuje situacije u kojima su svi ishodi jednako verovatni, npr. to je pretpostavka o "poštenom novčiću" ili špilu karata.

Za bacanje kockice, grafikon bi izgledao ovako:



Binomna distribucija

U mnogim situacijama varijabla od interesa ima samo odgovor tipa da/ne, npr. manjkav ili nemanjkav, student ili nestudent. Pretpostavke pri primeni binomne distribucije:

- postoje 2 ishoda za svako ispitivanje (npr. da ili ne)
- verovatnoća za „da” (ili uspeha) ne menja se od pokušaja do pokušaja (svaki je pokušaj nezavisan)

Binomna distribucija

Uzorak od 2 pokušaja

Pretpostavimo da imamo dva pokušaja sa verovatnoćom uspeha (p) = 0.2 i verovatnoćom neuspeha (q) = 0.8

Moguća su 4 ishoda:

2 uspeha	(0.2)x(0.2)=0.04	p^2	p^2	P(2S)
Uspeh praćen neuspehom	(0.2)x(0.8)=0.16	pq	2pq	P(1S)
Neuspeh praćen uspehom	(0.8)x(0.2)=0.16	qp		
2 neuspeha	(0.8)x(0.8)=0.64	q^2	q^2	P(0S)

Kako redosled nije bitan, imamo

Binomna distribucija

Uzorak od 3 pokušaja

Može se kreirati sličan šablon za uzorak od 3 pokušaja, pri tome, koristeći S za uspeh i F za neuspeh:

S,S,S	(0.2)x(0.2)x(0.2)=0.008	p^3	p^3	P(3S)
S,S,F	(0.2)x(0.2)x(0.8)=0.032	p^2q		
S,F,S	(0.2)x(0.8)x(0.2)=0.032	pqp	$3p^2q$	P(2S)
F,S,S	(0.8)(0.2)(0.2)=0.032	qp^2		
	(0.8)x(0.8)x(0.2)=0.128	q^2p	$3pq^2$	P(1S)
F,S,F	(0.8)x(0.2)x(0.8)=0.128	qpq		
S,F,F	(0.2)x(0.8)x(0.8)=0.128	pq^2		
F,F,F	(0.8)x(0.8)x(0.8)=0.512	q^3	q^3	P(0S)

Koristeći oznake p i q, imamo:

Kako redosled nije bitan, imamo

Binomna distribucija

Trebalo bi uočiti šablon u ovim rezultatima.

Takođe, izazov će biti određivanje koliko načina postoji za postizanje 1, ili 2, ili 3 itd. uspeha u određenom broju pokušaja.

Odgovor leži u primeni formule za izračunavanje KOMBINACIJA

- n = broj pokušaja
- r = broj uspeha

a broj načina biranja r iz n je:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Gde je n! faktorial: n! = nx(n-1)x(n-2)…….3x2x1

Na primer, broj načina za postizanje 3 uspeha u 10 pokušaja je:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times(7\times6\times5\times4\times3\times2\times1)} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$$

Binomna distribucija

Opšta formula za binomne rapodele je:

$$P(r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

Ova formula obračunava verovatnoću r uspeha u n pokušaja, uzimajući u obzir osnovne uslove binomne raspodele.

Dostupne su i verovatnosne tablice za proračun verovatnoća ili se mogu koristiti i specijalizovani programi.

Poasonova distribucija

Postoje dve situacije koje Poissonova distribucija modeluje posebno dobro:

- Postoje slučajevi kada možemo da brojimo samo broj sa karakteristikom, a ne i one bez, npr. broj automobila koji dolaze na raskrsnicu ili broj kupaca u redu.
- Postoji veći broj ispitivanja ali relativno mala verovatnoća određene karakteristike, npr. veći broj komponenti u kutijama sa samo malom šansom da je neka neispravna (Poissonova aproksimacija Binomne raspodele)

Poasonova distribucija

Poasonova distribucija je u potpunosti definisana prosekom.

Ako su poznati samo broj pokušaja (n) i verovatnoća (p), možemo raditi sa očekivanom vrednošću n × p:

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Gde je λ (lambda) prosečna vrednost (očekivana vrednost).

Poasonova distribucija

Primer 1.

Pretpostavimo da u proseku 4 automobila stignu na parking supermarketa svakog minuta. Kolika je verovatnoća da 5 ili više njih stigne u sledećem minutu?

P(5 ili više) = 0.3712

Ova cifra se može izračunati ili uzeti iz tabela.

Poasonova distribucija

Primer 2.

Pretpostavimo da se artikli isporučuju u kutijama od po 1000 komada. Evidencija pokazuje da je u proseku broj oštećenih artikala po kutiji 2 komada.

Korišćenjem formule Poasonove distribucije moguće je izračunati verovatnoću da će broj oštećenih artikala biti veći od proseka:

$$P(0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = \frac{1 \times 0.1353}{1} = 0.1353$$

$$P(1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = \frac{2 \times 0.1353}{1} = 0.2706$$

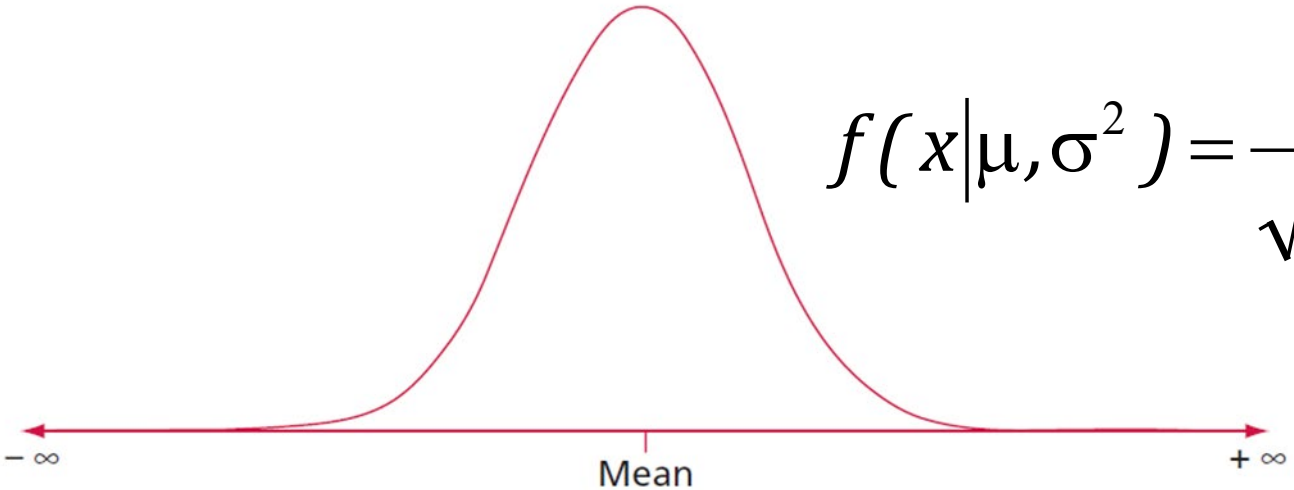
$$P(2) = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = \frac{4 \times 0.1353}{2} = 0.2706$$

P(2 or manje)=P(0)+P(1)+P(2)=0.6765
Dakle, P(više od 2) = 1 – 0.6765 = 0.3235

Dakle, verovatnoća da će biti više oštećenih predmeta od proseka je nešto više od 32%.

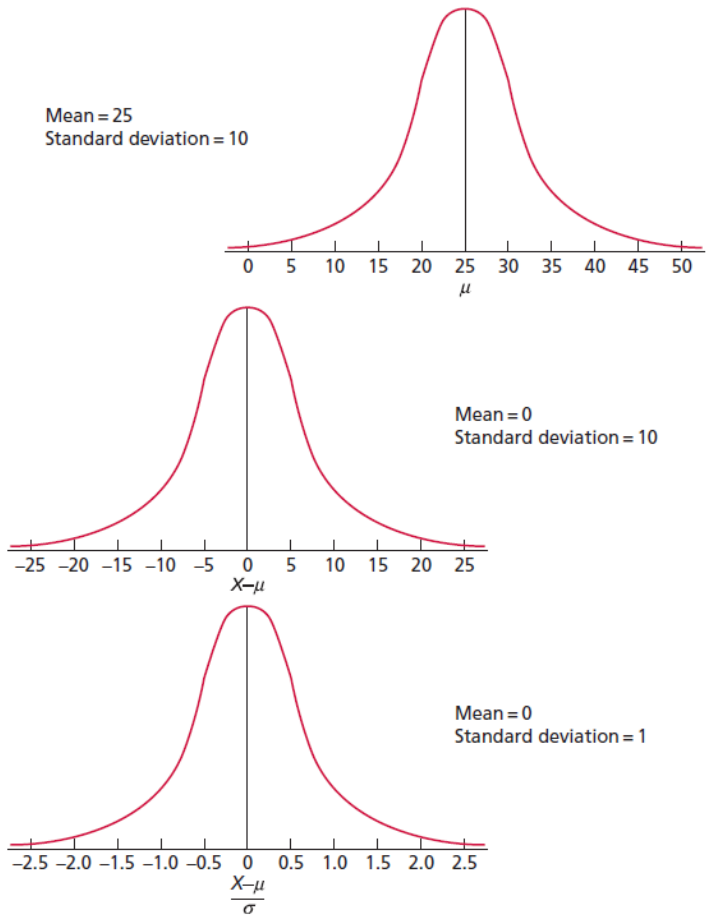
Normalna distribucija

- Normalna distribucija verovatnoće ili normalna raspodela predstavlja neprekidnu funkciju distribucije vrednosti, pri čemu je centrirana u odnosu na srednju vrednost i čije prostiranje zavisi od standardne devijacije,
- Normalnom raspodelom moguće je opisati različite poslovne i priorodne fenomene,
- Formirana je simetrično u obliku zvona i predstavlja osnovu za formiranje različitih statističkih modela.



$$f(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Normalna distribucija



Standardna normalna distribucija

Postoji mnogo različitih normalnih distribucija opisanih različitim vrednostima srednje vrednosti i standardne devijacije. Međutim, sve se one mogu transformisati u **standardnu normalnu distribuciju.**

Normalna distribucija

Z-vrednosti

Verovatnoće su prikazane u tabeli za standardnu normalnu distribuciju i mogu se naći za bilo koju normalnu distribuciju izračunavanjem z-vrednosti:

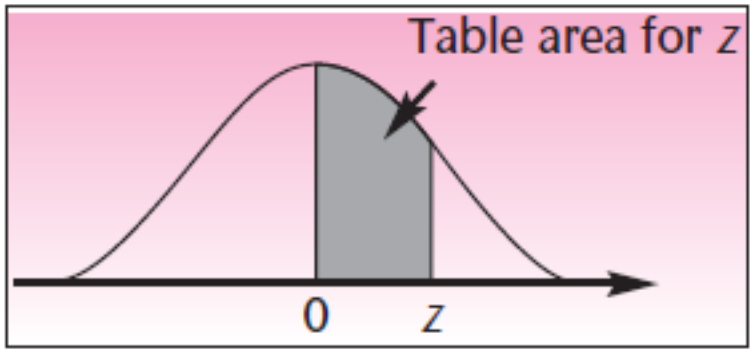
$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$$

Z-vrednost je mera udaljenosti pojedinog rezultata od aritmetičke sredine izražena u standardnim devijacijama

Normalna distribucija

Verovatnoće

Ukupna površina ispod normalne distribucije je 1. Možemo koristiti tabele da pronađemo oblasti verovatnoće za određene z-vrednosti



Označena površina za vrednost z ≤1 iznosi 34.13%. To znači da je verovatnoća za dobijanje vrednosti manje od 1σ iznad aritmetičke sredine 0.3413.

Takođe, moglo bi se reći da je procenat distribucije između z = -1 i z = +1 iznosi 68.26%

	Second Decimal Place in z									
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817

Rezime poglavlja

- Pitanja?
- Diskusija!