Potpuni i delimični faktorijelni planovi - tradicionalni pristup

Osnove su joj u Analizi varijanse. To je najviši nivo statističkog istraživanja je *planiranje eksperimenata* - DOE (Design Of Experiments). Kod DOE, statističke metode se koriste u eksperimentu u svim njegovim fazama, počev od planiranja, pripreme, sprovođenja i praćenja, pa do analize i postanalize podataka u cilju dobijanja relevantnih zaključaka. jedan od najefikasnijih načina eksperimentisanja. Važnost ove tehnike naglo je porasla sa potrebom za optimizacijom proizvodnih procesa i poboljšanjem nivoa kvaliteta.

Preko DOE se posmatra ponašanje sistema. Ulazne promenljive, koje se namerno variraju tokom eksperimenta nazivaju se *nezavisne* ili *kontrolisane promenljive* ili *faktori*.

Na sistem tokom eksperimenta deluju i nepredviđeni uticaji koji se nazivaju *slučajni* ili nekontrolisani faktori. Karakteristike sistema se nazivaju i *parametrima sistema*.

Izlazi iz sistema nazivaju se *izlaznim promenljivim* ili *rezultujućim parametrima* i one su *zavisne promenljive*.

Promenljive u sistemu mogu biti kontinualne ili diskretne. U okviru ovog predmeta se rade samo su *kontinualne promenljive*.

Predpostavke:

- svi faktori su slučajno raspoređeni po normalnoj raspodeli sa sredinom 0 i varijansom σ^2 i
- eksperimentalna greška je nazavisno i slučajno raspoređena po normalnoj raspodeli sa sredinom 0 i varijansom σ^2.

Dalje pretpostavke koje se odnose na posmatrane eksperimentalne planove su:

- svi faktori su fiksni i
- eksperimenti su balansirani.

U današnje vreme, kada su informacija i njen kvalitet na prvom mestu, u prednosti DOE ubrajaju se povećanje efikasnosti dobijanja informacija o nekom proizvodu preko:

- povećanje preciznosti informacija,
- mogućnost optimizacije procesa i ponašanja sistema primenom statističkih metoda,
- mogućnost preciznijeg izražavanja realnih uslova u prirodi preko apstraktnih matematičkih modela i
- mogućnost istovremenog merenja i ispitivanja uticaja više faktora i njihovih interakcija koji deluju na sistem.

Osnovne principe DOE postavio je još Fisher (Fišer) 1930.-tih godina i to su tri ključna principa:

- *replikacija*, odnosno broj ponavljanja u okviru svakog nivoa svakog od faktora
- *randomizacija*, odnosno slučajni redosled sprovođenja eksperimenata tj. replikacija i

- *blokiranje* ili grupisanje eksperimentalnog materijala u cilju povećanja njegove homogenosti. (*ne radi se u okviru ovog kursa*)

Randomizacija i replikacija su dva neophodna uslova za validni statistički planirani eksperiment.

U slučaju da postoji samo 1 replikacija u pitanju su nereplikovani eksperimenti za koje postoji preko 15 metoda rešavanja.

Potpuni faktorijelni eksperimenti

Potpuni faktorijelni plan eksperimenta podrazumeva plan preko koga se ispituju sve kombinacije svih nivoa faktora u cilju određivanja njihovih glavnih efekata i svih njihovih interakcija.

Kod klasičnih faktorijelnih eksperimenata najčešće se isptuju faktori sa 2 nivoa, s obzirom da se mogu predstaviti preko matrica. U okviru svake kombinacije tretmana postoji određeni broj od ***n*** ponavljanja, odnosno *replikacija*.

Osnovna prednost faktorijelnih eksperimenata je u tome da se njima ispituju uticaji kako njihovih *glavnih efekata*, tako i njihovih *interakcija*.

U pripremi eksperimenta se za svaki faktor i interakciju koja se ispituje postavlja sistem hipoteza. Nulta hipoteza pretpostavlja da efekti faktora ili interakcije nisu značajni. Alternativna hipoteza pretpostavlja da su efekti faktora ili interakcija značajni. To znači da se na početku eksperimenta *pretpostavlja jednaka verovatnoća uticaja pojedinih faktora i njihovih interakcija*.

Glavni efekti faktora obeležavaju se velikim slovima abecede, odnosno sa A, B, C.... Interakcije se obeležava velikim slovima abecede fakora koji je čine.

Način obeležavanja nivoa faktora nije isti za sve planove, odnosno razlikuje se od broja nivoa koje imaju faktori u planu.

Faktori na 2 nivoa

U slučaju da faktori imaju dva nivoa postoji nekoliko konvencija za njihovo obeležavanje, i to su:

- Fišerova, po kojoj se donji nivo faktora označava sa "-", a gornji sa "+",
- "-1", za donji nivo faktora, "+1" za gornji nivo faktora i
- "0" za donji i "1" za gornji nivo faktora.

Matrice kod 2^k planova (k je broj faktora) imaju 2^k vrsta i kolona, pri čemu prva kolona u matrici može biti izostavljena. Ova kolona se naziva i kolonom identiteta i kod nje su sve oznake nivoa faktora "+1" ili "+", odnosno svi nivoi su gornji. Koristi se 2^{k-1} kolona.

To znači da svaka kolona predstavlja *kontrast*, pri čemu su svi kontrasti međusobno ortogonalni, tako da su njihove osobine:

- svaka kolona ima isti broj znakova "-" i "+",
- bilo koja kolona pomnožena sa elementom identiteta ostaje nepromenjena i
- proizvod bilo koje dve kolone (osim elementa identiteta) daje neku treću kolonu eksperimentalnog plana.

Analiza eksperimentalnih rezultata

Način analize podataka koji se razmatraju je:

- određivanje sume kvadrata efekta (kolona) preko obrasca

$$SK_{EF_i} = \frac{(EF_i)_1^2 + \ldots + (EF_i)_s^2}{2^k n} - \frac{T^2}{N},$$

  gde su: **SK_{EF}** suma kvadrata **i**-tog efekta, **2** broj nivoa faktora, **n** broj replikacija u okviru pojedinih kombinacija tretmana,**T** suma svih opservacija u eksperimentu i **N** ukupni broj merenja u eksperimentu;
- određivanje sume kvadrata totala **SK_T;**
- određivanje sume kvadrata greške **SK_e**, kada se od **SK_T** oduzmu sve sume kvadrata efekata;
- određivanje odnosa suma kvadrata pojedinih efekata i sume kvadrata greške u odnosu na teorijske vrednosti Fisher-ovog testa, odnosno kada je efekat značajan važi:

$$F = \frac{SS_{EF_i}}{SS_e} >> F_{0.05, n_{EF}, n_e}$$

Najmanji eksperimentalni plan je 2^2 i sadrži dva glavna efekta faktora i jednu dvofaktorsku interakciju.

Za planove 2^k, broj stepeni slobode koji se odnosi na glavne efekte faktora je 1. To za posledicu ima da je i broj stepeni slobode interakcijskih kolona uvek jedan.

U potpunim faktorijelnim planovima na dva nivoa glavni efekti faktora zauzimaju tačno određene kolone. Na primer, prvi faktor zauzima prvu, drugi drugu, treći četvrtu, peti osmu kolonu. Kolone u potpunom eksperimentalnom planu koje sadrže glavne efekte faktora su *bazične kolone*.

Nivoi faktora u potpunom faktorijelnom planu 2^k su tako raspoređeni da formiraju planove kod kojih je moguće proširivanje na veće bez izmene samih planova. To znači da, na osnovu 2^2, proširenjem se dobija 2^3, proširenjem 2^3 dobija se 2^4..., proširenjem 2^{k-1} dobija se 2^k.

Na ovaj način je omogućeno *sekvencijalno ili fazno eksperimentisanje*, odnosno sprovođenje eksperimeta sa manjim brojem faktora u prvoj fazi, a potom, u drugoj ili nekoj kasnijoj fazi uključivanje i novih faktora u eksperiment, bez poremećaja prvobitno dobijenih rezultata.

Primer, bez kolone identiteta, sa proširenjima sa menjeg plana na veći prikazan je u Tabeli.

	2^4														
	2^3							deo proširenja							
	2^2			deo proširenja											
	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1
2	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1
5	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1
6	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1
7	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1
10	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
11	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
12	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1
13	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
14	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1
15	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1
16	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Broj efekata u eksperimentalnom planu

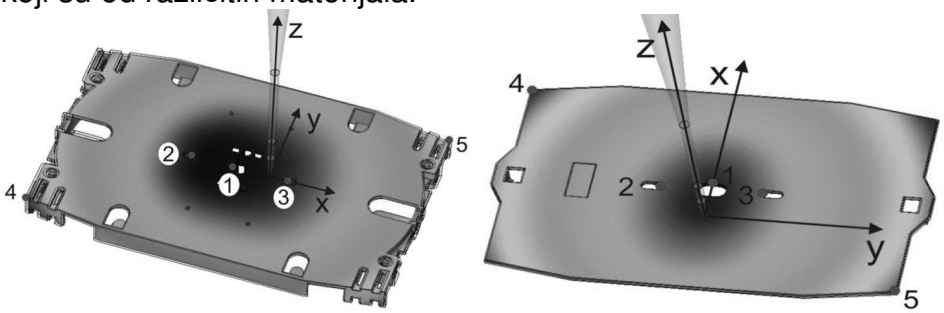
Ukupni broj efekata u potpunom faktorijelnom planu 2^k je:

$$N = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = 2^n - 1$$

Prikaz veličina ortogonalnih matrica za potpune eksperimentalne planove koji sadrže do 10 faktora dati su u Tabeli

i	dimenzije	klasični	baz. kol.	faktori
2	$(2^2-1)\times 2^2 = 3\times 4$	2^2	1,2	A, B
3	$(2^3-1)\times 2^3 = 7\times 8$	2^3	4	C
4	$(2^4-1)\times 2^4 = 15\times 16$	2^4	8	D
5	$(2^5-1)\times 2^5 = 31\times 32$	2^5	16	E
6	$(2^6-1)\times 2^6 = 63\times 64$	2^6	32	F
7	$(2^7-1)\times 2^7 = 127\times 128$	2^7	64	G
8	$(2^8-1)\times 2^8 = 255\times 256$	2^8	128	H
9	$(2^9-1)\times 2^9 = 511\times 512$	2^9	256	J
10	$(2^{10}-1)\times 2^{10} = 1023\times 1024$	2^{10}	512	K

Primer 1. Sproveden je potpuni faktorijelni eksperiment za proizvodnju dva spoljna dela razvodnika optičkih kablova (slika), koji se proizvode metodom brizganja plastike - kućišta i poklopca koji su od različitih materijala.



(a) (b)

kućište i poklopac

Isptivani faktori su geometrija, proces i materijal, od kojih svaki ima po dva nivoa

Faktor	skrac.		nivo1	nivo2
Geometrija	G	A	kućište	poklopac
Proces	P	B	Proces 1	Proces 2
Material	M	C	PC/ABC Grade C2800	Terluran, GP35

Eksperiment je sproveden na slučajan način i sadrži tri replikacije. Nakon sprovedenog eksperimenta merena su geometrijska odstupanja (sakupljanje i širenje) u tački 4, koja je najudaljenija od tačke brizganja i gde su geometrijske deformacije najveće.

Postavljanje eksperimenta

	A	***B***	***AB***	***C***	***AC***	***BC***	***ABC***
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	1	-1	1	-1	1	-1	1
3	-1	1	1	-1	-1	1	1
4	1	1	-1	-1	1	1	-1
5	-1	-1	-1	1	1	1	1
6	1	-1	1	1	-1	1	-1
7	-1	1	1	1	1	-1	-1
8	1	1	-1	1	-1	-1	1

Sprovođenje eksperimenta....

Eksperimentalni rezultati

	A	***B***	***AB***	***C***	***AC***	***BC***	***ABC***	y_1	y_2	y_3	$\sum y$
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0.579	0.549	0.588	1.716
2	1	-1	1	-1	1	-1	1	0.546	0.502	0.45	1.498
3	-1	1	1	-1	-1	1	1	0.573	0.599	0.595	1.767
4	1	1	-1	-1	1	1	-1	0.509	0.487	0.512	1.508
5	-1	-1	-1	1	1	1	1	0.615	0.589	0.667	1.871
6	1	-1	1	1	-1	1	-1	0.499	0.573	0.513	1.585
7	-1	1	1	1	1	-1	-1	0.614	0.708	0.697	2.019
8	1	1	-1	1	-1	-1	1	0.556	0.508	0.445	1.509
										T	13.47

Analiza eksperimentalnih rezultata

T iz tabele,

$$N = 3 \cdot 8 = 24$$

$$SK_T = \left(0.579^2 + \cdots + 0.445^2\right) - \frac{13.47^2}{24}$$

$$SK_A = \frac{1.716^2 + \ldots + 1.509^2}{2^3 \cdot 3} - \frac{13.47^2}{24} \text{ .... } SK_{ABC}$$

$SK_e = SK_T - SK_A - SK_B - \ldots - SK_{ABC}$

Izvor	*SK*	*f*	*OV*	*F*	*p nivo*	napomena
A	0.068	1	0.068	45.12	0	***
B	7E-04	1	7E-04	0.493		n.z.
C	0.01	1	0.01	6.823	0.019	*
AB	0.003	1	0.003	1.955		n.z.
AC	0.004	1	0.004	2.833		n.z.
BC	5E-06	1	5E-06	0.003		n.z.
ABC	0.001	1	0.001	0.932		n.z.
e	0.024	16	0.001		$F_{0.05,1,16}$	4.494
T	0.111	23				

n.z. - nije značajno, *** nivo značajnosti <0.001, *-nivo značajnosti<0.05

Faktori na tri nivoa

Kod potpunih faktorijelnih planova, za faktore na tri nivoa, broj kombinacija glavnih efekata je 3^k. Nivoi faktora su obeleženi sa 0, 1 i 2. Svaki glavni efekat faktora ima 2 stepena slobode. Broj stepeni slobode vezan za efekat interakcije je

$$f_{\underbrace{ABC\ldots}_{m}} = 2 \cdot m$$

gde su **f** broj stepeni slobode i **m** broj faktora u interakciji. U faktorijelnom eksperimentu broj stepeni slobode vezan za faktorijelne efekte je

$$f_{EF} = 3^k - 1$$

Analiza 3^k planova se radi preko Yates-ovih (Jets) komponenti **I** i **J,** a ukupan broj elemenata koje je potrebno izračunati za formiranje potpunog eksperimentalnog plana je

$$N = \sum_{i=1}^{k} \left(2^{i-1} \binom{k}{i} \right) = \left[\frac{3^k}{2} \right]$$

Potpuni eksperimentalni plan na tri nivoa sa 2 faktora

Potpuni 3^2 plan je predviđen za 2 faktora **A** i **B**. Prilikom dobijanja eksperimentalnih rezultata, osim efekata glavnih faktora dobija se i efekat interakcije. Ovaj efekat interakcije se dobija na osnovu dve komponente **I** i **J**, odnosno dobijaju se komponente **AB** and **AB²** dvofaktorske intrakcije. To znači, da je potrebno dobiti ukupno 4 efekta.

Ukoliko se rezultati 3^2 plana predstave preko kombinacije nivoa glavnih efekata faktora Dobija se tabela:

		B		
		0	**1**	**2**
A	**0**	y_{00}	y_{01}	y_{02}
	1	y_{10}	y_{11}	y_{12}
	2	y_{20}	y_{21}	y_{22}

Sume kvadrata glavnih efekata su

$$SS_A = \frac{1}{3n}\left[\left(y_{00}+y_{01}+y_{02}\right)^2+\left(y_{10}+y_{11}+y_{12}\right)^2+\left(y_{20}+y_{21}+y_{22}\right)^2\right]-\frac{T^2}{9n}$$

$$SS_B = \frac{1}{3n}\left[\left(y_{00}+y_{10}+y_{20}\right)^2+\left(y_{01}+y_{11}+y_{21}\right)^2+\left(y_{02}+y_{12}+y_{22}\right)^2\right]-\frac{T^2}{9n}$$

Da bi se dobili delovi interakcije **AB** i **AB²**, (koje je Yates označio kao **J** i **I** komponente interakcije), prvom metodom koji se razmatra, koriste se dva nadređena Latinska kvadrata, koji su međusobno ortogonalna

J		B		
		0	**1**	**2**
A	**0**	Q	R	S
	1	S	Q	R
	2	R	S	Q

i

I		B		
		0	**1**	**2**
A	**0**	Q	R	S
	1	R	S	Q
	2	S	Q	R

Odgovarajuće sume kvadrata su

$$SS_{AB_J=AB} = \frac{1}{3n}\left[\left(y_{00}+y_{12}+y_{21}\right)_Q^2+\left(y_{01}+y_{10}+y_{22}\right)_R^2+\left(y_{02}+y_{11}+y_{20}\right)_S^2\right]-\frac{T^2}{9n}$$

$$SS_{AB_I=AB^2} = \frac{1}{3n}\left[\left(y_{00}+y_{11}+y_{22}\right)_Q^2+\left(y_{01}+y_{12}+y_{20}\right)_R^2+\left(y_{02}+y_{10}+y_{21}\right)_S^2\right]-\frac{T^2}{9n}$$

sa rezultujućim efektom

$$SS_{AB} = SS_{AB_J} + SS_{AB_I}$$

Za potpuni 3^3 faktorijelni plan, bazične kolone sa faktorima A, B i C 1, 2 i 5 su lako je, dok se interakcije rade prekoo Yates-ovih komponenti

Dvofaktorske interakcije se dobijaju kao kod 3^2 samo puta 3 (za sve 3 dvofaktorske interakcije)

Za trofaktorsku interakciju se koriste Yates-ovie komponente **W**, **X**, **Y** i **Z** od po dva stepena slobode.

C	B	A 1	A 2	A 3		I		J	
	1	y_{111}	y_{211}	y_{311}	$Q_{(C=1)}=1$	$y_{111}+y_{221}+y_{331}$	K_1	$y_{111}+y_{231}+y_{321}$	E_1
1	2	y_{121}	y_{221}	y_{321}	$R_{(C=1)}=2$	$y_{121}+y_{231}+y_{311}$	L_1	$y_{121}+y_{211}+y_{331}$	F_1
	3	y_{131}	y_{231}	y_{331}	$S_{(C=1)}=3$	$y_{131}+y_{211}+y_{321}$	M_1	$y_{131}+y_{221}+y_{311}$	G_1
	1	y_{112}	y_{212}	y_{312}	$Q_{(C=2)}=1$	$y_{112}+y_{222}+y_{332}$	K_1	$y_{112}+y_{232}+y_{322}$	E_1
2	2	y_{122}	y_{222}	y_{322}	$R_{(C=2)}=2$	$y_{122}+y_{232}+y_{312}$	L_1	$y_{122}+y_{212}+y_{332}$	F_1
	3	y_{132}	y_{232}	y_{332}	$S_{(C=2)}=3$	$y_{132}+y_{212}+y_{322}$	M_1	$y_{132}+y_{222}+y_{312}$	G_1
	1	y_{113}	y_{213}	y_{313}	$Q_{(C=3)}=1$	$y_{113}+y_{223}+y_{333}$	K_1	$y_{113}+y_{233}+y_{323}$	E_1
3	2	y_{123}	y_{223}	y_{323}	$R_{(C=3)}=2$	$y_{123}+y_{233}+y_{313}$	L_1	$y_{123}+y_{213}+y_{333}$	F_1
	3	y_{133}	y_{233}	y_{333}	$S_{(C=3)}=3$	$y_{133}+y_{213}+y_{323}$	M_1	$y_{133}+y_{223}+y_{313}$	G_1

Na osnovu prvog koraka dobija se sistem Latinskih kvadrata

I		I(AB) 1	I(AB) 2	I(AB) 3
C	1	K_1	L_1	M_1
	2	K_2	L_2	M_2
	3	K_3	L_3	M_3

i

J		J(AB) 1	J(AB) 2	J(AB) 3
C	1	E_1	F_1	G_1
	2	E_2	F_2	G_2
	3	E_3	F_3	G_3

U drugom koraku se na osnovu komponenti **I** i **J** interakcije AB vrši podela svake na nove dve komponente **I** i **J** koristeći interakciju AB u kombinaciji sa faktorom C. Tada se dobijaju **IxI**, **IxJ**, **JxI** and **JxJ:**

	$I[I(AB)xC]$	AB^2C^2
Q(1)	$K_1+L_2+M_3$	$y_{111}+y_{122}+y_{133}+y_{213}+y_{221}+y_{232}+y_{312}+y_{323}+y_{331}$
R(2)	$K_2+L_3+M_1$	$y_{112}+y_{123}+y_{131}+y_{211}+y_{222}+y_{233}+y_{313}+y_{321}+y_{332}$
S(3)	$K_3+L_1+M_2$	$y_{113}+y_{121}+y_{132}+y_{212}+y_{223}+y_{231}+y_{311}+y_{322}+y_{333}$

	$J[I(AB)xC]$	AB^2C
Q(1)	$K_1+L_3+M_2$	$y_{111}+y_{123}+y_{132}+y_{212}+y_{221}+y_{233}+y_{313}+y_{322}+y_{331}$
R(2)	$K_2+L_1+M_3$	$y_{112}+y_{121}+y_{133}+y_{213}+y_{222}+y_{231}+y_{311}+y_{323}+y_{332}$
S(3)	$K_3+L_2+M_1$	$y_{113}+y_{122}+y_{131}+y_{211}+y_{223}+y_{232}+y_{312}+y_{321}+y_{333}$
	$J[J(AB)xC]$	ABC
Q(1)	$E_1+F_3+G_2$	$y_{111}+y_{123}+y_{132}+y_{213}+y_{222}+y_{231}+y_{312}+y_{321}+y_{333}$
R(2)	$E_2+F_1+G_3$	$y_{112}+y_{121}+y_{133}+y_{211}+y_{223}+y_{232}+y_{313}+y_{322}+y_{331}$
S(3)	$E_3+F_2+G_1$	$y_{113}+y_{122}+y_{131}+y_{212}+y_{221}+y_{233}+y_{311}+y_{323}+y_{332}$
	$I[J(AB)xC]$	ABC^2
Q(1)	$E_1+F_2+G_3$	$y_{111}+y_{122}+y_{133}+y_{212}+y_{223}+y_{231}+y_{313}+y_{321}+y_{332}$
R(2)	$E_2+F_3+G_1$	$y_{112}+y_{123}+y_{131}+y_{213}+y_{221}+y_{232}+y_{311}+y_{322}+y_{333}$
S(3)	$E_3+F_1+G_2$	$y_{113}+y_{121}+y_{132}+y_{211}+y_{222}+y_{233}+y_{312}+y_{323}+y_{331}$

Ovo su konačni rezultati delova interakcija, na osnovu kojih se formiraju odgovarajuće sume kvadrata. Rezultujuće sume kvadrata za pojedine elemente trofaktorske interakcije su

$$SS_{J[J(AB)\times C]}=\frac{1}{3n}\left[\begin{array}{l}(y_{111}+y_{123}+y_{132}+y_{213}+y_{222}+y_{231}+y_{312}+y_{321}+y_{333})^2+\\(y_{112}+y_{121}+y_{133}+y_{211}+y_{223}+y_{232}+y_{313}+y_{322}+y_{331})^2+\\(y_{113}+y_{122}+y_{131}+y_{212}+y_{221}+y_{233}+y_{311}+y_{323}+y_{332})^2\end{array}\right]-\frac{T^2}{9n}=SS_{12}$$

$$SS_{I[J(AB)\times C]}=\frac{1}{3n}\left[\begin{array}{l}(y_{111}+y_{122}+y_{133}+y_{212}+y_{223}+y_{231}+y_{313}+y_{321}+y_{332})^2+\\(y_{112}+y_{123}+y_{131}+y_{213}+y_{221}+y_{232}+y_{311}+y_{322}+y_{333})^2+\\(y_{113}+y_{121}+y_{132}+y_{211}+y_{222}+y_{233}+y_{312}+y_{323}+y_{331})^2\end{array}\right]-\frac{T^2}{9n}=SS_{10}$$

$$SS_{J[I(AB)\times C]}=\frac{1}{3n}\left[\begin{array}{l}(y_{111}+y_{123}+y_{132}+y_{212}+y_{221}+y_{233}+y_{313}+y_{322}+y_{331})^2+\\(y_{112}+y_{121}+y_{133}+y_{213}+y_{222}+y_{231}+y_{311}+y_{323}+y_{332})^2+\\(y_{113}+y_{122}+y_{131}+y_{211}+y_{223}+y_{232}+y_{312}+y_{321}+y_{333})^2\end{array}\right]-\frac{T^2}{9n}=SS_{13}$$

$$SS_{I[I(AB)\times C]}=\frac{1}{3n}\left[\begin{array}{l}(y_{111}+y_{122}+y_{133}+y_{213}+y_{221}+y_{232}+y_{312}+y_{323}+y_{331})^2+\\(y_{112}+y_{123}+y_{131}+y_{211}+y_{222}+y_{233}+y_{313}+y_{321}+y_{332})^2+\\(y_{113}+y_{121}+y_{132}+y_{212}+y_{223}+y_{231}+y_{311}+y_{322}+y_{333})^2\end{array}\right]-\frac{T^2}{9n}=SS_{9}$$

To dovodi do sume kvadarta trofaktorske interakcije oblika:

$$
\begin{aligned}
SS_{ABC} &= SS_{J[J(AB)\times C]} + SS_{I[J(AB)\times C]} + SS_{I[I(AB)\times C]} + SS_{J[I(AB)\times C]} = \\
&= SS_{ABC} + SS_{ABC^2} + SS_{AB^2C^2} + SS_{AB^2C} = \\
&= SS_9 + SS_{10} + SS_{12} + SS_{13}
\end{aligned}
$$

YATES-OVE KOMPONENTE FUNKCIONIŠU SAMO KADA JE BROJ NIVOA PROST BROJ, t.j. za 2,3,5,9,11...

Delimični faktorijelni planovi za faktore na 2 nivoa

Problem kod potpunih faktorijelnih eksperimenata PFP je u tome da se samo mali broj kombinacija tretmana se odnosi na glavne faktore i interakcije niskog reda.

Na primer, 2^7 faktorijelni eksperiment ima ukupno 128 kombinacija tretmana, od kojih se 7 odnose na glavne faktore, a 21 na interakcije dva faktora, dok se preostalih 100 kombinacija tretmana odnosi na interakcije trećeg i višeg reda.

Osnovna ideja delimičnih faktorijelnih planova (DFP) eksperimenata je dobijanje neophodnih informacija kroz manji broj merenja, svesnim žrtvovanjem drugih informacija koje su od manjegznačaja. Kod DFP eksperimenata interakcije višeg reda u PFP se zamenjuju novim faktorima. Na taj način se povećava efikasnost i ekonomičnost eksperimenata.

DFP za faktore na 2 nivoa obeležava se sa 2^{k-p} , gde k predstavlja broj faktora u eksperimentu, a k-p veličinu osnovnog potpunog faktorijelnog plana koji se koristi za konstrukciju delimičnog. Obavezno važi uslov $p<k$**.**

Jedna od glavnih mogućnosti je sekvencijalno eksperimentisanje, odnosno eksperimentisanje po fazama.

Tako se u prvim fazama istraživanja primenjuju DFP sa velikim brojem faktora. Ekstremni slučajevi su kada se u svakoj koloni nalazi jedan faktor. To su zasićeni eksperimenti.

U narednim fazama se eksperimenti ponavljaju sa manjim brojem faktora ubacujući potencijalno važne interakcije.

Druga mogućnost je fold-over, odnosno proširivanje sprovedenih eksperimenata u matrici dimenzija 2^{k-1} na veće matrice dimenzija 2^k itd.

Osnova formiranja svakog DFP je *generator* ili *reč* odredjene dužine, koja ima osobine elementa identiteta, i obeležava se kao

$$I = ABC...K\,.$$

Skup svih reči faktorijelnog plana predstavlja relaciju koja definiše eksperiment, odnosno *definicionu relaciju*.

Ovakva postavka eksperimenta dovodi do stvaranja *alijasa*. Alijasi su pomešani efekti pojedinih kolona plana, koji nastaju kada se na mesta interakcija u PFP postave faktora. Zaključci koji se odnose na efekte faktora podrazumevaju predpstavke o zanemarivanju efekata koji su alijasi sa tim faktorima. U slučajevima kada se smatra da su efekti koji čine alijas značajni, potrebno je dodatno eksperimentisanje da bi se razbila struktura alijasa.

Rezolucija DFP

Rezolucija ekseprimentalnog plana je koncept kojim se kod DFP definiše nivo alijasnih veza efekata glavnih faktora i interakcija. Ona se koristi kao osnova za podelu delimičnih faktorijelnih planova.

Najznačajnije rezolucije delimičnih faktorijelnih eksperimentalnih planova su III, IV i V.

Def. Rezolucija III: *DFP ima rezoluciju III ukoliko glavni efekti faktora nisu alijasi medjusobno. Alijasi glavnih faktora su interakcije dva faktora. Interakcije dva faktora mogu biti medjusobni alijasi.*

Def. Rezolucija IV: *DFP ima rezoluciju IV ukoliko glavni efekti faktora nisu alijasi medjusobno i glavni efekti faktora nisu alijasi sa interakcijama dva faktora.*

Def. Rezolucija V: *DFP ima rezoluciju V ukoliko glavni efekti faktora nisu alijasi medjusobno i glavni efekti faktora nisu alijasi sa interakcijama dva faktora. Interakcije dva faktora nisu alijasi medjusobno. Interakcije dva faktora mogu biti alijasi sa interakcijama tri i više faktora.*

Rezolucija faktora označava se velikim rimskim brojem u subskriptu oznake plana, odnosno 2_{III}^{k-p} predstavlja delimični eksperimentalni plan na *s* nivoa, rezolucije III; 2_{IV}^{k-p} je delimični faktorijelni eksperiment rezolucije IV, dok je s_{V}^{k-p} plan rezolucije V.

Rezolucija 2^{k-p} plana eksperimenta odgovara najmanjem broju slova u reči koja definiše relaciju.

Definisanje reči ili generatora

Da bi se se konstruisao 2^{k-p} plan potrebno je izabrati *p* nezavisnih generatora. Na osnovu njih se generiše još njihovih $2^{p}-p-1$ interakcija, koje sve zajedno formiraju definicionu relaciju.

Struktura alijasa 2^{k-p} plana dobija se množenjem svih efekata faktora potpunog $2^{(k-p)}$ faktorijelnog eksperimenta sa svim rečima koje čine definicionu relaciju. Svaki efekat ima $2^{p}-1$ alijasa. Ukoliko su interakcije visokog reda zanemarljive, struktura alijasa se pojednostavljuje.

Kao primer složenosti strukture alijasa 2^{k-p} planova, dat je primer zasićenog eksperimenta 2^{7-4}. Pod zasićenim eksperimentalnim planom podrazumeva se plan koji u svakoj koloni

sadrži jedan efekat glavnog faktora. Pretpostavlja se da su sve interakcije zanemarljive. Osnova za formiranje 2^{7-4} je 2^3 eksperimentalni plan.

Za 2^{7-4} plan potrebno je *p*=4 generatora. Ovi generatori su *I=ABD, I=ACE, I=BCF, I=ABCG*. Na osnovu njih se generiše se još 11 reči

$$I = ABD \cdot ACE = A^2BCDE = BCDE,$$
$$I = ABD \cdot BCF = AB^2CDF = ACDF,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$I = ABD \cdot ACE \cdot BCF \cdot ABCG = A^3B^3C^3DEFG = ABCDEFG,$$

tako da je relacija koja definiše eksperiment

I=ABD=ACE=AFG=BCF=BEG=CFG=DEF=ABCG=ABEF=
=ACDF=ADEG=BCDE=BDFG=CEFG=ABCDEFG.

Najkraća reč ima tri slova što znači da je rezolucija plana R=III. Struktura alijasa za 2_{III}^{7-4} plan dobija se kada se svaka reč definicione relacije pomnoži sa svakim efektom faktora potpunog 2^3 eksperimenta, odnosno sa *A, B, AB, C, AC, BC* i *ABC*. Svaki faktor ima 2^p-1=2^4-1=15 alijasa, što je dato tabelom

A	***B***	***D***	***C***	***E***	***F***	***G***
(A)	*(B)*	*(AB)*	*(C)*	*(AC)*	*(BC)*	*(ABC)*
BD	*AD*	*AB*	*AE*	*AC*	*AG*	*AF*
CE	*CF*	*CG*	*BF*	*BG*	*BC*	*BE*
FG	*EG*	*EF*	*FG*	*DF*	*DE*	*CD*
BCG	*ACG*	*ACF*	*ABG*	*ABF*	*ABE*	*ABC*
BEG	*AEF*	*AEG*	*ADF*	*AFG*	*ACD*	*ADE*
CDF	*CDE*	*BCE*	*BDE*	*BCD*	*BFG*	*BDF*
DEG	*DFG*	*BFG*	*EFG*	*CFG*	*CEG*	*CEF*
ABCF	*ABCE*	*ACDE*	*ABCD*	*ABDE*	*ABDF*	*ABFG*
ABEG	*ABFG*	*ADFG*	*ACFG*	*AEFG*	*ACEF*	*ACEG*
ACFG	*BCFG*	*BCDF*	*BCEG*	*BCEF*	*BEFG*	*BCFG*
ADEF	*BDEF*	*BDEG*	*CDEF*	*CDEG*	*CDFG*	*DEFG*
ABCDE	*ABCDF*	*ABCFG*	*ABCEF*	*ABCEG*	*ABCFG*	*ABEFG*
ABDFG	*ABDEG*	*ABDEF*	*ACDEG*	*ACDEF*	*ADEFG*	*ACDFG*
ACEFG	*BCEFG*	*CDEFG*	*BCDFG*	*BDEFG*	*BCDEF*	*BCDEG*
BCDEFG	*ACDEFG*	*ABCEFG*	*ABDEFG*	*ABCDFG*	*ABCDEG*	*ABCDEF*

Svaki glavni efekat faktora je alijas sa po 3 interakcije dva faktora, 4 interakcije tri faktora, 4 interakcije četiri faktora, 3 interakcije pet faktora i 1 interakcijom šest faktora.

Tagučijeve metode

Tagučijeve metode su pristup koji se zasniva na sistemu tehnika koje služe za poboljšanje kvaliteta. Razvijene su od strane Genichi Taguchi-ja, japanskog inženjera, u periodu 1947-1971 godina. Na zapadu su prvi put prezentirane krajem 1980-tih, dok je njihova intenzivna primena počela devedesetih. Sam Taguči ih preporučuje kao pogodne za primenu u nerazvijenim zemljama, odnosno u situacijama kada je tehnološki nivo nizak, a sredstva za ulaganje u proizvodnju ograničena.

Tagučijeve tehnike obuhvataju:

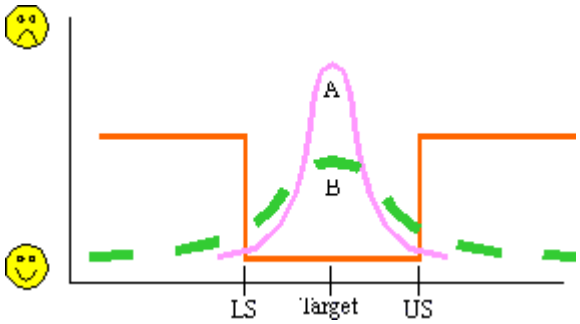
- funkciju gubitka kvaliteta
- off-line kontrola
- on-line kontrola
- sistem planiranja eksperimenata (ortogonalne matrice, S/N odnos idr.)

Prema Tagučijevim tehnikama, kontrola, odnosno postizanje nivoa kvaliteta kod proizvoda ili procesa postiže se preko dva osnovna vida kontrole off-line i on-line kontrole. Ekonomski aspekti primene ova dva vida kontrole regulišu se preko funkcije gubitaka (loss function).

Funkcija gubitka kvaliteta

QLF (Quality Loss Function) je metoda za merenje kvalitteta i predstavlja finansijsku meru nezadovoljstva korisnika (kupca) sa karakteristikama proizvoda, kada one odstupaju od ciljne vrednosti. Ključne mere kvaliteta su srednja vrednost i varijacija.

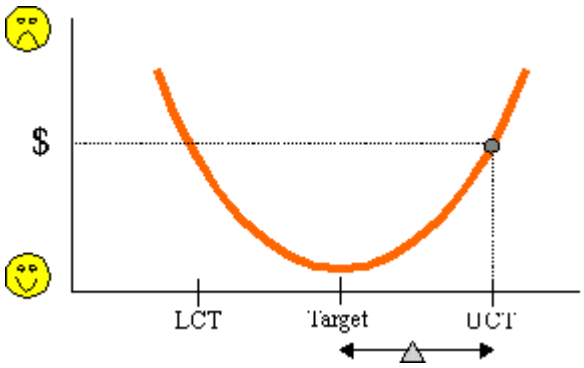
U tradicionalnom pristupu kvalitet nekog proizvoda se meri kao što je prikazano na Slici 1, na osnovu koga se zaključuje da je proizvod ili dobar ili loš. Pri ovom pristupu se predpostavlja da je proizvod uniformno dobar između dozvoljenih specifikacija:



Slika 1

Nasuprot tome, Taguči predstavlja kvadratnu krivu koja prikazuje nezadovoljstvo proizvoda sa njegovim karakteristikama. Ova kriva je centrirana na ciljnu vrednost (slika 2), koja omogućava najbolju karakteristiku sa aspekta kupca. LCT najniža tolerancija kupca, UCT najviša. Pri konstruisanju se koriste i sredina i varijansa, odnosno:

$$\text{gubitak} = k\left\{\sigma^2 - (\bar{y} - T)^2\right\}, k = \frac{\$}{\Delta^2}$$



Slika 2

Izračunavanje srednjeg gubitka omogućava kost-benefit analizu alternativnih projekata sa različitim troškovima koji dovode do različitih srednjih gubitaka.

Off-line kontrlola

Off-line kontrola se odnosi na projektovanje kvaliteta proizvoda i procesa pre njihove proizvodnje odnosno stalnog postavljanja. Sastoji se iz tri osnovna koraka:

- ***Projektovanje sistema*** - definisanje osnovnih mera i oblika proizvoda (elemenata procesa). Obuhvata do sada korišćene načine projektovanja proizvoda
- ***Projektovanje parametara,*** osnovna faza projektovanja proizvoda i procesa. To je osnova za optimizaciju parametara procesa čime se smanjuje varijacija posmatranih karakteristika kvaliteta u cilju visoko kvalitetnih proizvoda uz minimalne troškove. Naročito je važan u nerazvijenim zemljama gde postoji nestabilnost u kvalitetu repromaterijala, tehnološki nivo je nizak, a sredstva za proizvodnju su ograničena. Potrebno je stvoriti robusne poroizvode, odnosno proizvode otporne na spoljne ometajuće uticaje.
- ***Projektovanje tolerancija*** primenjuje se u slučajevima kada projektovanjem parametara nije moguće obezbediti odgovarajuće smanjenje varijacija karakteristika proizvoda. Stoga je potrebno odrediti tolerancije ometajućih faktora i preko toga izvršiti kontrolu izlaznih parametara.

On-line kontrola kvaliteta

Obuhvata metode kontrole kvaliteta u samim proizvodnim procesima u cilju smanjenja varijacije. Deli se na tri oblasti:

- Dijagnostika i prilagođavanje
- Previđanje i modifikacija
- Merenje i akcija

Planiranje eksperimenata

Podrazumeva statističke metode koje podržavaju sistem poboljšanja kvaliteta. Osnova su statistički planirani eksperimenti koje je Taguči prilagodio jednostavnoj inženjerskoj primeni u praksi. *Ne postoje pretpostavke o normalnosti i koriste se samo glavni efekti faktora i dvofaktorske interakcije*, tako da je moguće sprovesti ispitivanje velikog broja efekata, kroz relativno mali broj merenja.

Tagučijev pristup sadrži tri elementa - Ortogonalne matrice (definisanje postavke eksperimenta), Linearni grafovi (pomoć za postavljanje faktora u ortogonalne matrice) i Trougaone tabele.

Ortogonalne matrice

Ortogonalne matrice OM predstavljaju šemu na osnovu koje se formiraju eksperimentalni planovi. Osnovi OM mogu se naći u Latinskim kvadratima. Taguči je napravio OM (sa linearnim grafovima i trougaonim tabelama) za faktore na 2, 3, 4 i 5 nivoa, kao i za mešoviti broj nivoa. Nivoi su obeleženi brojevima 1, 2, 3, 4 i 5. Linearni grafovi - LG, kao pomoć u raspoređivanju faktora u OM predstavljaju grafički prikaz efekata glavnih faktora i dvofaktorskih interakcija izmedju njih. Glavni efekti faktora se označavaju tačkama grafa. Dvofaktorske iterakcije su pedstavljene pravama koje spajaju glavne efekte.

Pre početka istraživanja biraju se faktori koji su obuhvaćeni eksperimentom. Takođe se biraja i šta se meri - izlazi iz eksperimenta. Može se meriti više izlaznih veličina.

Nakon odredjivanja faktora, za svaki od njih se specificiraju vrednosti nivoa koji će biti ispitivani. Faktori i interakcije, sa svojim nivoima, odredjuju broj stepeni slobode kojim eksperiment raspolaže. Broj nivoa pojedinih faktora definiše tip ortogonalne matrice koja se koristi. Broj stepeni slobode odredjuje njenu veličinu.

Izmene nivoa pojedinih faktora tokom sprovodjenja eksperimenta su komplikovane. U nekim situacijama potpuna randomizacija plana eksperimenta povećava vreme eksperimenta, što dalje povećava troškove njegovog sprovodjenja. Ovaj problem pri postavljanju plana eksperimenta Taguči posmatra prvenstveno kroz troškove i rešava ga podelom faktora na odredjeni broj kategorija oblika

- primarni faktori, čiji se nivoi teško menjaju,
- sekundarni fakori, čija je promena nivoa lakša nego kod primarnih faktora,
- tercijarni faktori, čiji se nivoi lako menjaju itd.

Na osnovu podele faktora na kategorije, vrši se podela odgovarajuće ortogonalne matrice koja se koristi u eksperimentu. Svaka kategorija predstavlja odredjenu grupu kolona koja se formira u okviru OM. U tablicama OM postoje preporuke podela na grupe, ukoliko se ukaže potreba za njihovom primenom

ANALIZA EKSPERIMENTALNIH REZULTATA

Kada kolona sadrži dva nivoa faktora, odnosno *a*=2 njegovi efekti se odredjuju preko obrasca

$$SK_A = \frac{(A_1 - A_2)^2}{n}.$$

Kada kolona sadrži više od dva nivoa, odnosno *a*>2, efekti kolone su odredjeni preko

$$SK_A = \frac{A_1^2}{n_{A_1}} + \cdots + \frac{A_i^2}{n_{A_i}} + \cdots + \frac{A_a^2}{n_{A_a}} - CF.$$

CF je korekcioni faktor i predstavlja odnos sume kvadrata svih magnituda opservacija eksperimenta i ukupnog broja opservacija, tj.

$$CF = \frac{T^2}{N}.$$

EKSPERIMENTALNA GREŠKA

Eksperimentalna greška se koristi za ocenu efekata faktora. Taguči postavlja dva tipa eksperimentalne greške. To su greška koja nastaje izmedju pojedinih nivoa faktora i greška koja nastaje izmedju pojedinih replikacija u okviru pojedinih nivoa.

Greška prvog reda

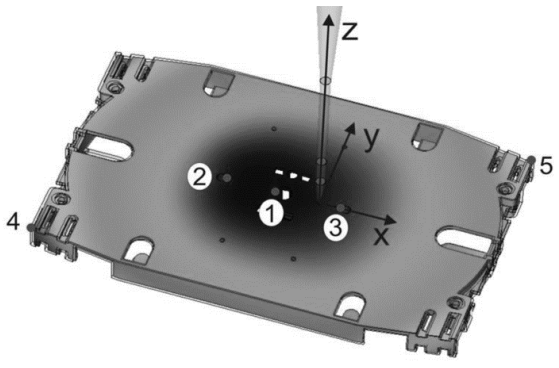
Eksperimentalna greška koja nastaje izmedju pojedinih replikacija.

Greška drugog reda

Greška usled dejstva pojedinih pojedinih kolona kojima nisu dodeljeni faktori ni interakcije. Varijacije usled ove greške se dobijaju na istovetan način kao i varijacija usled efekata faktora.

Radni primer.

Eksperiment livenja plastike brizganjem. Deo kućište razvodnika optičkog kabla. Ispitivani faktori: Merenje geometrijskih deformacija u 5 tačaka zavisno od udaljenosti od tačke brizganja.

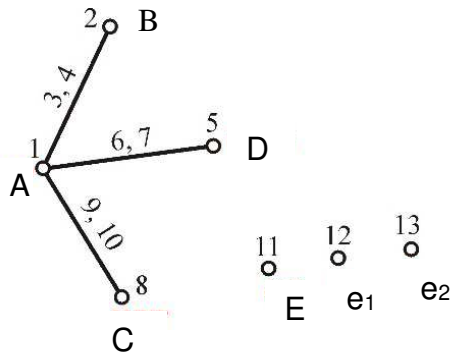


			nivo 1	nivo 2	nivo 3
A	Pritisak (HP)	[bar]	40	55	70
B	Vreme brizganja (IT)	[s]	0,8	1	1,2
C	Vreme pritiska (HPT)	[s]	3	4	5
D	Temperatura brizganja (TMP)	[°C]	220	240	260
E	Vreme hlađenja (CT)	[s]	15	25	40

Ortogonalna matrica

	A	***B***	***AB***	***AB***	***D***	***AD***	***AD***	***C***	***AC***	***AC***	***E***	e_1	e_2	y_1	y_2	y_3
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**			
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$y_{(1)1}$	$y_{(1)2}$	$y_{(1)3}$
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	$y_{(2)1}$	$y_{(2)2}$	$y_{(2)3}$
3	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	...	...	...
4	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3	...	...	...
5	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1			
6	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2			
7	1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2			
8	1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3	...	...	...
9	1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1			
10	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3			
11	2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1	...	...	...
12	2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2			
13	2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2			
14	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3	...	...	...
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1			
16	2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1			
17	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2	...	...	...
18	2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3			
19	3	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2			
20	3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3	...	...	...
21	3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1			
22	3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1			
23	3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	...	...	...
24	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3			
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3	...	...	...
26	3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1	$y_{(26)1}$	$y_{(26)2}$	$y_{(26)3}$
27	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2	$y_{(27)1}$	$y_{(27)2}$	$y_{(27)3}$

Linearni graf



Postanaliza eksperimentalnih rezultata

Optimalno rešenje problema se dobija u postanalizi eksperimentalnih rezultata. Postanaliza obuhvata tri osnovna koraka:

- odredjivanje optimalnih nivoa faktora.
- odredjivanje koeficijenta učešća i
- odredjivanje S/N odnosa
- Pareto dijagram za koeficijent učešća

Optimalni nivoi faktora

Optimalni nivoi faktora određuju se na osnovu rezultata eksperimenta. Uslučaju da faktor ima uticaja, to određuje nivo koji se bira za dalju primenu u praksi. Kada faktor nema uticaja za izbor nivoa faktora koji će biti primenjen u praksi koriste se drugi kriterijumi kao što su cena, lakoća prilagođavanju određenom nivou i sl.

Koeficijent učešća (contribution ratio)

Jedan od osnovnih koraka postanalize je odredjivanje *koeficijenta učešća* ili *koeficijenta doprinosa* faktora (interakcije) za ispitivane efekte. Zasniva se na "čistoj varijaciji" faktora (interakcije)

Def. *Koeficijent učešća predstavlja procenat ukupne varijacije ekseprimenta koji nastaje usled dejstva faktora*

Čista varijacija efekta se dobija poređenjem njegovog uticaja sa varijansom greške pomnoženom za broj stepeni slobode kojim faktor raspolaže, tj.

$$SK_A^{'} = SK_A - f_A \cdot V_e .$$

Koeficijent učešća je onda

$$\rho_A = \frac{SK'_A}{SK_T}(100\%), \text{ gde je } \rho_T = 1(100\%).$$

U slučaju da je koeficijent učešća grešaka druge vrste veliki, to ukazuje da su prvobitno izabrani faktori pogrešni, odnosno da prvobitna postavka eksperimenta nije dobra.

S/N odnos

S/N odnos ili S/N ratio je tzv. Signal-to- Noise ratio.

Taguči ovaj odnos izračunava u slučaju robusnih eksperimenata, mada se danas često u praksi primenjuje kod svih eksperimenata sa OM. Robusni eksperimenti su eksperimenti koji se sastoje od dve OM koje su povezane. Prva OM sadrži faktore čiji se uticaj ispituje. Druga OM sadrži faktore koji mogu da ometaju kvalitet i primenu proizvoda u praksi (vlažnost, buka, spoljna temperatura i sl.) Cilj je stvoriti proizvode koji su otporni na ometajuće faktore.

Postoje 3 vrste S/N odnosa:

- Što veći to bolji (maksimizacija)
  $$S/N = -10 \cdot \log\left(\sum\left(1/Y^2\right)/n\right)$$
- Nominalno je najbolje
  $$S/N = -10 \cdot \log\left(\left(\overline{Y}^2\right)/\sigma^2\right)$$
- Što manje to bolje (minimizacija)
  $$S/N = -10 \cdot \log\left(\sum\left(Y^2\right)/n\right)$$

Pareto dijagram za koeficijent učešća

Konstruiše se kada postoje značajni uticaji faktora. U suprotnom može prikazati pogrešne rezultate.