

AHP – Metoda analitičnih hijerarijskih procesa

Prof. dr Mirjana Misita

AHP- Analitički hijerarhijski proces

- Analitički hijerarhijski proces (AHP), koji je razvio Tomas Saaty početkom '70 godina, predstavlja *alat u analizi odlučivanja*, kreiran u cilju pružanja pomoći donosiocima odluke u rešavanju kompleksnih problema odlučivanja u kojima učestvuje veći broj alternativa, veći broj kriterijuma i u višestrukim vremenskim periodima.
- Proces rešavanja problema odlučivanja je često izuzetno kompleksan zbog prisustva, po pravilu, konkurentnih i konfliktnih ciljeva među raspoloživim kriterijumima ili alternativama.
- Kako je i sam autor naglasio: "Praksa odlučivanja se najčešće bavi ponderisanim alternativama, koje sve zadovoljavaju skup željenih ciljeva. Problem je izabrati alternativu koja će na najbolji način zadovoljiti celokupni skup ciljeva".

Aksiome AHP metode su (Vargas, 1990):

- *Aksioma 1.* Neka su date dve alternative i/ili kriterijumi optimalnosti. Donosilac odluke može da uporedi njihove vrednosti tako da su one **recipročne**.
- *Aksioma 2.* Kada se porede vrednosti dve alternative ili kriterijuma optimalnosti, donosilac odluke nikada ne procenjuje da li je jedna alternativa ili kriterijum optimalnosti beskonačno bolji od druge alternative (kriterijuma optimalnosti).
- *Aksioma 3.* Problem odlučivanja može da se definiše kao hijerarhijski.
- *Aksioma 4.* Kada se problem odlučivanja definiše, sledeći korak je dodeljivanje prioriteta, odnosno važnosti kriterijuma optimalnosti.

Analitički hijerarhijski modeliranja zahteva četiri faze:

- Strukturiranje problema
 - Prikupljanje podataka
 - Ocenjivanje relativnih težina
 - Određivanje rešenja problema.
-
- Prva faza sastoji se od dekomponovanja bilo kog kompleksnog problema odlučivanja u seriju hijerarhija, gde svaki nivo predstavlja manji broj upravljivih atributa. Oni se potom dekomponuju u drugi skup elemenata koji odgovara sledećem nivou, itd. Ovakvo hijerarhijsko strukturiranje predstavlja efikasan način suočavanja sa kompleksnošću realnih problema i identifikovanja značajnih atributa u cilju dostizanja sveukupnog cilja problema.

- Druga faza počinje prikupljanjem podataka i (njihovim) merenjem. Onaj ko ocenjuje ili vrši evaluaciju će zatim dodeliti relativne ocene u parovima atributa jednog hijerarhijskog nivoa, za date attribute sledećeg, višeg hijerarhijskog nivoa. Isti proces se ponavlja za sve nivoe cele hijerarhije. Najpoznatija skala sa devet tačaka za dodeljivanje težina data je u tabeli 2, a njena primena u rešavanju realnih problema se pokazala izuzetno pouzdanom (Saaty, 1972).

Saaty-jeva devetostepena sakla

Skala	Objašnjenje rangiranja
9	Apsolutno najznačajnije/najpoželjnije
8	Veoma snažno ka apsolutno najznačajnijem
7	Veoma snažno ka veoma značajnom/poželjnom
6	Snažno ka veoma snažnom
5	Snažnije više značajno/poželjno
4	Snažnije ka više snažnijem
3	Slabije više značajno/poželjnije
2	Podjednako ka slabijem/višem
1	Podjednako značajno/poželjno

- Sledeći ovu metodu rangiranja, onaj ko procenjuje će dodeliti težine za svaki par posebno, kao meru koliko je jedan par atributa značajniji od drugog. Ako raspoložemo objektivnim podacima, oni se mogu koristiti pri dodeljivanju težina. Ukoliko ne raspoláže objektivnim informacijama, onaj ko procenjuje može koristiti sopstvena verovanja, procene ili podatke pri dodeljivanju težina. Po kompletiranju ovog procesa dobiće se odgovarajuća matrica upoređivanja po parovima koja odgovara svakom nivou hijerarhije.

Treću fazu čini procena relativnih težina. Kao što je pomenuto, matrice poređenja po parovima biće prevedene u probleme određivanja sopstvenih vrednosti, radi dobijanja normalizovanih i jedinstvenih sopstvenih vektora težina za sve attribute na svakom nivou hijerarhije. Pođimo od pretpostavke da dati nivo hijerarhije ima n atributa A_1, A_2, \dots, A_n sa vektorom težina $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Potrebno je naći t u cilju određivanja relativnog značaja za A_1, A_2, \dots, A_n . Ukoliko onaj ko ocenjuje težine upoređuje svaki par A_i i A_j svih atributa, kao stepen kojim A_i dominira nad A_j (tj. t_i/t_j), tada se može formirati matrica upoređivanja parova:

$$A = (a_{ij}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} A_1 & A_2 & & A_j & & A_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} t_1/t_1 & t_1/t_2 & \dots & t_1/t_j & \dots & t_1/t_n \\ t_2/t_1 & t_2/t_2 & \dots & t_2/t_j & \dots & t_2/t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_i/t_1 & t_i/t_2 & \dots & t_i/t_j & \dots & t_i/t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_n/t_1 & t_n/t_2 & \dots & t_n/t_j & \dots & t_n/t_n \end{matrix} \end{matrix}$$

Zatim se normalizovani vektor težina, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. može naći rešavanjem odgovarajućeg problema najveće sopstvene vrednosti:

$$At = nt$$

Neka je A recipročna, tj. matrica sa osobinom:

$$a_{ji} = 1/a_{ij} \quad i \quad a_{ii} = 1 \quad \text{za sve } i, j = 1, \dots, n$$

Ako su dijagonalni elementi matrice A jednaki 1 ($a_{ij}=1$), i ako je A regularna matrica ($\det A \neq 0$), tada male promene u vrednostima za a_{ij} zadržavaju najveću sopstvenu vrednost na, recimo λ_{\max} , a ostale sopstvene vrednosti su približno jednake nuli. Na taj način nalaženje vrednosti vektora t rešavanjem izraza $At = \lambda t$ ekvivalentno je:

$$At = \lambda_{\max} t$$

Uopšteno, vektor koji se dobije rešavanjem ovog izraza nije normalizovani vektor. Definišući $\alpha = \sum t_i$ i zamenjujući t sa t/α može se dobiti normalizovani vektor za određivanje relativnih značajnosti atributa A_1, A_2, \dots, A_n [Saaty, 1972].

Indeks konzistentnosti (IK), kao mera konzistentnosti odstupanja n od λ_{\max} se može izračunati iz sledećeg izraza:

$$IK = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

Za vrednost IK manju od 0,10 uopšteno se smatra da predstavlja zadovoljavajuću meru koja indicira da su procene (za a_{ij}) konzistentne i da je zbog toga određena vrednost za λ_{\max} približno jednaka idealnoj vrednosti koju želimo da procenimo.

- Četvrta faza i ujedno poslednja faza AHP metode podrazumeva nalaženje tzv. kompozitnog normalizovanog vektora. Pošto su sukcesivni nivoi hijerarhije međusobno povezani, jedinstveni kompozitni vektor jedinstvenih i normalizovanih vektora težina za celokupnu hijerarhiju određuje se množenjem vektora težina svih sukcesivnih nivoa. Taj kompozitni vektor će se potom koristiti za nalaženje relativnih prioriteta svih entiteta na najnižem (hijerarhijskom) nivou, što omogućava dostizanje postavljenih ciljeva celokupnog problema.

Primer

Primer za analizu upotrebe metode AHP korišćenjem softvera Expert Choice:

Kupac automobila je u situaciji da bira između četiri modela: a_1 , a_2 , a_3 , a_4 . Svaki od tipova se karakteriše određenim atributima kojih u datom primeru ima 6:

- A_1 – maksimalna brzina [km/h],
- A_2 – potrošnja goriva [milja/galonu],
- A_3 – mogućnost opterećenja [kp],
- A_4 – cena [10^7 din],
- A_5 – pouzdanost [kvalitativna ocena] i
- A_6 – sposobnost manevrisanja [kvalitativna ocena].

Kvantitativne i kvalitativne ocene navedenih atributa, za pojedine tipove automobila navedene su u sledećoj matrici odlučivanja:

Kvantitativne i kvalitativne ocene navedenih atributa, za pojedine tipove automobila navedene su u sledećoj matrici odlučivanja:

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆
a ₁	150	10	1500	6,0	visoka	prosečna
a ₂	180	15	1100	9,0	vrlo visoka	visoka
a ₃	160	12	1400	7,5	prosečna	vrlo visoka
a ₄	140	9	1600	5,0	niska	prosečna

Koristeći skalu od 0 do 9, prethodnu matricu odlučivanja moguće je u potpunosti kvantifikovati:

$$O = \begin{matrix} & A_1[10^2] & A_2[10] & A_3[10^3] & A_4 & A_5 & A_6 \\ \begin{bmatrix} 1,5 & 1,0 & 1,5 & 6,0 & 7 & 5 \\ 1,8 & 1,5 & 1,1 & 9,0 & 9 & 7 \\ 1,6 & 1,2 & 1,4 & 7,5 & 5 & 9 \\ 1,4 & 0,9 & 1,6 & 5,0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Kupac najpre treba da izvrši upoređivanje značaja pojedinih kriterijuma (atributa) saglasno skali definisanoj od 0-9. Njegove procene i prioritete su prikupljeni u cilju izbora automobila i dati su u sledećoj matrici:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1		(3,0)	3,0	(6,0)	(6,0)	2,0
A_2			4,0	(4,0)	(5,0)	4,0
A_3				(7,0)	(6,0)	(3,0)
A_4					1,0	6,0
A_5						6,0
A_6						

U nastavku će biti objašnjeno kako se izračunavaju jedinstveni i normalizovani sopstveni vektori koji odgovaraju atributima ili alternativama na svakom nivou hijerarhijske strukture u cilju određivanja njihovih relativnih prioriteta. Zapravo, biće objašnjena aproksimativna procedura za dobijanje istih sopstvenih vektora koja je znatno jednostavnija od postupka koji zahteva primenu jednačine $At = nt$:

- Korak 1 – Naći sumu svih elemenata u svakoj koloni.
- Korak 2 – Podeliti elemente svake kolone sa sumom vrednosti te kolone, koja je dobijena u koraku 1.
- Korak 3 – Naći sumu svih elemenata po svakom redu i potom odrediti srednju vrednost svakog reda. Kolona koja se sastoji od tih srednjih vrednosti je u stvari normalizovani sopstveni vektor.

Računski postupak određivanja normalizovanog sopstvenog vektora za prvi nivo hijerarhije problema izbora automobila biće prikazan u nastavku (na isti način je moguće sprovesti i proračune za ostale hijerarhijske nivoe za sve preostale bilo attribute bilo alternative).

Prerađena tabela upoređivanja težina u parovima:

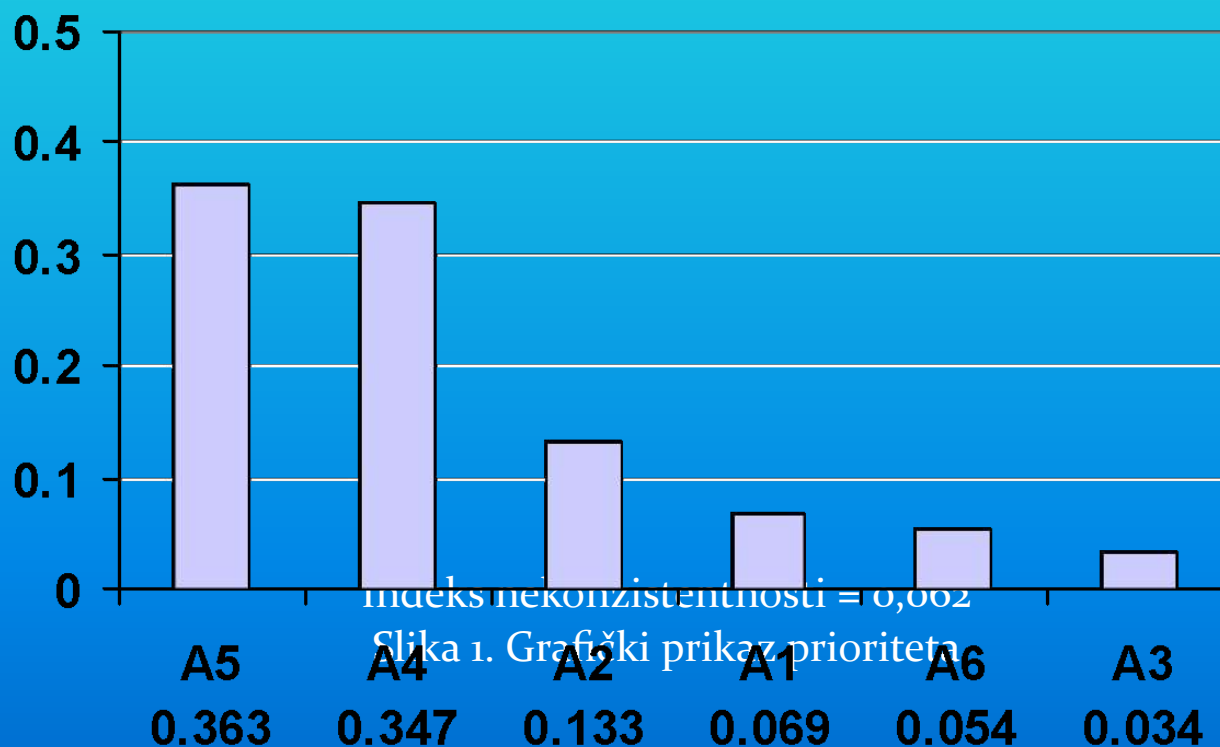
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆
A ₁	1,0	0,3333	3,0	1,667	1,667	2,0
A ₂	3,0	1,0	4,0	0,2500	0,2000	4,0
A ₃	0,3333	0,2500	1,0	0,1429	1,667	0,3333
A ₄	6,0	4,0	7,0	1,0	1,0	6,0
A ₅	6,0	5,0	6,0	1,0	1,0	6,0
A ₆	0,5000	0,2500	3,0	1,667	1,667	1,0
Σ	16,8333	10,8333	24,0	2,7263	2,7001	19,3333

Računanje sopstvenog vektora odgovarajućih sopstvenih vrednosti:

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆		
A ₁	0,0594	0,0308	0,1250	0,0611	0,0617	0,1034	0,4414	0,0736
A ₂	0,1782	0,0923	0,1667	0,0927	0,0741	0,2069	0,8099	0,1350
A ₃	0,0198	0,0231	0,0417	0,0524	0,0617	0,0172	0,2159	0,0360
A ₄	0,3564	0,3692	0,2917	0,3668	0,3704	0,3103	2,0648	0,3441
A ₅	0,3564	0,4615	0,2500	0,3668	0,3704	0,3103	2,1154	0,3526
A ₆	0,0297	0,0231	0,1250	0,0611	0,0617	0,0517	0,3523	0,0587

Vrednosti u koloni K7 predstavljaju sume elemenata po redovima, a u koloni K8 su odgovarajuće srednje vrednosti ili sopstvenog vektora iz koraka 3. Opisani postupak, iako je aproksimativan (a time i kraći), očigledno zahteva dosta vremena i zbog toga će se za dalje proračune isključivo koristiti softver Expert Choice.

Grafički prikaz rezultata dobijenih korišćenjem pomenutog softvera je dat na sledećoj slici (razlika u rezultatima je zanemarljiva, a nastala je kao posledica primene aproksimativne metode – kolona K8):



Slika 1. Grafički prikaz prioriteta