## Zadatak 01:

Proizvođač treba da isporuči naručiocu $A=40000$ jedinica nekog rezervnog dela u toku godine ($T=12$ meseci). Proizvođač mora dnevnu proizvodnju da skladišti jer naručilac ne poseduje skladišni prostor. Mesečni troškovi skladištenja po jedinici rezervnog dela iznose $C_1 = 15$ NJ, dok su troškovi jedne isporuke $C = 3500$ NJ. U slučaju neredovne isporuke proizvođač snosi troškove u iznosu od $C_2 = 250$ NJ po jedinici neisporučenog rezervnog dela za jedan mesec. Odrediti: optimalni broj rezervnih delova pri svakoj isporuci $x^*$ ($y^*$), optimalnu dužinu intervala između dve isporuke $t^*$, optimalni broj isporuka $n^*$ kao i optimalne ukupne troškove $F(x^*, y^*)$ čuvanja zaliha za vremenski period $T$.

Rešenje:

Kako je potražnja za rezervnim delovima unapred poznata (konstantna) i pošto se celokupna količina rezervnih delova naručuje se odjednom u toku posmatranog vremenskog perioda a nedostatak rezervnih delova, koji se kompenzuje hitnom nabavkom, **je dopustiv**, za određivanje optimalnih ukupnih troškova čuvanja zaliha koristi se *model upravljanja zalihama sa konstantnom potražnjom artikala, kada je potražnja veća od zaliha*.

Optimalna veličina isporuke $x^*$ određuje se na osnovu izraza:

$$x = x^* = \sqrt{2 \cdot \frac{A \cdot C}{T \cdot C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}}$$

$$x^* = \sqrt{2 \cdot \frac{40000 \cdot 3500}{12 \cdot 15}} \cdot \sqrt{\frac{15 + 250}{250}} \cong 1284 \text{ rezervna dela,}$$

dok je količina rezervnih delova $y^*$ na početku svakog vremenskog intervala $t^*$:

$$y = y^* = \sqrt{2 \cdot \frac{A \cdot C}{T \cdot C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}}$$

$$y^* = \sqrt{2 \cdot \frac{40000 \cdot 3500}{12 \cdot 15}} \cdot \sqrt{\frac{250}{15 + 250}} \cong 1176{,}6 \text{ komada.}$$

Prosečan broj rezervnih delova koji nedostaje između dve isporuke $\Delta^*$ je:

$$\Delta^* = x^* - y^* = 1284 - 1176{,}6 = 107{,}4 \text{ komada.}$$

Optimalan broj isporuka je jednak:

$$n = n^* = \frac{A}{x^*} = \frac{40000}{1284} = 31{,}15 \text{ isporuke.}$$

Optimalni vremenski interval između isporuka je:

$$t = t^* = \frac{T}{A} \cdot x^* = \frac{12 \cdot 1284}{40000} = 11{,}56 \text{ dana ili 0,3852 meseci,}$$

dok vremenski interval $t_1^*$ u kome je potražnja za rezervnim delovima zadovoljena iznosi:

$$t_1 = t_1^* = \frac{y^*}{x^*} \cdot t^* = \frac{1176{,}6}{1284} \cdot 11{,}56 = 10{,}5 \text{ dana.}$$

Vremenski interval $t_2^*$ u kome je potražnja za rezervnim delovima nije zadovoljena iznosi:

$$t_2 = t_2^* = \frac{x^* - y^*}{x^*} \cdot t^* = t^* - t_1^* = 11{,}56 - 10{,}5 = 1{,}06 \text{ dana.}$$

Optimalni ukupni troškovi čuvanja zaliha za vremenski period $T$ iznose:

$$F(x,y) = F(x^*, y^*) = \sqrt{2 \cdot A \cdot T \cdot C_1 \cdot C} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}},$$

$$F(x^*, y^*) = \sqrt{2 \cdot 40000 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 3500} \cdot \sqrt{\frac{250}{15 + 250}} = 218053{,}14 \text{ NJ.}$$

## Zadatak 02:

Proizvođač se obavezao da kupcu isporuči dnevno u toku mesec dana ($T=30$ dana) po $a=20$ komada nekog rezervnog dela. Za svako kašnjenje u isporuci jednog rezervnog dela plaćaju se penali u iznosu od $C_2 = 200$ NJ dnevno. Troškovi jedne isporuke iznose $C = 2500$ NJ, dok troškovi uskladištenja iznose $C_1 = 50$ NJ dnevno po jednom rezervnom delu. Odrediti: optimalni broj rezervnih delova pri svakoj isporuci $x^*$ ($y^*$), optimalnu dužinu intervala između dve isporuke $t^*$, optimalni broj isporuka $n^*$ kao i optimalne ukupne troškove $F(x^*, y^*)$ čuvanja zaliha za vremenski period $T$.

Rešenje:

Kako je nedostatak rezervnih delova **dopustiv** a cela količina rezervnih delova je unapred ugovorena, za određivanje optimalnih ukupnih troškova čuvanja zaliha koristi se *model upravljanja zalihama sa konstantnom potražnjom artikala, kada je potražnja veća od zaliha*.

Ukupna ugovorena količina rezervnih delova za mesec dana iznosi:

$$A = a \cdot T = 20 \cdot 30 = 600 \text{ komada.}$$

Optimalna veličina isporuke $x^*$ određuje se na osnovu izraza:

$$x = x^* = \sqrt{2 \cdot a \cdot \frac{C}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}}$$

$$x^* = \sqrt{2 \cdot 20 \cdot \frac{2500}{50}} \cdot \sqrt{\frac{50 + 200}{200}} = 50 \text{ rezervna dela,}$$

dok je količina rezervnih delova $y^*$ na početku svakog vremenskog intervala $t^*$:

$$y = y^* = \sqrt{2 \cdot a \cdot \frac{C}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}}$$

$$y^* = \sqrt{2 \cdot 20 \cdot \frac{2500}{50}} \cdot \sqrt{\frac{200}{50 + 200}} = 40 \text{ komada.}$$

Prosečan broj rezervnih delova koji nedostaje između dve isporuke $\Delta^*$ je:

$$\Delta^* = x^* - y^* = 50 - 40 = 10 \text{ komada.}$$

Optimalan broj isporuka je jednak:

$$n = n^* = \frac{a \cdot T}{x^*} = \frac{20 \cdot 30}{50} = 12 \text{ isporuka.}$$

Optimalni vremenski interval između isporuka je:

$$t = t^* = \frac{x^*}{a} = \frac{50}{20} = 2{,}5 \text{ dana,}$$

dok vremenski interval $t_1^*$ u kome je potražnja za rezervnim delovima zadovoljena iznosi:

$$t_1 = t_1^* = \frac{y^*}{x^*} \cdot t^* = \frac{40}{50} \cdot 2{,}5 = 2 \text{ dana.}$$

Vremenski interval $t_2^*$ u kome je potražnja za rezervnim delovima nije zadovoljena iznosi:

$$t_2 = t_2^* = t^* - t_1^* = 2{,}5 - 2 = 0{,}5 \text{ dana.}$$

Optimalni ukupni troškovi čuvanja zaliha za vremenski period $T$ iznose:

$$F(x,y) = F(x^*,y^*) = \sqrt{2 \cdot a \cdot T^2 \cdot C_1 \cdot C} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}},$$

$$F(x^*,y^*) = \sqrt{2 \cdot 20 \cdot 30^2 \cdot 50 \cdot 2500} \cdot \sqrt{\frac{200}{50 + 200}} = 60000 \text{ NJ.}$$

## Zadatak 03:

Preduzeće nabavlja novu mašinu. Element preko koga se vrši automatsko upravljanje mašinom je veoma složen i skup, tako da je potrebno pri kupovini mašine nabaviti i nekoliko ovih elemenata kao rezervne delove. Cena nabavke jednog elementa pri kupovini sa mašinom je $C_1 = 6500$ NJ, dok je cena interventne nabavke ovog elementa $C_1 = 125000$ NJ. Kako se ovi elementi ne mogu koristiti za druge mašine odrediti optimalnu količinu elemenata (rezervnih delova) koje treba nabaviti zajedno sa mašinom. Podaci o učestalosti kvarova datog elementa su dati u tabeli (na uzorku od 100 mašina).

| Utrošak elemenata *(x)* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | >6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Broj mašina na kojima je izvršena zamena *(x)* elemenata | 85 | 7 | 3 | 3 | 1 | 1 | 0 |
| *p(x)* | 0,85 | 0,07 | 0,03 | 0,03 | 0,01 | 0,01 | 0 |

Rešenje:

Pošto su podaci o učestalosti kvarova datog elementa zadati preko diskretnog zakona raspodele verovatnoća $p(x)$ a kako su troškovi nabavke elemenata pri kupovini sa mašinom manji od troškova interventne nabavke $C_1 < C_2$, dok se troškovi skladištenja zanemaruju, za određivanje optimalnih ukupnih troškova čuvanja zaliha koristi se *model upravljanja zalihama sa slučajnom potražnjom*.

Funkcija ukupnih troškova, u zavisnosti od broja elemenata koji se kupuju zajedno sa mašinom *y*, je oblika:

$$F(y) = C_1 \cdot \sum_{x=0}^{y} p(x) \cdot (y-x) + C_2 \cdot \sum_{x=y+1}^{\infty} p(x) \cdot (x-y)$$

Optimalni broj elemenata koje treba nabaviti zajedno sa mašinom $y^*$ određuje se na osnovu minimalnih ukupnih troškova kao:

$F(0) = 12500 \cdot [0{,}07 \cdot 1 + 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}03 \cdot 3 + 0{,}01 \cdot 4 + 0{,}01 \cdot 5] = 38750$ NJ

$F(1) = 6500 \cdot 0{,}85 \cdot 1 + 12500 \cdot [0{,}03 \cdot 1 + 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}01 \cdot 3 + 0{,}01 \cdot 4] = 25525$ NJ

$F(2) = 6500 \cdot [0{,}85 \cdot 2 + 0{,}07 \cdot 1] + 12500 \cdot [0{,}03 \cdot 1 + 0{,}01 \cdot 2 + 0{,}01 \cdot 3] = 21505$ NJ

$F(3) = 6500 \cdot [0{,}85 \cdot 3 + 0{,}07 \cdot 2 + 0{,}03 \cdot 1] + 12500 \cdot [0{,}01 \cdot 1 + 0{,}01 \cdot 2] = \mathbf{21430}$ NJ

$F(4) = 6500 \cdot [0{,}85 \cdot 4 + 0{,}07 \cdot 3 + 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}01 \cdot 1] + 12500 \cdot [0{,}01 \cdot 1] = 25300$ NJ

$F(5) = 6500 \cdot [0{,}85 \cdot 5 + 0{,}07 \cdot 4 + 0{,}03 \cdot 3 + 0{,}01 \cdot 2 + 0{,}01 \cdot 1] = 30485$ NJ.

Minimalni ukupni troškovi iznose *21430* NJ i dobijenu su za *y=3*, što znači da je optimalan broj elemenata koje treba kupiti pri kupovini nove mašine $y^* = 3$.

Zadatak je moguće rešiti direktno koristeći minimum funkcije ukupnih troškova koji za $y^*$ (optimalni broj elemenata koje treba nabaviti zajedno sa mašinom) zadovoljava sledeću nejednačinu:

$$P(x \le y^* - 1) < \frac{C_2}{C_1 + C_2} < P(x \le y^*),$$

gde $P(x \le y) = \sum_{x=0}^{y} p(x)$ predstavlja funkciju raspodele verovatnoća odnosno kumulativni zakon raspodele verovatnoća zamene datog elementa na mašini.

Kumulativni zakon raspodele verovatnoća diskretne slučajne promenljive *x* određuje se kao:

| y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | >6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | 85 | 7 | 3 | 3 | 1 | 1 | 0 |
| *p(x)* | 0,85 | 0,07 | 0,03 | 0,03 | 0,01 | 0,01 | 0 |
| *P(x≤y)* | 0,85 | 0,92 | 0,95 | 0,98 | 0,99 | 1 | ÷ |

Odnos troškova nabavke elementa $C_2 /(C_1 + C_2)$ iznosi:

$$\frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{125000}{6500 + 125000} = 0{,}9505.$$

Zamenjujući dobijene vrednosti u gornju nejednačinu dobija se da se odnos $C_2 /(C_1 + C_2)$ nalazi između vrednosti kumulativnog zakona raspodele za *y=2* i *y=3*, odnosno:

$$P(x \le 2) = 0{,}95 < 0{,}9505 < 0{,}98 = P(x \le 3),$$

što znači da je optimalan broj elemenata koje treba kupiti pri kupovini mašine $y^* = 3$, dok ukupni troškovi u tom slučaju iznose:

$$F(y^* = 3) = 6500 \cdot [0{,}85 \cdot 3 + 0{,}07 \cdot 2 + 0{,}03 \cdot 1] + 12500 \cdot [0{,}01 \cdot 1 + 0{,}01 \cdot 2]$$

$$F(y^* = 3) = \mathbf{21430} \text{ NJ}.$$

## Zadatak 03a:

Za podatke iz prethodnog zadatka, pod pretpostavkom da troškovi interventne nabavke nisu poznati, proceniti troškove interventne nabavke ukoliko se sa mašinom kupuju samo dva elementa preko kojih se vrši automatsko upravljanje mašinom.

<u>Rešenje:</u>

Procena troškova interventne nabavke $C_2$ vrši se na osnovu nejednačine preko koje se određuje minimum funkcije ukupnih troškova, tj.:

$$P(x \leq y-1) < \frac{C_2}{C_1 + C_2} < P(x \leq y).$$

gde je $y=2$ – broj elemenata koji se kupuju zajedno sa mašinom.

Za vrednosti kumulativnog zakona raspodele za $y=1 \rightarrow P(x \leq 1) = 0{,}92$ i $y=2 \rightarrow P(x \leq 2) = 0{,}95$ i troškove nabavke elementa pri kupovini zajedno sa mašinom $C_1 = 6500$ NJ, dobija se nejednačina preko koje se procenjuju troškovi interventne nabavke $C_2$:

$$0{,}92 < \frac{C_2}{6500 + C_2} < 0{,}95.$$

Donja granica troškova interventne nabavke iznosi:

$$\frac{C_2}{6500 + C_2} = 0{,}92 \rightarrow C_2 = \frac{0{,}92 \cdot 6500}{1 - 0{,}92} = 74750 \text{ NJ},$$

dok gornja granica troškova interventne nabavke iznosi:

$$\frac{C_2}{6500 + C_2} = 0{,}95 \rightarrow C_2 = \frac{0{,}95 \cdot 6500}{1 - 0{,}95} = 123500 \text{ NJ}.$$

Procena je da se troškovi interventne nabavke $C_2$, u slučaju kupovine samo dva elementa pri kupovini mašine, nalaze u intervalu:

$$74500 < C_2 < 123500 \text{ NJ}.$$

## Zadatak 04:

Potrebno je optimizirati nivo zaliha određenog rezervnog dela. Potrošnja rezervnih delova je ravnomerna ali stohastičke prirode. Popuna zaliha se vrši na početku svakog meseca dok se vreme popune zaliha se može zanemariti. Statističkom analizom su utvrđene verovatnoće za pojedine obime potražnje rezervnog dela u toku meseca i dati su tabelarno. Troškovi skladištenja po jedinici rezervnog dela u toku meseca su $C_1 = 250$ NJ a troškovi negativnih zaliha iznose $C_1 = 650$ NJ. Odrediti optimalni nivo zaliha $y^*$ i iznos minimalnih ukupnih troškova $F(y^*)$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Potreban broj rez. delova u toku meseca *(x)* | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Verovatnoća potražnje *(x)* rez. delova – *p(x)* | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,35 | 0,25 | 0,1 | 0 |

Rešenje:

Kako je potrošnja rezervnih delova ravnomerna (kontinualna) i stohastičke je prirode i pošto je intenzitet nabavke rezervnih delova konstantan a vreme popune zaliha se može zanemariti za određivanje optimalnog nivoa zaliha odnosno optimalnih ukupnih troškova čuvanja zaliha koristi se *opšti model upravljanja zalihama sa slučajnom potražnjom*.

Optimalni nivo zaliha $y^*$ dobija se nalaženjem minimuma funkcije ukupnih troškova *F(y)*, tj.

$$F(y) = C_1 \cdot \sum_{x=0}^{y} p(x) \cdot \left( y - \frac{x}{2} \right) + \sum_{x=y+1}^{\infty} \left[ C_1 \cdot \frac{y^2}{2 \cdot x} + C_2 \cdot \frac{(x-y)^2}{2 \cdot x} \right] \cdot p(x),$$

odnosno iz nejednačine:

$$G(y^* - 1) < \frac{C_2}{(C_1 + C_2)} < G(y^*)$$

gde je:

$$G(y) = P(x \le y) + \left( y + \frac{1}{2} \right) \cdot \sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}.$$

Radi lakšeg izračunavanja i bolje preglednosti postupak izračunavanja funkcije *G(y)* biće prikazan tabelarno. (*y* – nivo zaliha)

| $y$ | $x$ | $p(x)$ | $\frac{p(x)}{x}$ | $\sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}$ | $(y+\frac{1}{2}) \cdot \sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}$ | $P(x \le y)$ | $G(y) = P(x \le y) + (y+\frac{1}{2}) \cdot \sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 0 | 0 | 0,2093 | 0,5233 | 0 | 0,5233 |
| 3 | 3 | 0,1 | 0,0333 | 0,1760 | 0,6160 | 0,1 | 0,7160 |
| 4 | 4 | 0,2 | 0,0500 | 0,1260 | 0,5670 | 0,3 | 0,8670 |
| 5 | 5 | 0,35 | 0,0700 | 0,0560 | 0,3080 | 0,65 | 0,9580 |
| 6 | 6 | 0,25 | 0,0417 | 0,0143 | 0,0930 | 0,9 | 0,9930 |
| 7 | 7 | 0,1 | 0,0143 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 8 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Odnos troškova skladištenja i negativnih zaliha rezervnih delova $C_2/(C_1+C_2)$ iznosi:

$$\frac{C_2}{C_1+C_2} = \frac{650}{250+650} = 0{,}7222\,.$$

Zamenjujući dobijene vrednosti u gornju nejednačinu dobija se da se odnos $C_2/(C_1+C_2)$ nalazi između vrednosti funkcije *G(y)* za *y=3* i *y=4*, odnosno:

$$G(3) = 0{,}7160 < 0{,}7222 < 0{,}8670 = G(4)\,,$$

što znači da je optimalan nivo zaliha koje treba držati u skladištu svakog meseca $y^* = 4$, dok ukupni troškovi u tom slučaju iznose:

$$F(y^*=4) = 250 \cdot \sum_{x=0}^{4} p(x) \cdot \left(4 - \frac{x}{2}\right) + \sum_{x=5}^{\infty} \left[250 \cdot \frac{4^2}{2 \cdot x} + 650 \cdot \frac{(x-4)^2}{2 \cdot x}\right] \cdot p(x)$$

$F(y^*=4) = 162{,}5 + 252 + 118{,}79 = \mathbf{533{,}29}$ NJ.