EMPIRIJSKO ODREĐIVANJE POUZDANOSTI I POUZDANOST SLOŽENIH SISTEMA

Statistička obrada rezultata eksperimenta – merenja

Rezultati merenja obično se prikazuju u vidu tabele (tabela 1). Ako se meri neprekidna slučajna veličina, tada se interval realizacije posmatrane (merene) slučajne veličine podeli na *k* podintervala jednake dužine:

$$[x_0; x_1), [x_1; x_2), \ldots, [x_{k-1}; x_k]$$

i određuje se broj realizacija slučajne veličine koje upadaju u podinterval *i* (*i*=1,2, ..., *k*) tzv. apsolutne učestalosti - m_i i izračunaju se relativne učestalosti - m_i / n za svaki od *i* podintervala. Izgled tabele je sledeći:

Tabela 1. Tabelarni prikaz rezultata merenja.

Podnterval	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	....	$[x_{k-1}; x_k]$	
Apsolutne učestalosti m_i	m_1	m_2	....	m_k	$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$
Relativne učestalosti m_i / n	m_1 / n	m_2 / n	....	m_k / n	$\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{n} = 1$

gde je *n* – ukupan broj realizacija slučajne veličine (izvršenih merenja).

Dužina podintervala *h* se određuje na osnovu formule:

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k},$$

gde je:

$x_{max} = x_k$ - maksimalna vrednost slučajne veličine u uzorku,

$x_{min} = x_0$ - minimalna vrednost slučajne veličine u uzorku,

$k = [5 \cdot \log(n)]$ - preporučeni broj podintervala [najveći ceo broj] (tabela 2).

Tabela 2. Preporučeni broj podintervala *k*.

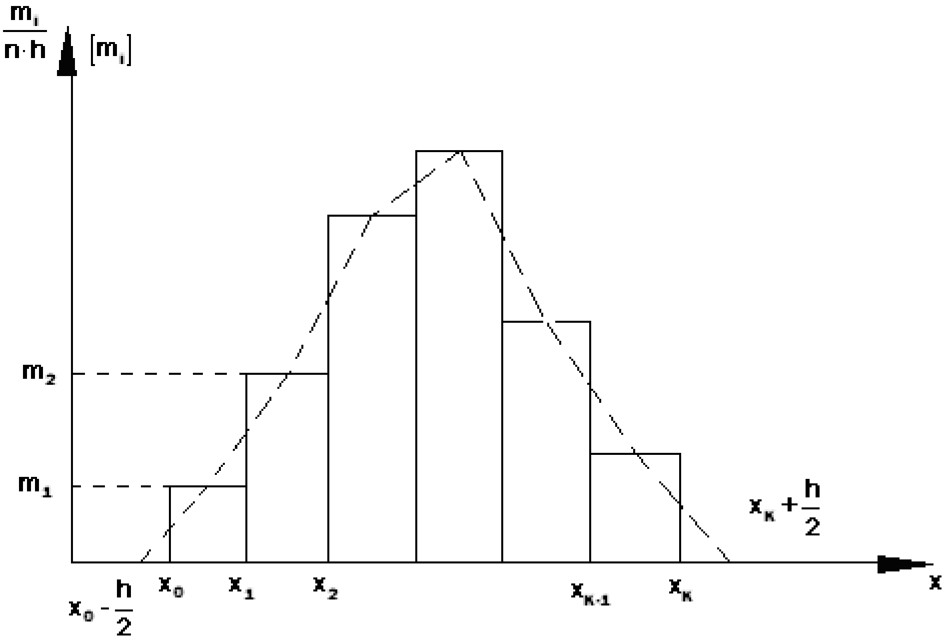
n	50	100	500	1000	10000
k	8	10	13	15	20

Rezultati merenja se grafički prikazuju preko histograma odnosno poligona. Histogram i poligon (slika 1) mogu biti apsolutni i relativni tj. u zavisnosti da li pokazuju apsolutne ili relativne učestalosti. (*1)

Histogram relativnih učestalosti je stepenasta figura koja se sastoji od pravougaonika čija je osnova dužina podintervala h a visina $m_i/(n \cdot h)$ tako da su njihove površine jednake relativnim učestalostima datog podintervala a ukupna površina jedinici.

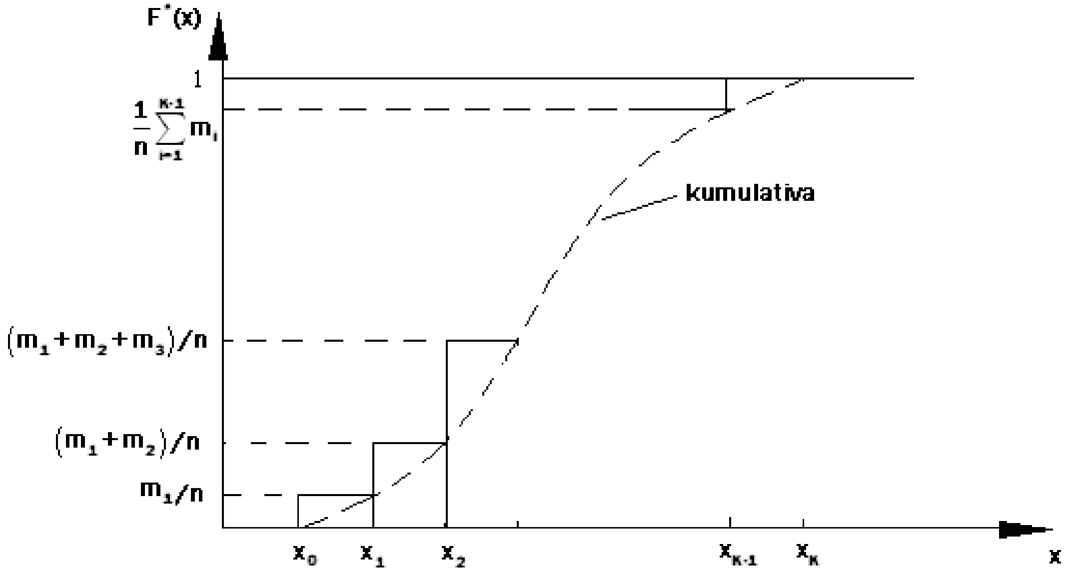
Poligon se dobija spajanjem tačaka:

$$(-\frac{h}{2}+x_0,0),(x_1-\frac{h}{2},m_1),(x_2-\frac{h}{2},m_2),\ldots,(x_{k-1}-\frac{h}{2},m_{k-1}),(x_k-\frac{h}{2},m_k),(x_k+\frac{h}{2},0)$$



Slika 1. Histogram i poligon.

Oblik histograma odnosno poligona upućuje na to kojoj teorijskoj raspodeli najverovatnije pripada dati uzorak. Empirijska (statistička) funkcija raspodele $F^*(x)$ (slika 2) dobija se na osnovu histograma relativnih učestalosti (odnosno početne tabele sa realizacijama slučajne veličine tj. rezultatima merenja).



Slika 2. Empirijska funkcija raspodele.

χ^2 – Test

Utvrđivanje pripadnosti uzorka teorijskoj raspodeli moguće je izvršiti primenom χ^2–testa, tj. proverava se saglasnost empirijske funkcije raspodele $F^*(x)$ sa pretpostavljenom teorijskom funkcijom raspodele $F(x)$. (*2)
Proverava se nulta hipoteza da: pretpostavljena teorijska funkcija raspodele $F(x)$ dobro reprezentuje dati uzorak.

<u>1. korak</u>
Statistički se obradi uzorak (odrede se dužine podintervala, relativne učestalosti, nacrta histogram i poligon) i na osnovu toga pretpostavi se teorijska raspodela.
<u>2. korak</u>
Izračunavaju se verovatnoće p_i da slučajna veličina X uzme vrednost u podintervalu $[x_{i-1}; x_i)$ pomoću pretpostavljene teorijske funkcije raspodele:

$$p_i = P(x_{i-1} \le X < x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cdot dx = F(x_i) - F(x_{i-1}), \quad i = 1,2,\ldots,k .$$

<u>3. korak</u>
Izračunavanje teorijskih učestalosti $n \cdot p_i$ za podintervale $[x_{i-1}; x_i)$.
<u>4. korak</u>
Izračunavanje veličine χ^2_{sr} (kriterijum):

$$\chi^2_{sr} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} .$$

<u>5. korak</u>
Izračunavanje broja stepeni slobode ν:

$$\nu = k - r - 1,$$

gde je: k - broj podintervala, r - broj parametara pretpostavljene teorijske raspodele koji se određuju na osnovu uzorka.
<u>6. korak</u>
Usvaja se prag značajnosti α (obično α=0.01; α=0.05) i iz tabela za χ^2 raspodelu (tabela 3) se određuje vrednost χ^2_{kr} kao:

$$\chi^2_{kr} = \chi^2(\alpha, \nu),$$

ako je:

$\chi^2_{sr} \ge \chi^2_{kr}$: nulta hipoteza se odbacuje,

$\chi^2_{sr} < \chi^2_{kr}$: nulta hipoteza se prihvata.

$P(\chi^2_{sr} \ge \chi^2_{kr}) = \alpha$ - predstavlja verovatnoću da je odbačena nulta hipoteza.

Primer izveštaja pri testiranju uzorka χ^2–testom prikazan je na slici 3.

KARAKTERISTIKE UZORKA :

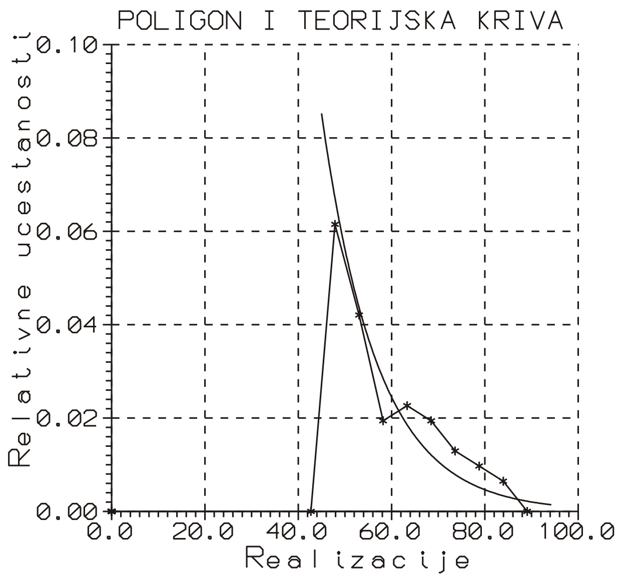
Obim uzorka .... N = 60
Minimalni clan .... Xmin = 45.3000
Maximalni clan .... Xmax = 86.5000
Srednja vrednost .... Xsr = 58.6517
Disperzija .... D[x] = 119.7255
Srednje kvadratno odstupanje ... σ[x] = 10.9419
Broj intervala .... Ki = 8
Duzina intervala .... h = 5.1500

Parametar Ekspon. raspodele .... λ = 0.0831

Intervali	Ucestalosti	Verovatnoce	HISR
45.3000 - 50.4500	19	0.3483	0.173
50.4500 - 55.6000	13	0.2270	0.028
55.6000 - 60.7500	6	0.1479	0.932
60.7500 - 65.9000	7	0.0964	0.256
65.9000 - 71.0500	6	0.0628	1.320
71.0500 - 76.2000	4	0.0409	0.970
76.2000 - 81.3500	3	0.0267	1.223
81.3500 - 86.5000	2	0.0499	0.331
	60	1.0000	5.231

IZVESTAJ :

Teorijska vrednost za 5 stepeni slobode i prag znacajnosti
α = 0.3000 za HI-KVADRAT raspodelu iznosi HIt = 6.0640
Posto je HIkr>HIsr [6.0640 > 5.2313] mozemo prihvatiti hipotezu
da uzorak ima Eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ = 0.083
sa pragom znacajnosti α = 0.01.



Slika 3. Izveštaj o testiranju uzorka χ^2_{kr}–testom.

U tabeli 3 prikazane su vrednosti χ^2 raspodele za odgovarajući broj stepeni slobode ν i prag značajnosti α.

Tabela 3. Vrednosti χ^2_{kr} raspodele.

Kritične tačke raspodele χ^2

Broj stepeni slobode ν	Nivo značajnosti α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Empirijsko određivanje pouzdanosti

Prethodno prikazano određivanje pripadnosti uzorka određenoj teorijskoj raspodeli bazira se na činjenici da je uzorak dovoljno velik, pa postoji mogućnost da se interval realizacije slučajne veličine podeli u podintervale.

Slučaj malog uzorka

U slučaju da je veličina uzorka *n* manja od 20, 30 ili 50 može se primeniti metoda medijalnog ranga za određivanje funkcije raspodele nepouzdanosti (otkaza) *F(t)*.

Metoda medijalnog ranga (**3)
Neka je poznato samo 5 podataka o radu nekog elementa do otkaza. Ako je prvi element otkazao posle 3500h rada to odgovara da će 20% tih elemenata imati vek trajanja ispod 3500h. Kad bi imali 50 podataka o istoj pojavi oko broja 3500 će se javiti još približno 10 brojeva većih ili manjih od 3500. Eksperimentalno utvrđena metoda medijalnog ranga, podatku o vremenu rada prvog elementa do otkaza ne daje verovatnoću 20% već neku drugu koja bolje opisuje stvarno stanje u odnosu na celu populaciju.

$$F(t) = MR(t) = \frac{j(t) - 0.3}{n + 0.4} \ ,$$

gde je:
j(*t*) – redni broj rezultata po rastućem redu (kako su se dešavali otkazi npr. 1(3500); 2(4230); itd.),
n – ukupan broj rezultata.

Srednje vreme rada do otkaza(**4)

Ukoliko je poznato da se vreme rada elementa do otkaza ponaša po Eksponencijalnoj raspodeli, moguće je da se srednje vreme rada do otkaza za celu populaciju odredi iz formule:

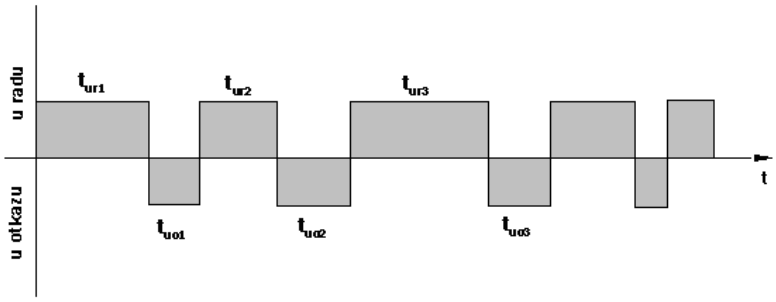
$$T_0 = \frac{1}{r} \cdot \left[\sum_{i=1}^{r} t_i + (n - r) \cdot t_r \right],$$

gde je:
n – broj posmatranih elemenata, a ispitivanje se vrši dok ne otkaže *r* elemenata,
t_i (i=1,2,....,*r*) – vreme otkaza *i*-tog elementa
t_r – vreme trajanja ispitivanja, vreme otkaza *r*-tog elementa.

Ova metoda se u praksi često primenjuje u slučaju ispitivanja veka trajanja elementa.

Empirijske vrednosti pouzdanosti, nepouzdanosti i intenziteta otkaza

Na osnovu vremenske slike stanja određenog elementa mogu se utvrditi broj:
1. pojava "u radu" (*n*) i "u otkazu" (*m*), i
2. ukupno vreme rada. (slika 4)



Slika 4. Promena stanja elementa u vremenu.

Srednje vreme "u radu" (srednje vreme bezotkaznog rada):

$$\bar{t}_{ur} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} t_{ur_i} .$$

Srednje vreme "u otkazu":

$$\bar{t}_{uo} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} t_{uo_i} .$$

Disperzija vremena "u radu":

$$D(t_{ur}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (t_{ur_i} - \bar{t}_{ur})^2$$, za *n*>30; ako je *n*≤30 deli se sa *n*-1.

Disperzija vremena "u otkazu":

$$D(t_{uo}) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} (t_{uo_i} - \bar{t}_{uo})^2$$, za *m*>30; ako je *m*≤30 deli se sa *m*-1.

Empirijska vrednost funkcije pouzdanosti *R*(*t*) se može odrediti praćenjem rada do otkaza većeg broja elemenata čija se pouzdanost traži. Verovatnoća bezotkaznog rada do trenutka *t* se određuje ispitivanjem *n* elemenata i to:
Ako do trenutka *t* <u>ne otkaže</u> *n*(*t*) elemenata onda je prema definiciji verovatnoće funkcija pouzdanosti u trenutku *t* približno jednaka:

$$R(t) \approx \frac{n(t)}{n} .$$ (*5)

Količnik *n*(*t*)/*n* daje tačniju vrednost funkcije pouzdanosti *R*(*t*) u trenutku *t* kada $n \to \infty$, tada se odnos $R(t) = \frac{n(t)}{n}$ naziva se empirijska funkcija pouzdanosti.

Gustina funkcije nepouzdanosti *f*(*t*) eksperimentalno se određuje tako što se posmatra rad velikog broja elemenata do otkaza. Neka je $m(t, t+\Delta t)$ broj elemenata koji su otkazali za vreme $(t, t+\Delta t)$, tada je:

$$n \cdot f(t) \cdot \Delta t \approx m(t, t+\Delta t),$$

odakle je:

$$f(t) \approx \frac{m(t, t+\Delta t)}{n \cdot \Delta t}.$$

Funkcija *f*(*t*) na intervalu $(t, t+\Delta t)$ predstavlja srednji broj otkaza u jedinici vremena koji dolazi na jedan ispravan element.

Funkcija nepouzdanosti *F*(*t*) određuje se iz izraza:

$$F(t) + R(t) = 1 \text{ ili } F(t) = \frac{m(t)}{n}, \text{(*6)}$$

gde je *m*(*t*) – broj elemenata koji je otkazao do trenutka *t*.

Intenzitet otkaza $\lambda(t)$ eksperimentalno se određuje kao:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\dfrac{m(t, t+\Delta t)}{n \cdot \Delta t}}{\dfrac{n(t)}{n}} = \frac{m(t, t+\Delta t)}{n(t) \cdot \Delta t}, \text{(*7)}$$

gde je:
n(*t*) – broj elemenata koji su do trenutka *t* ostali ispravni,
$m(t, t+\Delta t)$ – broj elemenata koji su otkazali u intervalu $(t, t+\Delta t)$.

λ(t) – predstavlja srednji broj otkaza u jedinici vremena, koji u datom trenutku dolazi na jedinicu onih elemenata koji nisu otkazali.

POUZDANOST SLOŽENIH SISTEMA

Sistem se sastoji od elemenata, čije su pouzdanosti zadate i koji *otkazuju nezavisno jedan od drugog*. Sistem se sastoji od *n* elemenata čije su funkcije pouzdanosti $R_1(t), R_2(t), ..., R_n(t)$. Potrebno je odrediti funkciju pouzdanosti sistema $R_s(t)$ pomoću funkcija pouzdanosti elemenata $R_i(t), i = 1,2,...,n$.

Redna (serijska) veza elementa

Osnovna karakteristika ovog načina povezivanja elemenata sistema je da otkaz jednog elementa izaziva otkaz celog sistema, što znači da bi sistem radio stanje svih elemenata moraju biti „u radu". Šema rednog povezivanja elemenata je sledeća: (slika 5)

Slika 5. Šema rednog povezivanja elemenata. (*8)

Kako funkcija pouzdanosti elementa predstavlja verovatnoću da element neće otkazati do unapred zadatog trenutka *t*, to verovatnoća rada sistema do unapred zadatog trenutka *t* predstavlja presek (proizvod) verovatnoća da svaki od elemenata neće otkazati do unapred zadatog trenutka *t*. Drugim rečima funkcija pouzdanosti sistema, gde su elementi redno povezani, određuje se kao proizvod funkcija pouzdanosti elemenata. Funkcija pouzdanosti sistema $R_s(t)$ ima sledeći oblik:

$$R_s(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot ... \cdot R_n(t).$$ (*9)

ili izraženo preko intenziteta otkaza:

$$e^{-\int_0^t \lambda_s(t) \cdot dt} = \prod_{i=1}^{n} e^{-\int_0^t \lambda_i(t) \cdot dt} = e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \cdot dt}.$$

Iz gornjeg izraza se dobija da je intenzitet otkaza sistema jednak: (*10)

$$\lambda_s(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t).$$

U slučaju kad svi elementi imaju konstantan intenzitet otkaza (eksponencijalna raspodela vremena rada elemenata do otkaza) dobija se:

$$\lambda_i(t) = \lambda_i = const.; \quad \lambda_s = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n,$$

tj. pouzdanost sistema kao:

$$R_s(t) = e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda_n \cdot t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) \cdot t}.$$

što znači da je pouzdanost sistema, pri rednoj vezi i konstantnom intenzitetu otkaza svih elemenata, eksponencijalna funkcija.

Srednje vreme bezotkaznog rada sistema od n redno povezanih elemenata, sa konstantnim intenzitetom otkaza, T_0 je jednako: (*11)

$$T_0 = \frac{1}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \ldots + \frac{1}{T_n}}.$$

gde je T_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ - srednje vreme bezotkaznog rada i-tog elementa.

Ako svih n elemenata imaju istu funkciju pouzdanosti $R_i(t) = R(t)$, samim tim in iste intenzitete otkaza $\lambda_i(t) = \lambda(t)$, tada je funkcija pouzdanosti sistema jednaka:

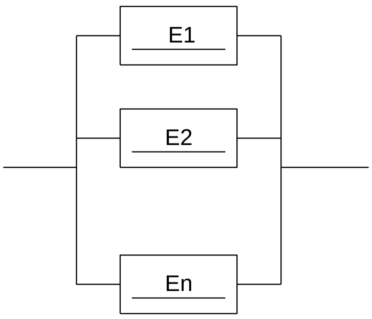
$$R_s(t) = [R(t)]^n; \qquad \lambda_s(t) = n \cdot \lambda(t).$$

U slučaju da je intenzitet otkaza konstantan dobija se:

$$\lambda_s = n \cdot \lambda; \quad T_0 = \frac{T}{n}, \text{ gde je } T = \frac{1}{\lambda}.$$

Paralelna veza elemenata

Osnovna karakteristika ovog načina povezivanja elemenata sistema je da otkaz sistema nastupa kada svi elementi otkažu, što znači da bi sistem radio stanje bar jednog elementa mora biti „u radu“. Šema paralelnog povezivanja elemenata je sledeća: (slika 6)



Slika 6. Šema paralelnog povezivanja. (*12)

Kako funkcija nepouzdanosti elementa predstavlja verovatnoću da će element otkazati do unapred zadatog trenutka t, to verovatnoća da će sistem otkazati do unapred zadatog trenutka t predstavlja presek (proizvod) verovatnoća da će svaki od elemenata otkazati do unapred zadatog trenutka t. Drugim rečima funkcija nepouzdanosti sistema (verovatnoća otkaza) gde su elementi paralelno povezani određuje se kao proizvod funkcija nepouzdanosti elemenata. Funkcija nepouzdanosti (otkaza) sistema $F_s(t)$ ima sledeći oblik:

$$F_s(t)=F_1(t)\cdot F_2(t)\cdot .....\cdot F_n(t),$$

tj. verovatnoća otkaza sistema je jednaka proizvodu verovatnoća otkaza elemenata.

Pouzdanost sistema koji se sastoji od n paralelno vezanih elemenata čije su pouzdanosti $R_i(t), i=1,2,...,n$ je: (*13)

$$R_s(t)=1-[1-R_1(t)]\cdot[1-R_2(t)]\cdot ....\cdot[1-R_n(t)].$$

U slučaju da svi elementi imaju istu pouzdanost tj. $R_i(t)=R(t), i=1,2,...,n$ dobija se:

$$R_s(t)=1-[1-R(t)]^n.$$

U slučaju kada je intenzitet otkaza svakog elementa konstantan i kada su intenziteti otkaza elemenata međusobno jednaki tj. $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=\lambda=const.$ tada pouzdanost sistema koji se sastoji od n elemenata vezanih paralelno ima sledeću pouzdanost:

$$R_s(t)=1-[1-e^{-\lambda\cdot t}]^n.$$

tj. pouzdanost sistema se ne ponaša po eksponencijalnoj raspodeli.

Srednje vreme bezotkaznog rada sistema sa paralelnom vezom od n elemenata gde je $\lambda_i=\lambda=const.\, i=1,...,n$ iznosi: (*14)

$$T_0=\int_0^\infty[1-(1-e^{-\lambda t})^n]\cdot dt,^1$$

$$T_0=\frac{1}{\lambda}\cdot\int_0^1\frac{1-x^n}{1-x}\cdot dx=\frac{1}{\lambda}\cdot\int_0^1\left(1+x+....+x^{n-1}\right)\cdot dx,$$

$$T_0=\frac{1}{\lambda}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{n}\right).$$

Za velike vrednosti n:

$$T_0=\frac{1}{\lambda}\cdot[\ln(n)+C];\ \ C=0.577\rightarrow \text{Ojlerova konstanta.}$$

---

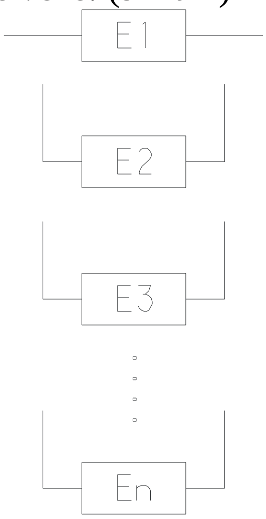
[1] $1-e^{-\lambda t}=x$; $t=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{1-x}$; $dt=\frac{dx}{\lambda(1-x)}$.

Pasivna paralelna veza (**15)

Pod pasivnom paralelnom vezom ili "hladnom rezervom" podrazumeva se postojanje paralelnog elementa čije se uključivanje u rad ostvaruje samo kada element koji radi otkaže. Tada prvi sledeći element postaje aktivan i radi, a sledeći, ako ga ima, postaje rezerva.

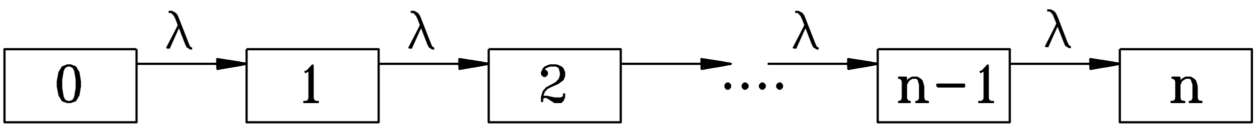
Ako u sistemu ima ukupno ***n*** elemenata, tada je element 1 – osnovni element a elementi 2, ..., *n* su rezervni elementi.

Blok dijagrama pasivne paralelne veze: (slika 7)



Slika 7. Blok dijagram pasivne paralelne veze – hladna rezerva.

Stanja takvog sistema, pod pretpostavkom da je intenzitet otkaza svih *n* elemenata međusobno jednak i konstantan tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \lambda = const.$ (eksponencijalna raspodela vremena rada do otkaza), mogu se prikazati preko dijagrama stanja kao: (slika 8 – čist proces „rađanja")



Slika 8. Dijagram stanja sistema sa pasivnom paralelnom vezom.

Svako od *n* stanja sistema (0, 1, ..., *n*) predstavlja broj elemenata koji su do tada otkazali tj. ako se npr. sistem nalazi u stanju x=2 to znači da je otkazalo ukupno dva elementa (osnovni i jedan rezervni). Ako se sistem nalazi u stanju x=n to znači da je otkazalo svih *n* elemenata tj. da je otkazao ceo sistem. Svako stanje sistema karakteriše se verovatnoćama stanja. Verovatnoća stanja x=n je verovatnoća da je sistem otkazao (otkazalo je svih *n* elemenata) tj. ona predstavlja nepouzdanost sistema.

Stanja sistema prikazanog dijagramom na slici 8 mogu se opisati sistemom diferencijalnih jednačina koji ima sledeći oblik:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_0(t),$$
$$\vdots$$
$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda \cdot p_{k-1}(t) - \lambda \cdot p_k(t); \quad k = 1, \ldots, n-1,$$
$$\vdots$$
$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda \cdot p_{n-1}(t).$$

Početni uslovi za rešavanje gornjeg sistema su:

$$p_k(0) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases},$$

što odgovara slučaju da su na početku procesa svi elementi ispravni, tj. nula ih je otkazalo.

Rešenja sistema dobijaju se rešavanjem jedne po jedne diferencijalne jednačine sistema (počevši od prve tj. za k=0). Matematičkom indukcijom se pokazuje da su rešenja oblika:

$$p_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}; \qquad k = 0, 1, \ldots, n\text{-}1,$$

$$p_n(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t} = F_S(t).$$

Verovatnoća n-tog stanja sistema predstavlja funkciju nepouzdanosti sistema, dok se funkcija pouzdanosti sistema sa pasivnom paralelnom vezom od n elemenata dobija kao:

$$R_S(t) = 1 - F_S(t),$$

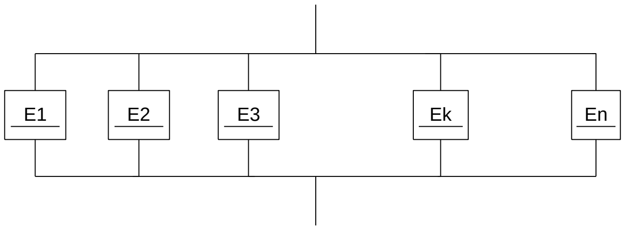
i iznosi:

$$R_S(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t} = \left[1 + \lambda \cdot t + \frac{(\lambda \cdot t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\lambda \cdot t)^{n-1}}{(n-1)!}\right] \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

Delimična paralelna veza (**16)

Primenjuje se kod sistema koji mogu uspešno da obavljaju svoju funkciju ako od ***n*** elemenata ispravno radi ***k*** elemenata npr. zavrtnjevi na točkovima automobila.

Blok dijagram delimične paralelne veze: (slika 9)



Slika 9. Blok dijagram delimične paralelne veze.

Ako se sistem sastoji, na primer, od tri jednaka i međusobno nezavisna elementa, tada su moguća stanja tog sistema sledeća:

$x_1x_2x_3;\ \bar{x}_1x_2x_3;\ x_1\bar{x}_2x_3;\ x_1x_2\bar{x}_3;\ \bar{x}_1\bar{x}_2x_3;\ \bar{x}_1x_2\bar{x}_3;\ x_1\bar{x}_2\bar{x}_3;\ \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3,$

gde x_i predstavlja događaj da je *i*-ti element ispravan a $\bar{x}_i$ predstavlja događaj da je *i*-ti element neispravan, dok $(x_i + \bar{x}_i)$ predstavlja skup svih mogućih stanja *i*-tog elementa.

Ako se elementi x_1, x_2 i x_3 nalaze u delimičnoj paralelnoj vezi i ako je za funkcionisanje sistema potrebno da budu ispravna najmanje dva elementa, tada će sistem funkcionisati ispravno ako se nalazi u jednom od sledećih stanja:

$x_1x_2x_3;\ \bar{x}_1x_2x_3;\ x_1\bar{x}_2x_3;\ x_1x_2\bar{x}_3.$

U ovom slučaju pouzdanost sistema $R_S(t)$ je jednaka zbiru verovatnoća svih onih stanja koja obezbeđuju ispravno funkcionisanje sistema. Pošto su elementi međusobno isti to se njihova pouzdanost, tj. verovatnoća da će dati element raditi (neće otkazati) u toku zadatog vremenskog intervala, može napisati kao:

$$R_1(t) = R_2(t) = R_3(t) = R(t).$$

Kako su elementi međusobno nezavisni to se verovatnoća pojedinih stanja sistema dobija kao proizvod verovatnoća da će dati element raditi u toku zadatog vremenskog intervala odnosno proizvod pouzdanosti elemenata:

$$\begin{aligned} R_S(t) &= R(t)\cdot R(t)\cdot R(t) + [1-R(t)]\cdot R(t)\cdot R(t) + \\ &+ R(t)\cdot[1-R(t)]\cdot R(t) + R(t)\cdot R(t)\cdot[1-R(t)] \end{aligned}$$

ili

$$R_S(t) = R^3(t) + 3\cdot R^2(t)\cdot[1-R(t)],$$

$$R_S(t) = 3\cdot R^2(t) - 2\cdot R^3(t).$$

Ovaj rezultat se može dobiti i primenom Binomne raspodele gde se sa $R(t)$ označava verovatnoća da će element biti ispravan (neće otkazati) u zahtevanom vremenskom intervalu (događaj *x*) tj. pouzdanost elementa, dok se sa $1-R(t)$ označava verovatnoća da element neće biti ispravan u zahtevanom vremenskom intervalu (događaj $\bar{x}$) tj. nepouzdanost elementa. Verovatnoća da će od ukupno 3 elemenata najmanje 2 biti ispravno, tj. pouzdanost takvog sistema, biće:

$$R_S(t) = P(i \geq 2) = \sum_{i=2}^{3} \binom{3}{i} \cdot [R(t)]^i \cdot [1 - R(t)]^{3-i} = 3 \cdot R^2(t) - 2 \cdot R^3(t) .$$

Uopšteno, pod pretpostavkom da su pouzdanosti svih elemenata u vezi jednake tj.:

$$R_1(t) = R_2(t) = ... = R_n(t) = R(t) ,$$

pouzdanost sistema $R_S(t)$ od $\boldsymbol{n}$ elemenata koji se nalaze u delimičnoj paralelnoj vezi određuje se preko Binomne raspodele kao:

$$R_S(t) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \cdot [R(t)]^i \cdot [1 - R(t)]^{n-i} ,$$

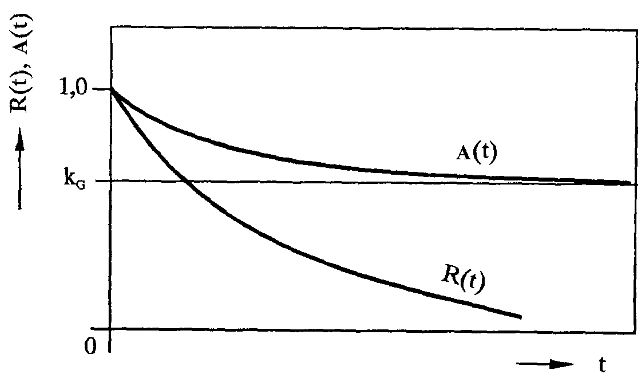
gde je sa $\boldsymbol{k}$ označen minimalan broj ispravnih elemenata potrebnih za ispravno funkcionisanje sistema.

Raspoloživost (gotovost)

Raspoloživost ili funkcija raspoloživosti $A(t)$ – definiše se kao verovatnoća da će sistem raditi u trenutku vremena t. (*17)

Funkcija pouzdanosti $R(t)$ – daje verovatnoću da će sistem raditi (neće otkazati) u toku vremenskog intervala $0 \div t$.

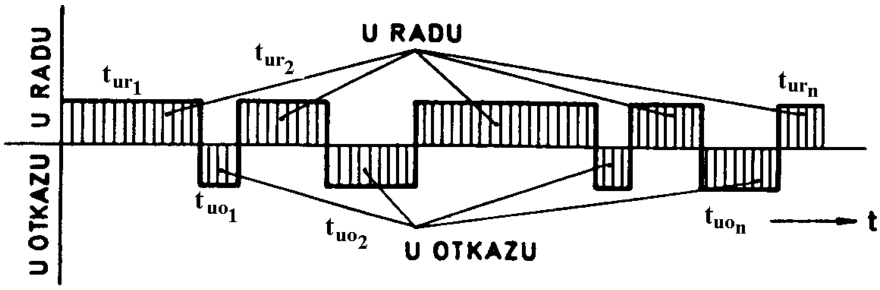
Zahtev raspoloživosti je mnogo oštriji nego zahtev pouzdanosti, generalno $R(t) \leq A(t)$. (slika 10)



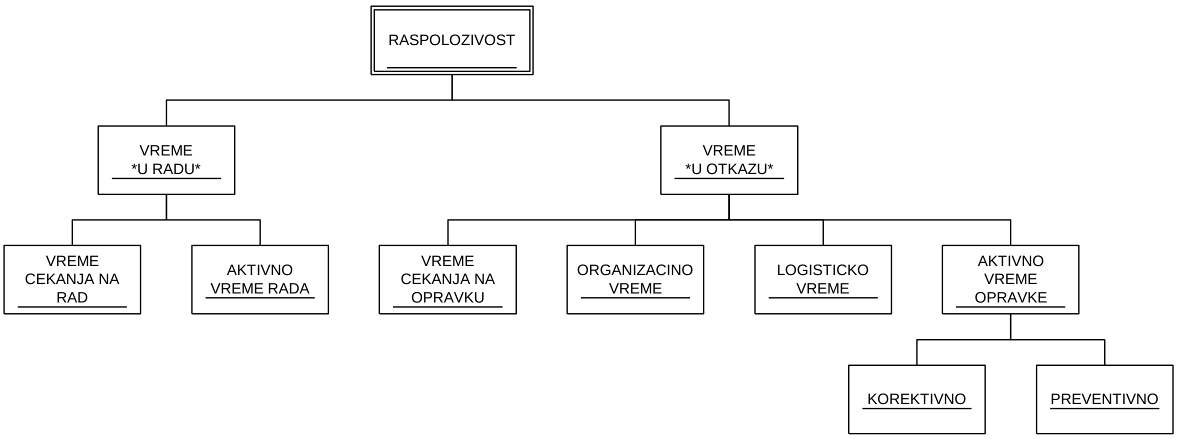
Slika 10. Odnos pouzdanosti $R(t)$ i raspoloživosti $A(t)$. (*18)

k_G - koeficijent raspoloživosti za $t \to \infty$ tj. stacionarna vrednost raspoloživosti.

Raspoloživost se izračunava preko odgovarajućeg odnosa vremena ispravnog stanja sistema (stanje “u radu“) i vremena stanja sistema “u otkazu“. (slika 11 i 12)



Slika 11. Stanje sistema.



Slika 12. Struktura vremena “u radu“ i “u otkazu“.

Raspoloživost se određuje na osnovu sledećeg izraza (*19):

$$A(t)=\frac{\sum t_{ur}}{\sum t_{ur}+\sum t_{uo}}; \qquad T_u=\sum t_{ur}+\sum t_{uo}$$

T_u - ukupno vreme rada.

Vreme ispravnog stanja “u radu“ (t_{ur}):(**20)

$$t_{ur}=t_{cr}+t_{ar}=t_{cr}+(t_k+t_p)$$

t_{cr} - vreme čekanja na rad,

t_{ar} - vreme u radu (aktivno),

t_k - vreme u radu između korektivnog održavanja,

t_p - vreme u radu između preventivnog održavanja.

Vreme “u otkazu“ (t_{uo}):(**21)

$$t_{uo}=t_a+t_{co}+t_l+t_{kpo}$$

t_a - organizaciono (administrativno) vreme,

t_{co} - vreme čekanja na opravku,

t_l - logističko vreme,

t_{kpo}- aktivno vreme korektivnog (t_{ko}) i preventivnog (t_{po}) održavanja,

$$t_{kpo}=t_{ko}+t_{po}.$$

Vreme “u otkazu“ se može podeliti generalno na:

t_{ao} - aktivno vreme “u otkazu“ tj. opravka, i

t_{do} - dodatno vreme “u otkazu“.

$$t_{do} = t_a + t_{co} + t_l \,.$$

Raspoloživost se može iskazati preko srednjih vrednosti vremena: “u radu“ i “u otkazu“.

$$A = \frac{\bar{t}_{ur}}{\bar{t}_{ur} + \bar{t}_{uo}} = \frac{1}{1 + \frac{\bar{t}_{uo}}{\bar{t}_{ur}}} = \frac{1}{1+B}\,;$$ B – specifično vreme “u otkazu“.

$\bar{t}_{ur} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} t_{ur_i}$ - srednje vreme “u radu“,

$\bar{t}_{uo} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} t_{uo_i}$ - srednje vreme “u otkazu“.

Ukoliko se pri određivanju raspoloživosti za vreme “u otkazu“ uzmu sva navedena vremena govori se o **operativnoj raspoloživosti**. (**22)

Kada se pri određivanju raspoloživosti za vreme “u otkazu“ uzme samo aktivno vreme korektivnog i preventivnog održavanja (t_{kpo}) govori se o **ostvarenoj raspoloživosti**. (**22)

Unutrašnja raspoloživost se dobija kada se za vreme “u otkazu“ uzme samo aktivno vreme korektivnog održavanja (t_{ko}).(**22)

Pogodnost održavanja

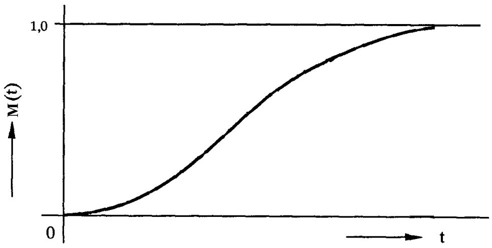
Funkcija raspodele slučajne promenljive Y (interval vremena “u otkazu“) definisana kao: (**23)

$$M(t) = P(Y \le t), \quad t \ge 0\,,$$

predstavlja funkciju **pogodnosti održavanja**.

Funkcija $M(t)$ predstavlja verovatnoću da će se element iz stanja “u otkazu“ vratiti u stanje “u radu“ do vremenskog trenutka t.

U realnim uslovima, trenutna popravka elementa nije moguća pa je $M(0)=0$, dok kako vreme odmiče logično je očekivati da raste verovatnoća da će se element iz stanja “u otkazu“ vratiti u stanje “u radu“ tj. $M(\infty)=1$. (slika 13)



Slika 13. Pogodnost održavanja u zavisnosti od vremena. (**23)

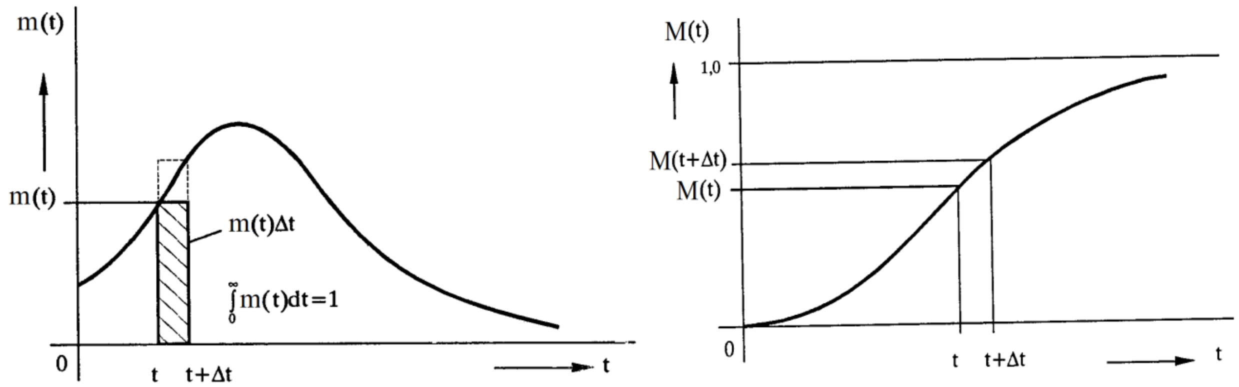
Matematičko očekivanje slučajne promenljive *Y*, $E(Y) = T_{uo}$ - srednje vreme “u otkazu“, predstavlja meru pogodnosti održavanja.

Gustina raspodele slučajne promenljive *Y* – intervala vremena “u otkazu“ definiše se kao:

$$m(t) = M'(t) = dM(t)/dt\,.$$

Intenzitet održavanja

Ako je element bio „u otkazu“ do vremenskog trenutka *t*, verovatnoća da će biti popravljen tj. preći u stanje „u radu“ u vremenskom intervalu *t*+Δ*t* predstavlja uslovnu verovatnoću. (slika 14.)



Slika 14. Gustina i funkcija raspodele funkcije pogodnosti održavanja.

$$P(t < Y < t + \Delta t | Y > t) = \frac{P(Y > t; t < Y < t + \Delta t)}{P(Y > t)} =$$

$$= \frac{P(t < Y < t + \Delta t)}{P(Y > t)} = \frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{1 - M(t)} =$$

$$= \frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{1 - M(t)} \cdot \Delta t \approx \frac{M'(t)}{1 - M(t)} \cdot \Delta t\,.$$

$$P(t < Y < t + \Delta t | Y > t) \approx \mu(t) \cdot \Delta t\,.$$

Intenzitet izvođenja postupka održavanja ili intenzitet održavanja je jednak:

$$\mu(t) = \frac{M'(t)}{1 - M(t)} = \frac{m(t)}{1 - M(t)}.$$

Intenzitet održavanja može se tumačiti i kao verovatnoća da element, koji je „u otkazu“ do vremenskog trenutka *t*, bude popravljen u sledećoj jedinici vremena.

Analitičko određivanje funkcije raspoloživosti

U malom broju slučajeva može se dobiti tačna formula za funkciju raspoloživosti. Npr. za funkciju nepouzdanosti (otkaza) $F(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$ i funkciju pogodnosti održavanja $M(t) = 1 - e^{-\mu \cdot t}$ funkcija raspoloživosti *A*(t) se dobija kao:

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-(\lambda + \mu) \cdot t},$$

odakle se stacionarna vrednost raspoloživosti dobija kao:

$$A = k_G = \lim_{t \to \infty} A(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{1}{1 + B}.$$

gde je: λ=const. – intenzitet otkaza i μ=const. – intenzitet održavanja.

PITANJA:

1. Način prikazivanja rezultata merenja.
2. Za šta služi χ^2–test.
3. Metoda medijalnog ranga.
4. Srednje vreme rada do otkaza u slučaju malog uzorka.
5. Izraz za empirijsko određivanje funkcije pouzdanosti.
6. Izraz za empirijsko određivanje funkcije nepouzdanosti.
7. Izraz za empirijsko određivanje intenziteta otkaza.
8. Šema i osnovna karakteristika rednog povezivanja elemenata.
9. Funkcija pouzdanosti sistema čiji su elementi redno povezani.
10. Intenzitet otkaza sistema čiji su elementi redno povezani.
11. Srednje vreme bezotkaznog rada sistema u slučaju konstantnog intenziteta otkaza redno vezanih elemenata.
12. Šema i osnovna karakteristika paralelnog povezivanja elemenata.
13. Funkcija pouzdanosti sistema čiji su elementi paralelno povezani.
14. Srednje vreme bezotkaznog rada sistema u slučaju konstantnog intenziteta otkaza paralelno vezanih elemenata.
15. Pasivna paralelna veza (opis i šema povezivanja).
16. Delimična paralelna veza (opis i šema povezivanja).
17. Definicija raspoloživosti.
18. Odnos pouzdanosti i raspoloživosti.
19. Izraz za određivanje raspoloživosti.
20. Struktura vremena „u radu“.
21. Struktura vremena „u otkazu“.
22. Vrste raspoloživosti i načini određivanja.
23. Pogodnost održavanja (definicija i promena u zavisnosti od vremena).