Линеарно програмирање

Линеарно програмирање се **примењује** за:

- утврђивање структуре програма и количине производа који ће обезбедити оптимално коришћење производних капацитета,
- проналажење **уских грла** (једна машина стално ради, а друге чекају да производ изађе из ње, тј. губи се драгоцено радно време машине),
- може се одредити најповољнији распоред машина,
- одређење задатака по радним местима да би се смањили трошкови,
- проблем утврђивања локације снабдевача да би се смањили трошкови транспорта (тзв. "транспортни проблем").

Проблем оптимизације производног програма:

Функција циља: $z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_j \cdot x_j + \dots + c_k \cdot x_k, \quad j = 1,2,\dots k, \quad x_i \geq 0$

Ограничења:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1k}x_k \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2k}x_k \leq b_2$$

$$\dots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{ik}x_k \leq b_i$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mk}x_k \leq b_m, \quad i = 1,2,\dots m$$

$$z = \sum_{i=1}^{k} c_j x_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j \leq b_i \quad , \quad j = 1,2,\dots k$$

где је:

k - број променљивих (врста производа)

x_j - количина j-тог производа.

Ограничења се односе на машине, кадрове, сировине, итд.

- Примера ради, дају се укупни капацитети низа машина, и времена потребна за обраду на свакој од машина и за сваку појединачну количину производа (означене са X); затим се поставља **максимална функција циља**, и **ограничења** по машинама.
- Ако се потом приступи **графо-аналитичком** поступку, треба нацртати праве које представљају ограничења и наћи **област преклапања домена** ових правих.
- Потом се изабере **произвољна тачка** из те области дефинисаности и за њу се **израчуна** функција циља.
- Добијена вредност потом постаје **резултат** максималне функције циља, и та нова права се онда транслира до **најудаљеније тачке** у области домена, и та тачка се сматра **максимумом,** под условом да максимална функција циља (права) више не пролази кроз домен.

ПРИМЕР ЗАДАТКА

1. У једном погону производе се делови А и В. Делови се производе на три групе машина M_1 (стругови), M_2 (глодалице) и M_3 (брусилице). У табели 1 су дати подаци везани за време потребно за извршење операција предвиђених у изради делова А и В.

Табела 1

Операција / Део	Стругање (min)	Глодање (min)	Брушење (min)
А	10	2,54	11
Б	15	5	7

X – број индекса/100

Капацитети машина по групама износе:
M_1 (стругови) – 15000 min.
M_2(глодалице) – 8000 min.
M_3 (брусилице) – 12000 min.
У изради дела учествују радници категорија – металостругар и металоглодач. У табели 2 дати су подаци о времену ангажовања радника одређене категорије у производњи одређеног дела.

Табела 2

Операција / Део	Металостругар (h)	Металоглодач (h)
А	4	2,54
Б	5	3

Расположиви фонд радних часова радника категорије:
Металостругар – 1470 часа/раднику годишње
Металоглодач – 1470 часа/раднику годишње
У производњи је ангажовано 10 металостругара и 9 металоглодача.

Израчунати колико делова А и В треба производити да би:
а) максимално били искоришћени машински капацитети
б) максимално био искоришћен кадровски потенцијал.

Дати задатак решити графо-аналитичким поступком.
Прокоментарисати резултат.

а)
x_1 = број делова А
x_2 = број делова В
z = величина потребног капацитета за производњу делова А и В.

Машина / Део	M_1 [min]	M_2 [min]	M_3 [min]	Укупно време обраде
А	10	2,54	11	23,54
Б	15	5	7	27
Расположиви капацитет	15000	8000	12000	35000

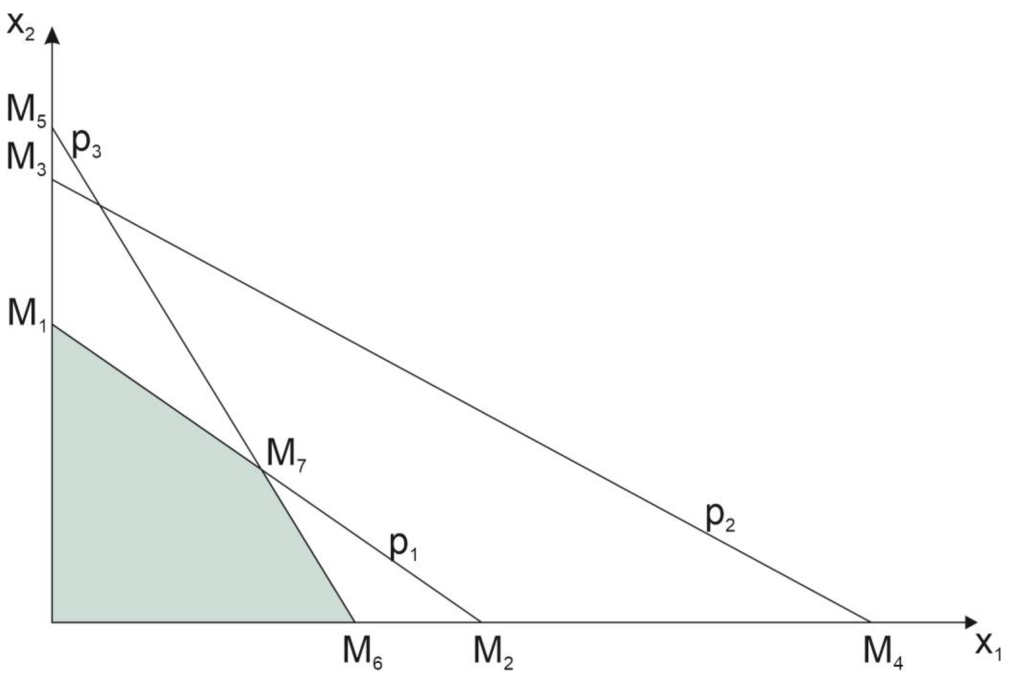
Ограничења: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$
Функција циља: $z_{max} = 23{,}54x_1 + 27x_2$
Функција ограничења:
1. $10x_1 + 15x_2 \leq 15000$
2. $2{,}54x_1 + 5x_2 \leq 8000$
3. $11x_1 + 7x_2 \leq 12000$

Графоаналитички поступак:

1. $\left.\begin{array}{lll} x_1 = 0 & x_2 = 1000 \Rightarrow & M_1(0{,}1000) \\ x_2 = 0 & x_1 = 1000 \Rightarrow & M_2(1500{,}0) \end{array}\right\} p_1$

2. $\left.\begin{array}{lll} x_1 = 0 & x_2 = 1600 \Rightarrow & M_3(0{,}1600) \\ x_2 = 0 & x_1 = 1106{,}5 \Rightarrow & M_4(3149{,}5, 0) \end{array}\right\} p_2$

3. $\left.\begin{array}{lll} x_1 = 0 & x_2 = 1714{,}3 \Rightarrow & M_5(0, 1714{,}3) \\ x_2 = 0 & x_1 = 1090{,}9 \Rightarrow & M_6(1090{,}9, 0) \end{array}\right\} p_3$



Плава површина је решење система неједначина. Функција циља тангира неку од крајњих тачака (M_1, M_6, M_7).
Тачка M_1: $z_1 = 23{,}54 \cdot 0 + 27 \cdot 1000 = 27000$
Тачка M_7: пресек p_1 и p_3 $\Rightarrow$ $p_1: 10x_1 + 15x_2 = 15000$
$p_2: 11x_1 + 7x_2 = 12000$, па је: x_1=789,8
x_2=473,4

$z_7 = 35077{,}85$ – max
Тачка M_6: $z_6 = 30796{,}1$
Капацитети су максимално искоришћени за: x_1=790(789,8) и x_2=473(473,4)

б)

Операција / Део	Металостругар (h)	Металоглодач (h)	Укупно (h)
А	4	2,54	6,54
Б	5	3	8
Расположив кадар	14700	13230	27930

Функција циља: $z_{max} = 6{,}54x_1 + 8x_2$, за $x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$

Функција ограничења: $4x_1 + 5x_2 \leq 14700$

$2{,}54x_1 + 3x_2 \leq 13230$

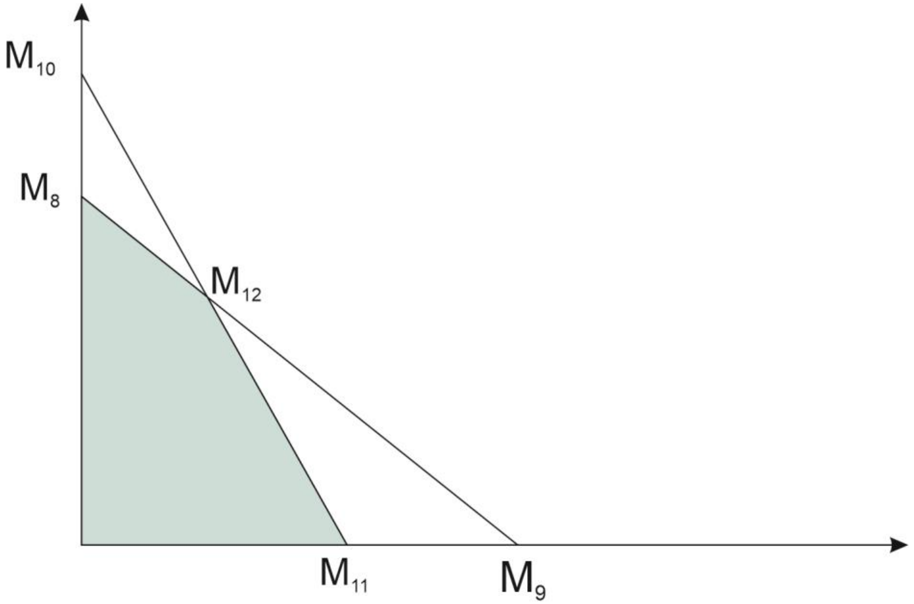
Графоаналитички поступак:

- $4x_1 + 5x_2 = 14700$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \quad x_2 = 2940 \ \Rightarrow \ M_8(0{,}2940) \\ x_2 = 0 \quad x_1 = 3675 \ \Rightarrow \ M_9(3675{,}0) \end{array}\right\} p_4$$

- $2{,}54x_1 + 3x_2 = 13230$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \quad x_2 = 4410 \ \Rightarrow \ M_{10}(0{,}4410) \\ x_2 = 0 \quad x_1 = 1829{,}9 \ \Rightarrow \ M_{11}(1829{,}9\,,0) \end{array}\right\} p_5$$



Плава површина представља решење. Провера тангентних тачака (M_8, M_{12}, M_{11}).

Тачка M_8: $z_8 = 23520$

Тачка M_{11}: $z_{11} = 11967{,}55$

Тачка M_{12}: $\left.\begin{array}{r} 4x_1 + 5x_2 = 14700 \\ 2{,}54x_1 + 3x_2 = 13230 \end{array}\right\} x_1 = 913{,}04, \quad x_2 = 2209{,}57$

$$z_{max} = 6{,}54 \cdot 913{,}4 + 8 \cdot 2209{,}57 = 27929{,}99,$$

$$z_{max} = 23651{,}28 \text{ за } x_1 = 913 \text{ и } x_2 = 2210$$

Искоришћено је 85% капацитета, док 15% није коришћено (4278,72h).

$$z_i = \frac{23651{,}28}{27930} = 0{,}85 = 80\%$$