



Линеарно програмирање



Линеарно програмирање се **примењује** за:

- утврђивање структуре програма и количине производа који ће обезбедити оптимално коришћење производних капацитета,
- проналажење **уских грла** (једна машина стално ради, а друге чекају да производ изађе из ње, тј. губи се драгоцено радно време машине),
- може се одредити најповољнији распоред машина,
- одређење задатака по радним местима да би се смањили трошкови,
- проблем утврђивања локације снабдевача да би се смањили трошкови транспорта (тзв. "транспортни проблем").



Проблем оптимизације производног програма:

Функција циља: $Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_j \cdot x_j + \dots + c_k \cdot x_k, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad x_i \geq 0$

Ограничења: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1k}x_k \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2k}x_k \leq b_2$

...

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{ik}x_k \leq b_i$

...

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mk}x_k \leq b_m, \quad i = 1, 2, \dots, m$

$$Z = \sum_{j=1}^k c_j x_j$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_j \leq b_i, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

где је:

k - број променљивих (врста производа)

x_j - количина j-тог производа.

Ограничења се односе на машине, кадрове, сировине, итд.

- Примера ради, дају се укупни капацитети низа машина, и времена потребна за обраду на свакој од машина и за сваку поједину количину производа (означене са X); затим се поставља **максимална функција циља**, и **ограничења** по машинама.
- Ако се потом приступи **графо-аналитичком** поступку, треба нацртати праве које представљају ограничења и наћи **област преклапања домена** ових правих.
- Потом се изабере **произвољна тачка** из те области дефинисаности и за њу се **израчуна** функција циља.
- Добијена вредност потом постаје **резултат** максималне функције циља, и та нова права се онда транслира до **најудаљеније тачке** у области домена, и та тачка се сматра **максимумом**, под условом да максимална функција циља (права) више не пролази кроз домен.

ПРИМЕР ЗАДАТКА



1. У једном погону производе се делови А и В. Делови се производе на три групе машина M_1 (стругови), M_2 (глодалице) и M_3 (брусилице). У табели 1 су дати подаци везани за време потребно за извршење операција предвиђених у изради делова А и В.

Табела 1

Операција Део	Стругање (min)	Глодање (min)	Брушење (min)
А	10	2,54	11
Б	15	5	7

Х – број индекса/100

Капацитети машина по групама износе:

M_1 (стругови) – 15000 min.

M_2 (глодалице) – 8000 min.

M_3 (брусилице) – 12000 min.

У изради дела учествују радници категорија – металостругар и металоглодач. У табели 2 дати су подаци о времену ангажовања радника одређене категорије у производњи одређеног дела.

Табела 2

Операција Део	Металостругар (h)	Металоглодач (h)
А	4	2,54
Б	5	3

Расположиви фонд радних часова радника категорије:

Металостругар – 1470 часа/раднику годишње

Металоглодач – 1470 часа/раднику годишње

У производњи је ангажовано 10 металостругара и 9 металоглодача.

Израчунати колико делова А и В треба производити да би:

а) максимално били искоришћени машински капацитети

б) максимално био искоришћен кадровски потенцијал.

Дати задатак решити графо-аналитичким поступком.

Прокоментарисати резултат.

а)

x_1 = број делова А

x_2 = број делова В

z = величина потребног капацитета за производњу делова А и В.

Машина Део	M_1 [min]	M_2 [min]	M_3 [min]	Укупно време обrade
А	10	2,54	11	23,54
Б	15	5	7	27
Расположиви капацитет	15000	8000	12000	35000

Ограничења:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Функција циља:

$$z_{max} = 23,54x_1 + 27x_2$$

Функција ограничења: 1. $10x_1 + 15x_2 \leq 15000$

$$2. 2,54x_1 + 5x_2 \leq 8000$$

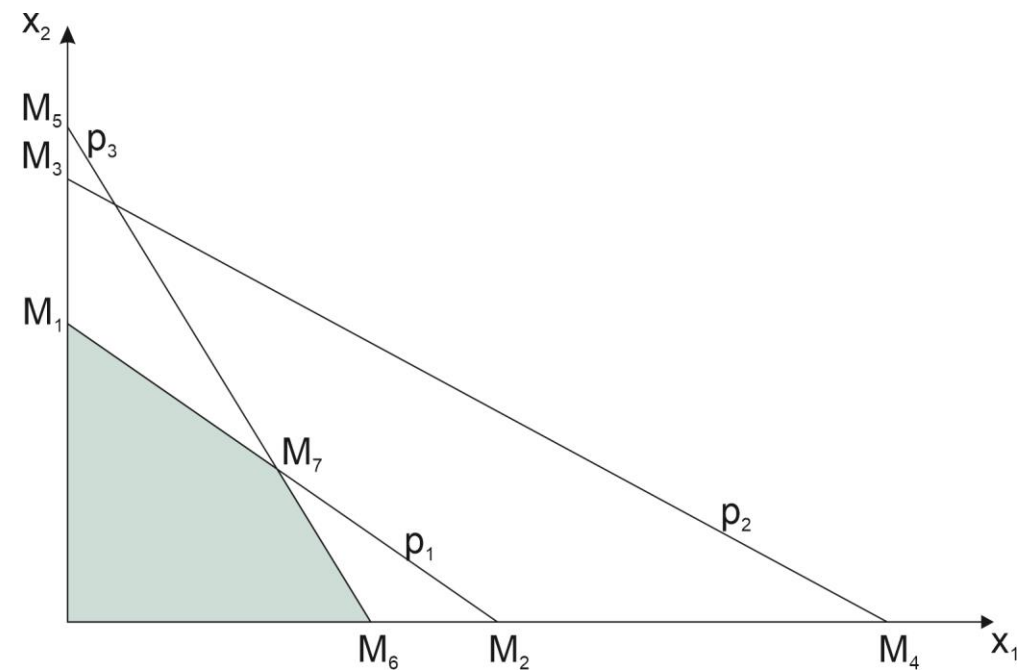
$$3. 11x_1 + 7x_2 \leq 12000$$

Графоаналитички поступак:

$$1. \begin{cases} x_1 = 0 & x_2 = 1000 \Rightarrow M_1(0,1000) \\ x_2 = 0 & x_1 = 1000 \Rightarrow M_2(1000,0) \end{cases} p_1$$

$$2. \begin{cases} x_1 = 0 & x_2 = 1600 \Rightarrow M_3(0,1600) \\ x_2 = 0 & x_1 = 1106,5 \Rightarrow M_4(1106,5,0) \end{cases} p_2$$

$$3. \begin{cases} x_1 = 0 & x_2 = 1714,3 \Rightarrow M_5(0,1714,3) \\ x_2 = 0 & x_1 = 1090,9 \Rightarrow M_6(1090,9,0) \end{cases} p_3$$



Плава површина је решење система неједначина. Функција циља тангира неку од крајњих тачака (M_1, M_6, M_7).

Тачка M_1 : $z_1 = 23,54 \cdot 0 + 27 \cdot 1000 = 27000$

Тачка M_7 : пресек p_1 и $p_3 \Rightarrow p_1: 10x_1 + 15x_2 = 15000$
 $p_2: 11x_1 + 7x_2 = 12000$, па је: $x_1=789,8$
 $x_2=473,4$

$$z_7 = 35077,85 - \max$$

Тачка M_6 : $z_6 = 30796,1$

Капацитети су максимално искоришћени за: $x_1=790(789,8)$ и $x_2=473(473,4)$

б)

Операција Део	Металостругар (h)	Металоглодач (h)	Укупно (h)
А	4	2,54	6,54
Б	5	3	8
Расположив кадар	14700	13230	27930

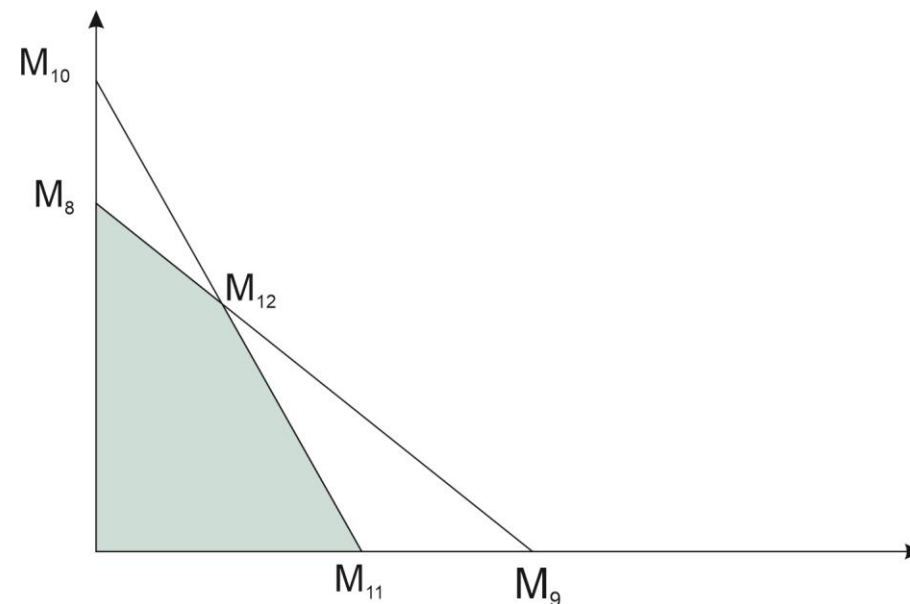
Функција циља: $z_{max} = 6,54x_1 + 8x_2$, за $x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$

Функција ограничења: $4x_1 + 5x_2 \leq 14700$

$2,54x_1 + 3x_2 \leq 13230$

Графоаналитички поступак:

- $4x_1 + 5x_2 = 14700$
 $x_1 = 0 \quad x_2 = 2940 \Rightarrow M_8(0, 2940)$
 $x_2 = 0 \quad x_1 = 3675 \Rightarrow M_9(3675, 0)$
- $2,54x_1 + 3x_2 = 13230$
 $x_1 = 0 \quad x_2 = 4410 \Rightarrow M_{10}(0, 4410)$
 $x_2 = 0 \quad x_1 = 1829,9 \Rightarrow M_{11}(1829,9, 0)$



Плава површина представља решење. Провера тангентних тачака (M_8 , M_{12} , M_{11}).

Тачка M_8 : $z_8 = 23520$

Тачка M_{11} : $z_{11} = 11967,55$

Тачка M_{12} : $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 14700 \\ 2,54x_1 + 3x_2 = 13230 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 913,04, \quad x_2 = 2209,57$

$z_{max} = 6,54 \cdot 913,4 + 8 \cdot 2209,57 = 27929,99$,

$z_{max} = 23651,28$ за $x_1 = 913$ и $x_2 = 2210$

Искоришћено је 85% капацитета, док 15% није коришћено (4278,72h).

$$z_i = \frac{23651,28}{27930} = 0,85 = 85\%$$