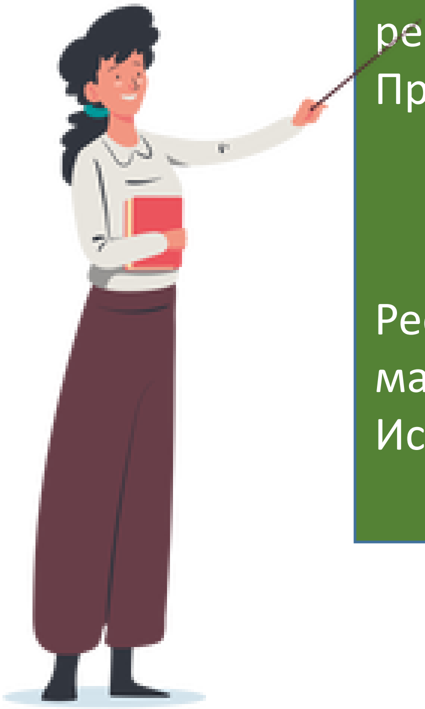
Продуктивност фактора производње

- Вежба 1 -

Подсетимо се теорије!



Производња је организовани процес трансформисања производних ресурса у производе или услуге.

Производне ресурсе можемо поделити у три категорије:

1. Рад
2. Капитал
3. Земљу

Ресурси су ограничени, а циљ је њиховом комбинацијом извући максимум.

Исход производње је **обим производње** (***Q***).

Обим производње *Q*

Обим производње (*Q*) се може представити као функција фактора производње:

$$Q = Q(K, L)$$

где је ***K*** – удео фактора капитала у производњи и
L – удео фактора рада у производњи.

Различите **<u>комбинације</u>** фактора могу дати **<u>исте</u>** или **<u>различите</u>** нивое производње. Како би се лакше сагледало који нивои фактора дају одређене нивое производње, користи се **<u>матрица производње два производна фактора</u>** (input – output table for production function).

Обим производње *Q*

Производна функција у IT сектору може се објаснити као зависност обима производње (Q) од два основна фактора: капитала (K) и рада (L).

У овом контексту, **обим производње Q** представља број успешно развијених и покренутих апликација или услуга.

- **Капитал (K)** обухвата технолошке ресурсе као што су сервери, клауд инфраструктура (нпр. AWS, Azure), софтверски алати и лиценце.
- **Рад (L)** се односи на људски фактор – програмере, DevOps инжењере, тестере и друге чланове тима.

Различите комбинације капитала и рада могу дати исте или различите нивое производње. На пример, један тим може имати више програмера и мање инфраструктуре, док други може користити снажније алате и мање људи – а оба тима могу постићи исти резултат.

Управо зато се користи **матрица производње**, која приказује како различите комбинације улагања у рад и капитал утичу на обим производње. То омогућава менаџерима да анализирају која комбинација ресурса је најисплативија и најефикаснија у датом контексту.

Матрица производње два производна фактора

L \ *K*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	14	17	20	22
2	14	20	24	28	32
3	17	24	30	27	39
4	20	28	40	40	45
5	22	32	39	36	39

Q = 17 → 17 = f(3L, 1K)

Q = 17 → 17 = f(1L, 3K)

Просечна продуктивност

Просечна продуктивност је показатељ који говори колика је количина производа по јединици утрошеног варијабилног фактора. Она се добија преко једнакости:

$$AP_L = \frac{Q}{L}$$ → Просечна продуктивност фактора РАД

Просечна продуктивност је увек позитиван број!

Просечна продуктивност је као кад питамо: *колико сваки девелопер у просеку имплементира фичера (функционалности у апликацији, на пример дугме за пријаву, кориснички профил, опција за претрагу) по спринту (унапред дефинисаном периоду рада, најчешће 1–2 недеље, током ког тим реализује договорене задатке).*

Ако шесторица заврше 60 фичера – просек је 10 по особи. То нам служи као основа за процену **капацитета тима** – тј. колико могу да ураде у наредном спринту.
Ако продуктивност падне, то је знак да нешто не функционише како треба: можда су људи преоптерећени, можда су алати спори, или документација није довољно јасна.
Зато се просечна продуктивност користи за планирање и побољшање процеса у тиму.

Маргинална (гранична) продуктивност

Маргинална продуктивност би представљала „бољи“ показатељ продуктивности и она показује колико се укупна количина производа променила са променом производног фактора за једну његову јединицу. Добија се преко израза:

$$MP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

Може ли маргинална продуктивност да буде негативна?

Ако тим од 5 програмера завршава по 10 фичера свако – укупно 50, а онда се у тим дода још један нови члан и укупан број фичера порасте на 52, онда је маргинална продуктивност тог додатог члана само 2 фичера.

Ако се деси да нови члан још учи, поставља пуно питања, прави грешке и одвлачи пажњу осталима, може се десити да тим уместо 50 уради само 48 фичера. У том случају маргинална продуктивност је негативна.

То је пример опадајућих приноса – што више људи додајеш, не значи да ће резултат расти истим темпом, а понекад чак и пада.

- **У кратком року, један фактор је фиксан, а други варијабилан!**
- Када се фиксира један од два производна фактора, онда се може сагледати продуктивност другог производног фактора, односно колико је фактора потребно за производњу одређеног нивоа производње.
- Ако се фиксира капитал- **K,** а рад - **L** пусти да варира:

K / L	1	2	3	4	5
1	10	14	17	20	22
2	14	20	24	28	32
3	17	24	30	27	39
4	20	28	40	40	45
5	22	32	39	36	39

Просечна продуктивност фактора рад (фактор капитал је фиксиран)

K / L	1	2	3	4	5
1	10	14	17	20	22
2	14	20	24	28	32
3	17	24	30	27	39
4	20	28	40	40	45
5	22	32	39	36	39

Q	L	AP_L	MP_L
0	0	-	-
20	1	20	20
28	2	14	8
27	3	9	-1
40	4	10	13
36	5	7,20	-4

Када је реч о капиталу...

- **Просечна продуктивност капитала** показује колико се у просеку добија резултата по јединици уложеног капитала (нпр. по једном уређају или серверу).
- **Маргинална продуктивност капитала** показује колико додатни уређај или ресурс повећава укупан резултат – односно, колико користи донесе једно додатно улагање.
- Пример: један девелопер ради на лаптопу. Додате му још један монитор – он ради брже, продуктивност расте. Додате трећи – може бити још корисно. Али кад стигнете до четвртог монитора, он већ нема где да га стави или му одвлачи пажњу. Тада **маргинална продуктивност опада**, јер додатно улагање више не доноси исту корист као раније.
- Слично је и са cloud ресурсима: ако додате више серверских инстанци да бисте убрзали апликацију, нека побољшања ће постојати у почетку. Али после одређене тачке, додавање нових инстанци више не помаже – јер постоји **друго уско грло**, попут ограничења мреже, базе или кеша. И у том случају, **маргинална продуктивност опада**, чак и ако настављате да улажете.

Када је реч о капиталу...

Просечна продуктивност капитала (рад је фиксиран):

$$AP_K = \frac{Q}{K}$$

- Маргинална продуктивност капитала (рад је фиксиран):

$$MP_K = \frac{\Delta Q}{\Delta K}$$

Када се рад фиксира на нивоу L=3

K / *L*	1	2	3	4	5
1	10	14	17	20	22
2	14	20	24	28	32
3	17	24	30	27	39
4	20	28	40	40	45
5	22	32	39	36	39

Q	*K*	AP_K	MP_K
0	0	-	-
17	1	17	17
24	2	12	7
30	3	10	6
27	4	6,75	-3
39	5	7,80	-12

Задатак:

Q	L	AP_L	MP_L
0	0	-	-
10	1		
22	2		
45	3		
52	4		
50	5		

Решење

Q	L	AP_L	MP_L
0	0	-	-
10	1	10	10
22	2	11	12
45	3	15	23
52	4	13	7
50	5	10	-2

Еластичност укупног производа

Еластичност укупног производа на промену варијабилног фактора је релативна промена укупног нивоа производње у односу на релативну промену варијабилног фактора. Другим речима за колико се процената промени обим производње, ако се варијабилни фактор промени за 1%.

Уколико се узме да је рад (*L*) тај варијабилни фактор, онда је еластичност укупног производа дата као:

$$\boldsymbol{\varepsilon_L = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{\frac{\Delta Q}{\Delta L}}{\frac{Q}{L}} = \frac{MP_L}{AP_L}}$$

Уколико се за варијабилни фактор узме капитал (*K*), тада је еластичност укупног производа:

$$\boldsymbol{\varepsilon_K = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta K}{K}} = \frac{\frac{\Delta Q}{\Delta K}}{\frac{Q}{K}} = \frac{MP_K}{AP_K}}$$

Ако је капитал варијабилни фактор, попунити табелу:

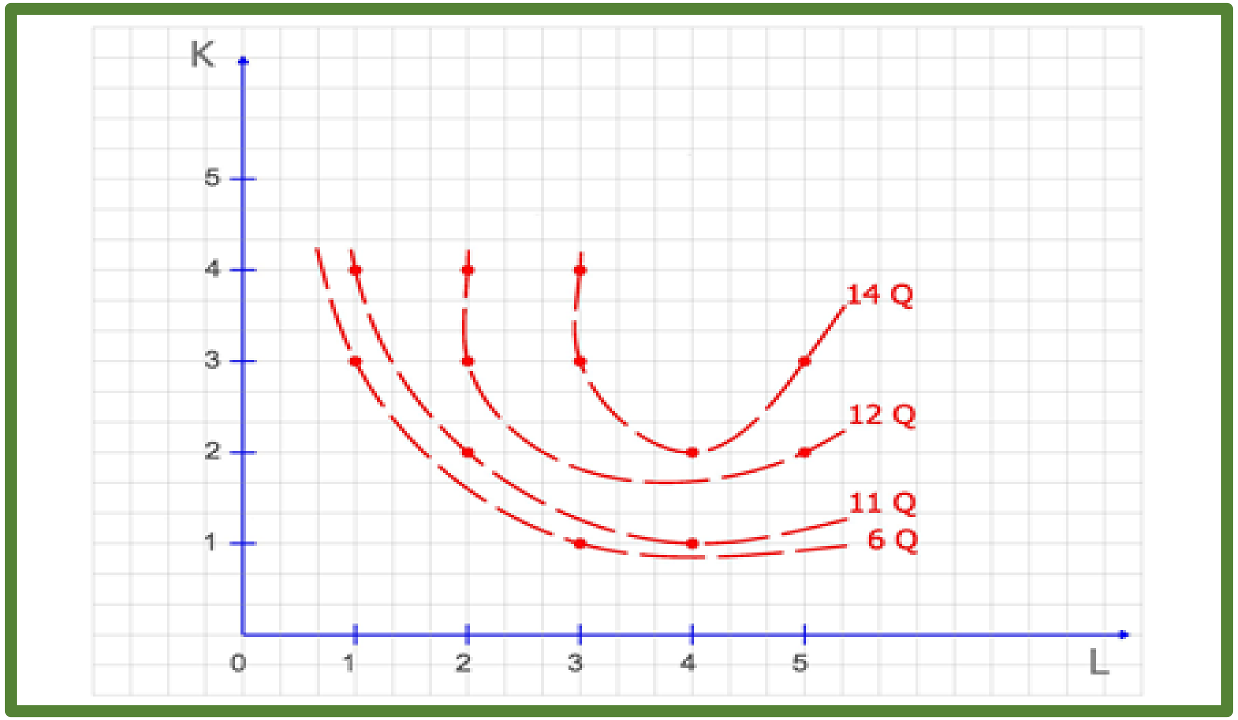
Q	K	AP_K	MP_K	ε_K
0	0	-	-	-
3	1			
8	2			
12	3			
15	4			
14	5			

Q	K	AP_K	MP_K	ε_K
0	0	-	-	-
3	1	3	3	1,00
8	2	4	5	1,25
12	3	4	4	1,00
15	4	3,75	3	0,80
14	5	2,80	-1	-0,36

- ✓ Ако послодавац пусти у рад трећу машину за колико се % променио обим производње?
- ✓ Ако се пусти у рад и четврта машина како ће то утицати на промену обима производње?
- ✓ Шта се дешава када се покрене пета машина?

Изокванте

Изокванта је крива којом се повезују различите комбинације производних фактора, а које дају исти ниво производње.



Изокванте са слике:

14*Q*, 12*Q*, 11*Q*, 6*Q*

Гранична стопа техничке супституције (*MRTS*)

MRTS (Marginal Rate of Technical Substitution) показује по којој стопи се један фактор може заменити другим ,а да се при томе остане на истом нивоу производње – на истој изокванти, односно по којој стопи би технологија била вољна да тргује/супституише један фактор другим када се крећемо дуж исте изокванте, тј. при истом обиму производње.

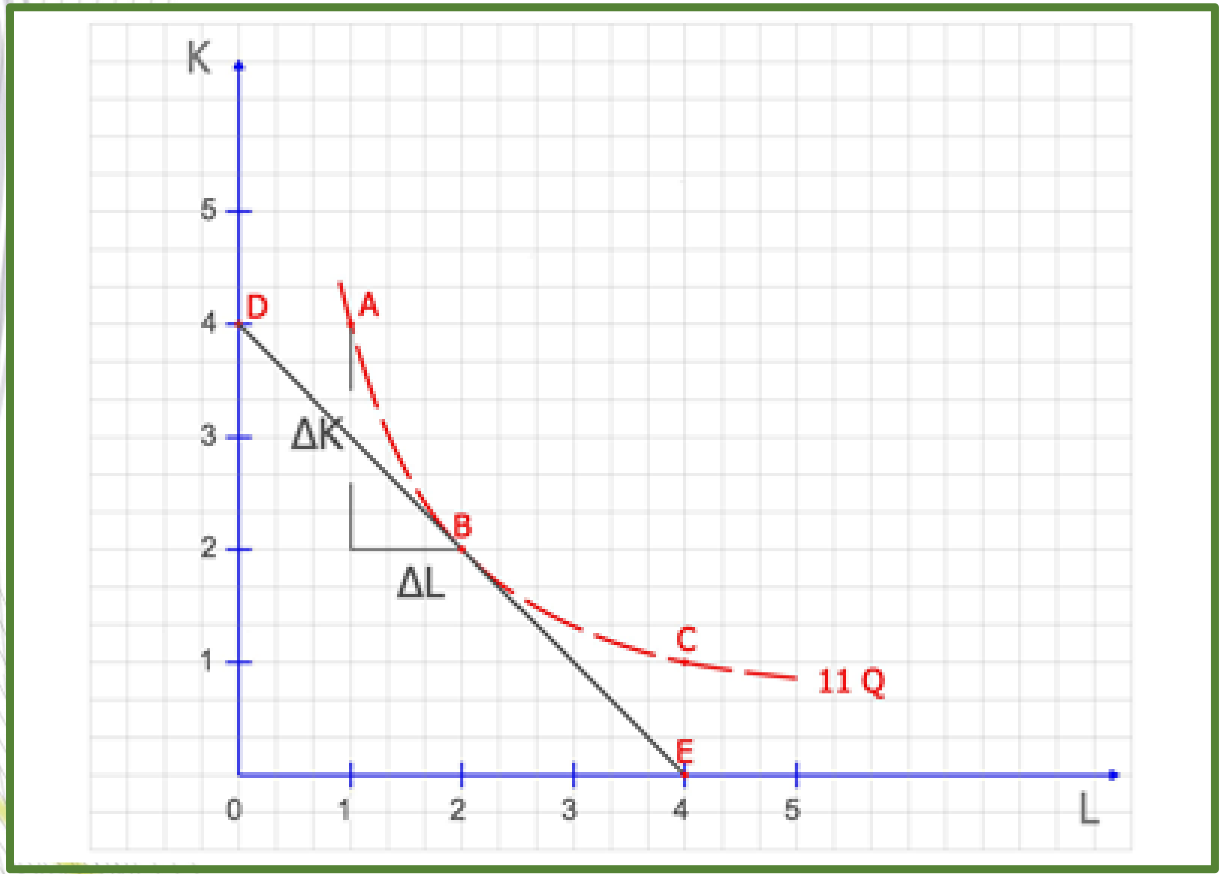
Математички, MRTS је коефицијент нагиба тангенте на изокванту.

$$\boxed{MRTS = \frac{\Delta K}{\Delta L}}$$

Гранична стопа техничке супституције (*MRTS*)

- Како је изокванта функција која је конвексна ка координатном почетку, нагиб њене тангенте је увек негативан. Зашто?

- Једначина праве гласи: $y = n \pm kx$. Конкретно, ако права са *x* осом заклапа туп угао, следи $-kx$. Супротно, од тога је $+kx$. Када се уради први извод изокванте добија се тангента која са десним остатком *x* осе заклапа туп угао (опадајућа функција), па је коефицијент правца тангенте негативан. Параметар *n* је одсечак на *y* оси.

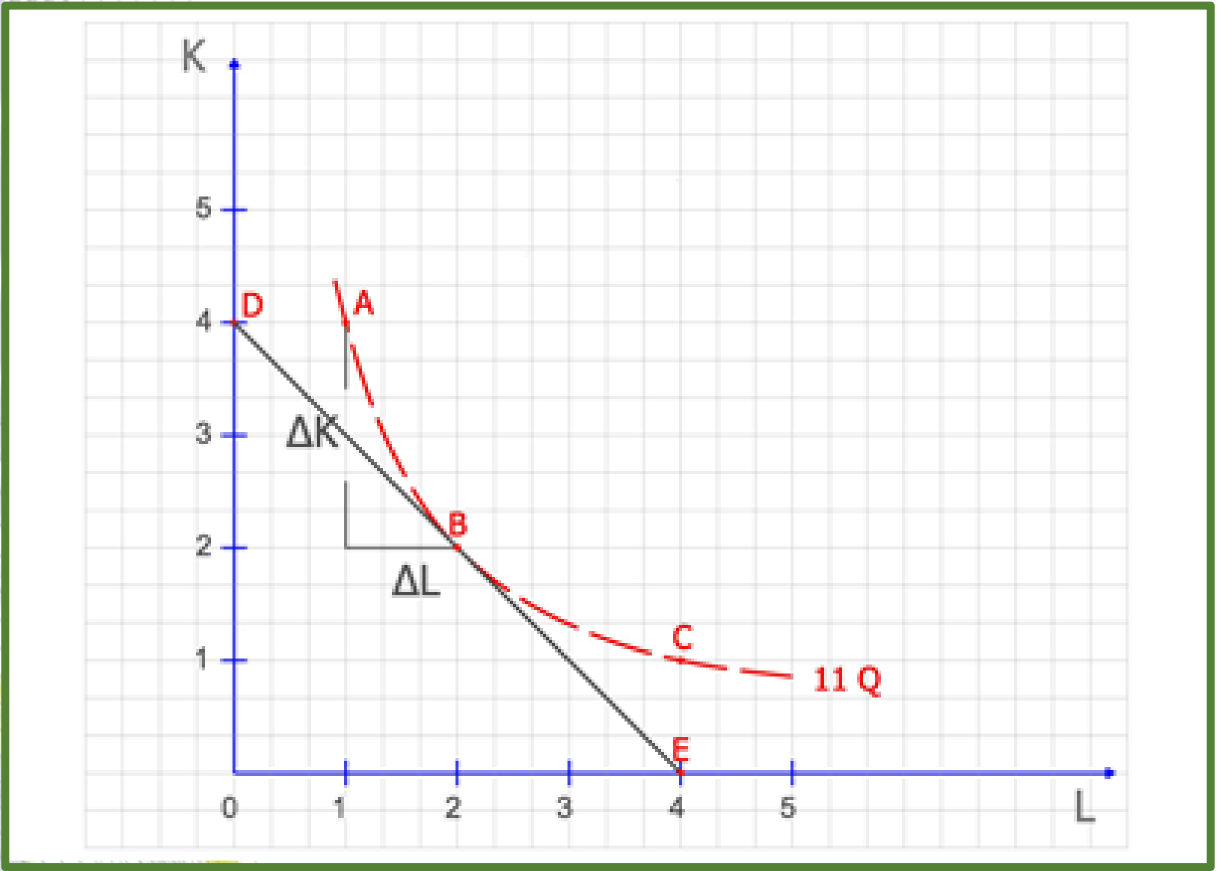


У тангентној тачки се налази оптималан избор.

У тој тачки (тачка B) MRTS је апсолутна вредност коефицијента смера тангенте.

Задатак:

1. Одредити граничну стопу техничке супституције на изокванти 11*Q* између тачака *A* и *B*.
2. Одредити MRTS на изокванти 11*Q* између тачака *B* и *C*.
3. Одредити MRTS на изокванти 11*Q* у тачки *B*.



1. У тачки *A*: 4*K* и 1*L*, у тачки *B*: 2*K* и 2*L*, дакле прелази се из 4*K* у 2*K* и из 1*L* у 2*L*, па је

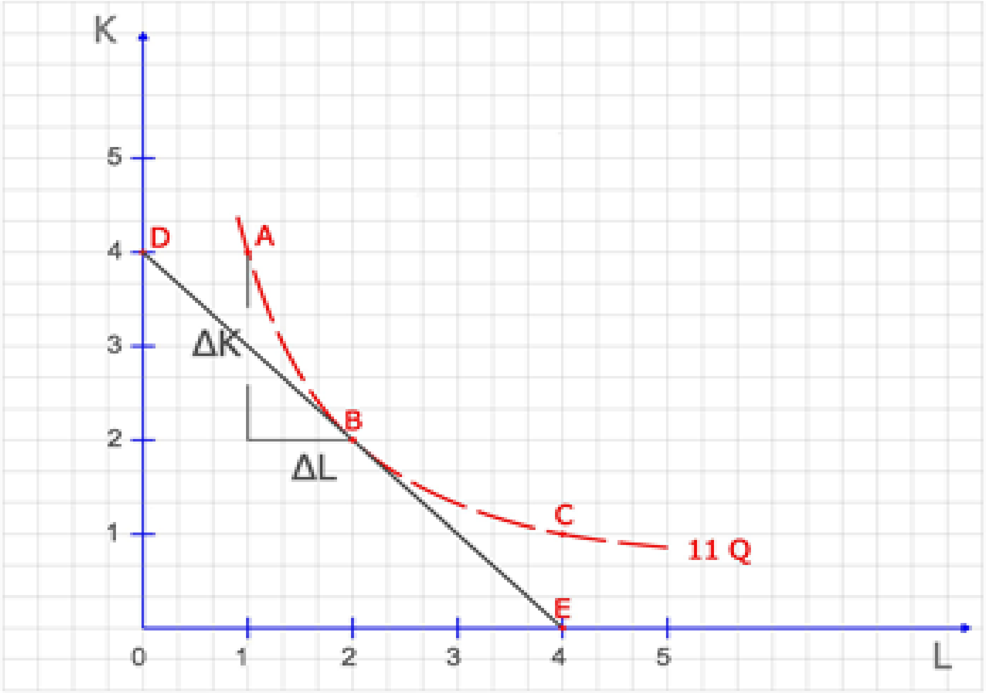
$$MRTS = \left|\frac{4K-2K}{1L-2L}\right| = \left|-\frac{2K}{L}\right| = 2$$

2. Тачка *C* комбинује 1*K* и 4*L*. Дакле, из 2*K* (у тачки *B*) 2*K* прелази се на 1*K* →

$$MRTS = \left|\frac{2K-1K}{2L-4L}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

3. Тачка *D* се дели тачком *E*. Тангента у тачки *B* заклапа max 4*K* (*D*) и max 4*L* (*E*), те се дели 4*K* са 4*L* →

$$MRTS = \frac{4K}{4L} = 1$$



Ако је *MRTS* константна дуж целе изокванте, тада су фактори производње савршени супститути.

Трошкови производње

- Одабир самог нивоа производње у великој мери зависи и од **расположивог буџета послодавца**. Претпоставља се да послодавац цео свој буџет (новац који има на располагању) улаже у производњу, те њиме ангажује факторе производње – **рад** и **капитал**. На овај начин се формирају **трошкови производње**. Дакле потребно је произвести одређени ниво од ***Q*** **производа** и за то је потребно **ангажовати *K*** капитала и ***L*** **рада**. На располагању је ***C*** **новца**. **Од чега зависи да ли ће се тај ниво достићи?**

Тачан одговор је од **цене фактора**.

Израз за решавање овог проблема је: $C = w \cdot L + r \cdot K$, где су ***w*** **износ наднице** (**цена рада**) и ***r*** **камата** (**цена капитала**).

Сада је потребно дефинисати појам *изотрошковне линије*.

Трошкови производње

У IT сектору, послодавац има одређени буџет који улаже у развој производа – на пример, апликације или софтверског система. Тај буџет (означен са **C**) троши се на **рад** (плата програмера, дизајнера, тестера...) и на **капитал** (рачунари, сервери, софтверске лиценце, cloud ресурси...).

Циљ је да се са тим буџетом произведе одређени ниво софтвера или функционалности (означен као **Q**), што значи да је потребно ангажовати одређену количину **рада (L)** и **капитала (K)**.

Колико ће који фактор коштати зависи од њихових цена:

- **w** – цена рада (нпр. плата по сату или месечно по запосленом)
- **r** – цена капитала (нпр. трошак cloud сервера или лиценци)

Формула која описује колико новца је потрошено:

$$C = w \cdot L + r \cdot K$$

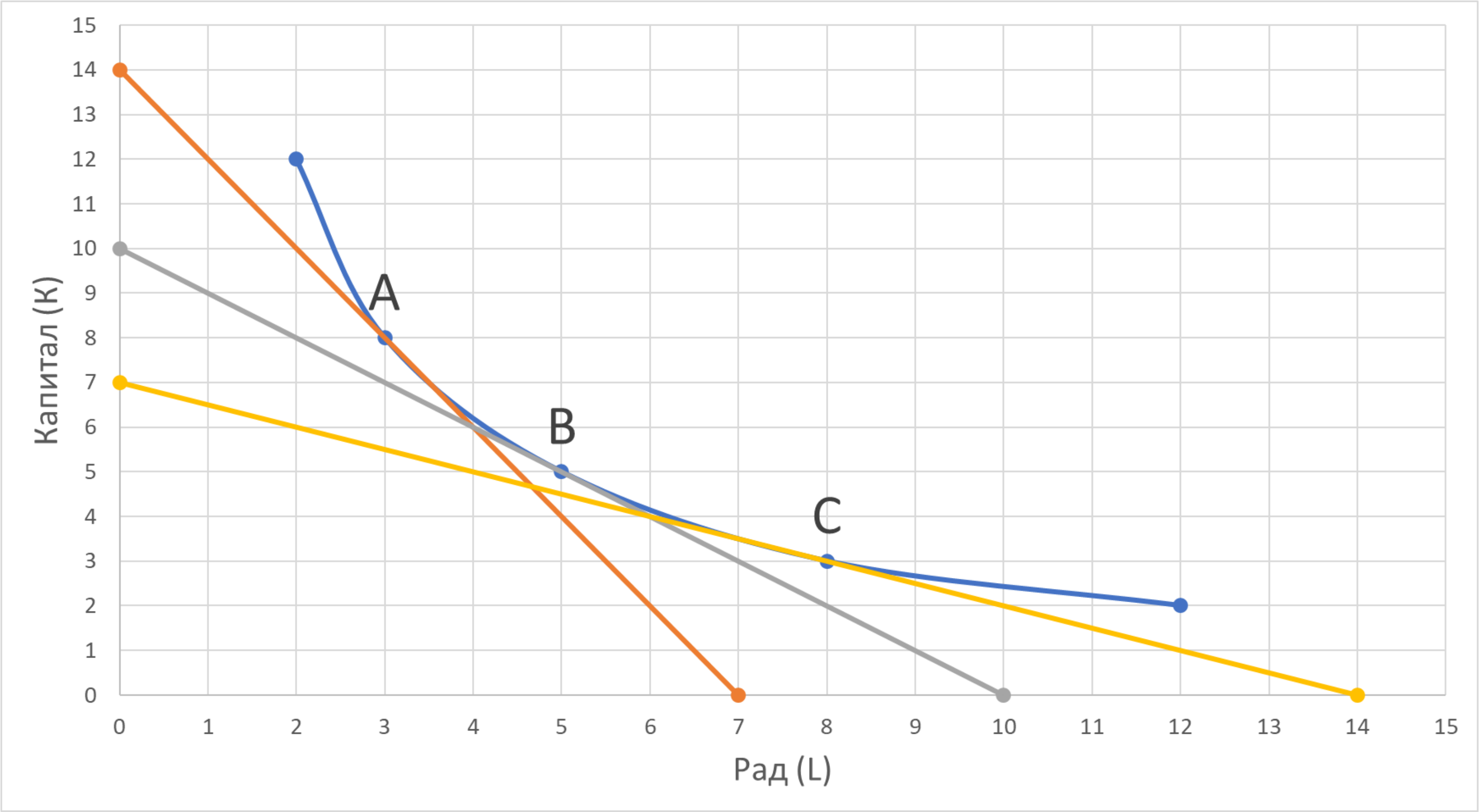
Изотрошковна линија

Изотрошковна линија је функција која повезује све оне комбинације фактора производње који коштају исто. Израчунава се као:
$K = \frac{c}{r} - \frac{w}{r} \cdot L$, где је $\frac{w}{r}$ коефицијент правца изотрошковне линије.

Оптимални ниво производње се дешава у тачки у којој је изотрошковна линија тангента на изокванту. У тој тачки важи:

$$MTRS = \frac{w}{r}$$

Различите изотрошковне линије на истој изокванти

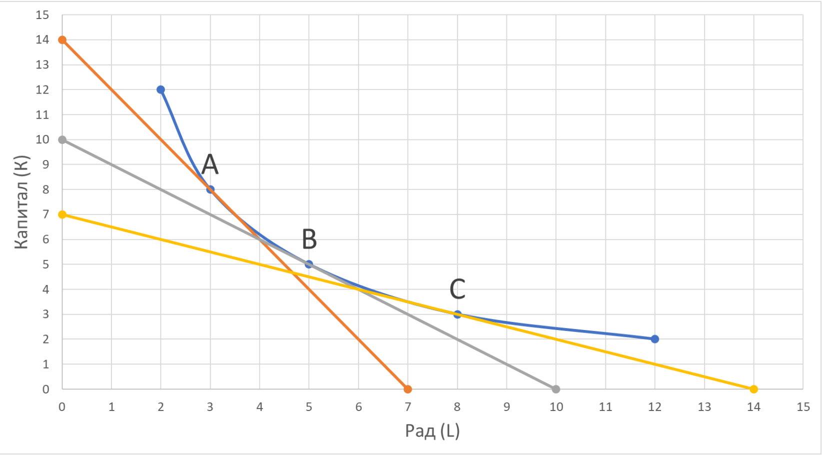


Различите изотрошковне линије на истој изокванти

На графику је приказана једна **изокванта** (плава линија), која представља све комбинације рада (L) и капитала (K) које доводе до истог нивоа производње – на пример, исти број завршених функционалности у неком IT пројекту. То значи да и комбинација са више људи и мање опреме, као и комбинација са мање људи и више опреме, могу дати исти резултат.
Поред тога, приказане су и три **изотрошковне линије** (наранџаста, сива и жута). Свака од њих показује колико радника и колико техничких ресурса можемо приуштити са одређеним буџетом. Све тачке на једној изотрошковној линији коштају исто, али не дају све исте резултате.

Тачке **A, B и C** су пресечне тачке изокванте и појединачних изотрошковних линија. Иако све три тачке дају исти резултат у смислу обима производње, оне захтевају различит ниво трошкова:

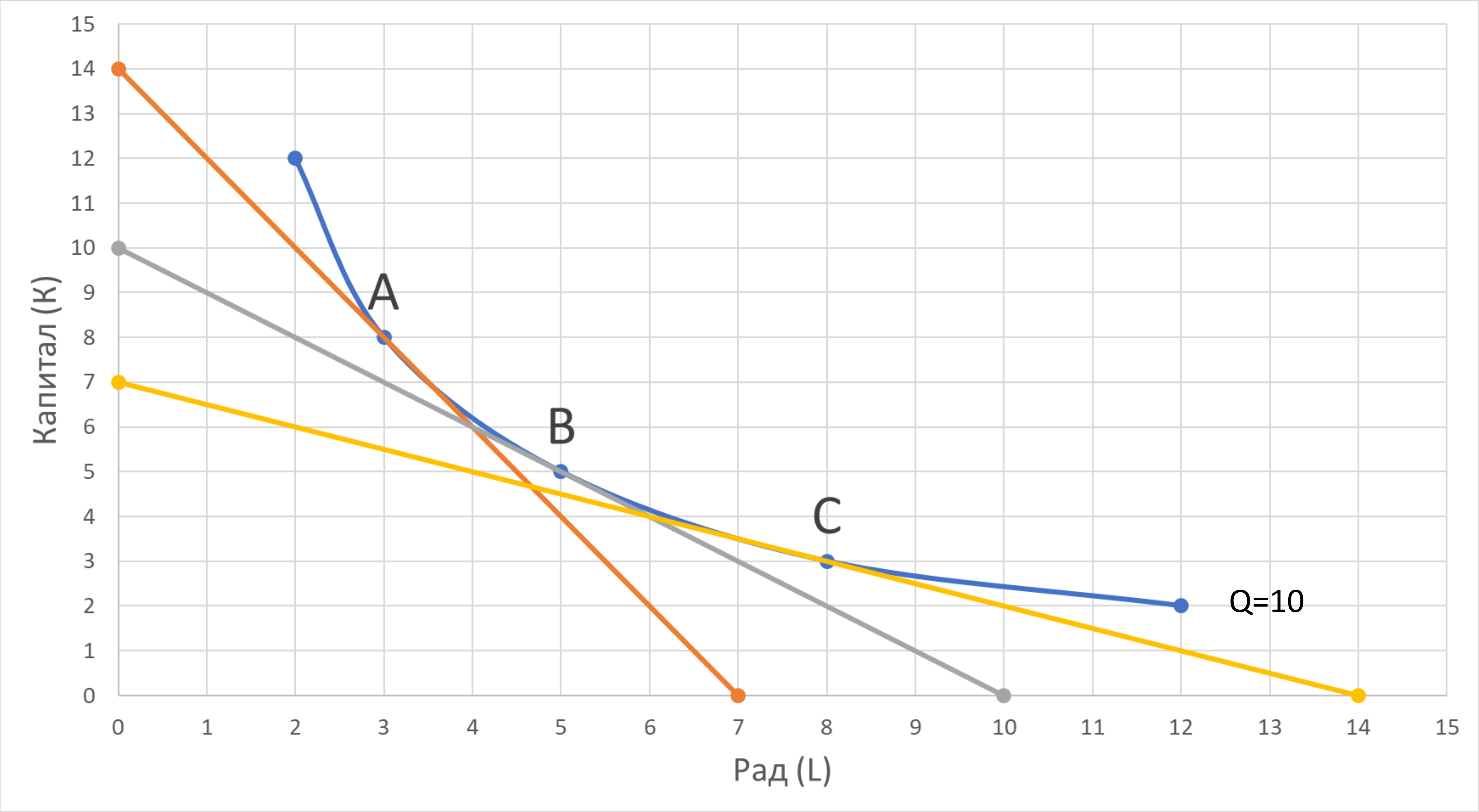
- **Тачка A** је на наранџастој изотрошковној линији – то је најскупља комбинација ресурса за тај резултат.
- **Тачка B** се налази на сивој линији и **представља оптимум** – тачку у којој је изотрошковна линија **тангента** на изокванту. То значи да је ово **најекономичнија комбинација рада и капитала** за постизање тог нивоа производње.
- **Тачка C** је на жутој линији – тај буџет није довољан за постизање жељеног резултата, јер линија пролази испод изокванте.



1. Ако укупан трошак износи 1500, а $MRTS = 1$ колико износе цене фактора рада и капитала?

2. Израчунати *MRTS* у тачки *A*. На основу тога одредити однос цене фактора производње, а затим и саме цене фактора, ако знамо да укупни трошкови износе 1500.

3. Ако је цена рада $w = 10$, а цена капитала $r = 20$, одредити оптималну комбинацију фактора, као и укупне трошкове производње.


Капитал (К)
Рад (L)
A
B
C
Q=10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

1. *MRTS* = $|-1| = 1$ важи за тангенту, тј. Изотрошковну линију у тачки *B*. Са графика се може видети да је за производњу 10*Q* при тој изотрошковној линији потребно ангажовати 5 једница капитала и 5 јединица рада. Овај задатак се решава на два начина.

Први начин преко функције укупног трошка *C*:

$$C = w \cdot L + r \cdot K,$$
$$1500 = w \cdot 5 + r \cdot K.$$

Како је: $MRTS = 1$, и $\frac{w}{r} = 1 => w = r$,

па је $C = w \cdot L + r \cdot K$ →

$1500 = w \cdot 5 + w \cdot 5$ → $1500 = 10w$ → $w = 150$.

Други начин преко дефиниције изотрошковних линија:

$\frac{1500}{10} = 150 => w = 150$; случај када се при тим ценама купује само рад. Аналогно, када се купује капитал добија се вредност за *r*.

2. Са графика се добија да је у тачки *A*, *MRTS*=$|-2| = 2$. То се добија када се 14 (максимални ниво капитала који досеже наранџаста изотрошковна линија) подели са7 (максимални ниво рада који досеже иста изотрошковна крива). Тада је:

$$w = \frac{1500}{7} = 214{,}29$$

$$\mathrm{r} = \frac{1500}{14} = 107{,}14$$

3. Овде је потребно на основу *MRTS* одредити о којој изотрошковној линији је реч. У овом случају то је жута изотрошковна линија. Зашто је ово важно?

Тек када се одреди на коју изотрошковну линију се *MRTS* односи, добиће се информација коју је тачку са графика потребно посматрати, односно који су оптимални фактори.

MRTS се рачуна преко цене фактора: *w*=10 и *r*=20.

$\Rightarrow \frac{w}{r} = \frac{1}{2}$ и ту је $\frac{7K}{14L} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ *C* = 10·8 + 20·3 = 140

Ако је *tg* угла тангенте на изокванту 1,33, количина утрошеног капитала 20, а укупни трошкови производње 1300 и цена капитала 15, одредити ниво рада.

Информације

Веб сајт: http://ie.mas.bg.ac.rs/
Асистент: Ермина Ђосовић, маст. инж. маш.
Кабинет: 406
Имејл: ecosovic@mas.bg.ac.rs
Термин за консултације: четвртак, 13.00 ч