

## ZADATAK

U tabeli su data vremena rada do otkaza nekog elementa ( $T_i$ ).  
Primenom  $\chi^2$  – testa odrediti gustinu raspodele funkcije nepouzdanosti  $f(t)$  i funkciju raspodele nepouzdanosti  $F(t)$  za dati element. Na osnovu dobijenih rezultata (primenom  $\chi^2$  – testa,  $f(t)$ ,  $F(t)$ ) odrediti funkciju pouzdanosti  $R(t)$  i intenzitet otkaza  $\lambda(t)$  datog elementa u zavisnosti od vremena.

### 1. Statistička obrada uzorka

Obim uzorka:  $n = 60$

Minimalni član:  $T_{\min} = 432.00$

Maksimalni član:  $T_{\max} = 2550.00$

Srednja vrednost (Srednje vreme bezotkaznog rada):

$$T_0 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n T_i = 1388.05$$

Disperzija (vremena bezotkaznog rada):

$$D(T) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (T_i - T_0)^2 = 281281.85$$

Srednje kvadratno odstupanje (vremena bezotkaznog rada):

$$\sigma_T = \sqrt{D(T)} = 530.36$$

Broj intervala:

$$K = 5 \cdot \ln(n) = 5 \cdot \ln(60) = 8.891 \Rightarrow K = 8$$

Dužina intervala:

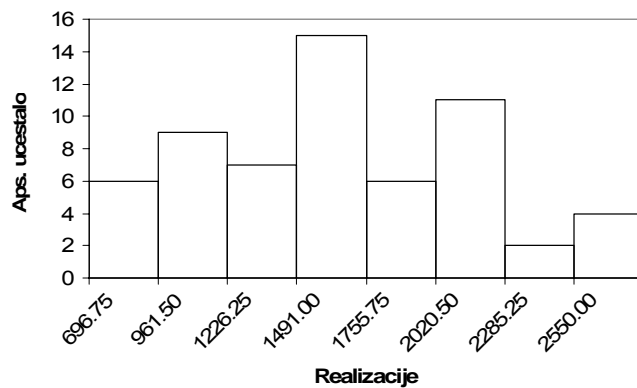
$$h = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{K} = \frac{2550.00 - 432.00}{8} = 264.75$$

Određivanje apsolutnih i relativnih učestalosti:

R. br. [i]	Intervali		Apsolutne učestalosti [ $m_i$ ]	Relativne učestalosti [ $m_i / n$ ]
	od ( $t_{i-1}$ )	do ( $t_i$ )		
1	[432.00	696.75)	6	0.1000
2	[696.75	961.50)	9	0.1500
3	[961.50	1226.25)	7	0.1167
4	[1226.25	1491.00)	15	0.2500
5	[1491.00	1755.75)	6	0.1000
6	[1755.75	2020.50)	11	0.1833
7	[2020.50	2285.25)	2	0.0333
8	[2285.25	2550.00]	4	0.0667
$\Sigma$			60	1.0000

R. br.	$T_i$
1	1325
2	1589
3	2387
4	2467
5	1870
6	1105
7	2550
8	2110
9	1250
10	1788
11	723
12	1987
13	985
14	643
15	2106
16	907
17	1908
18	1435
19	1920
20	756
21	1443
22	1350
23	1100
24	1977
25	1578
26	1870
27	650
28	1590
29	1245
30	1789
31	1208
32	805
33	1723
34	1450
35	1420
36	809
37	528
38	490
39	1469
40	2488
41	1010
42	450
43	1645
44	1200
45	432
46	876
47	1268
48	1356
49	976
50	867
51	1245
52	1432
53	905
54	873
55	1770
56	1805
57	1300
58	1655
59	1980
60	1445

Crtanje histograma (apsolutnih ili relativnih učestalosti):



Na osnovu oblika histograma apsolutnih učestalosti zaključuje se da dati uzorak, vremena rada elementa do otkaza, treba testirati na pripadnost Normalnoj raspodeli.

Određivanje parametra Normalne raspodele:

$$T_0 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n T_i = 1388.05$$

$$D(T) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (T_i - T_0)^2 = 281281.85, \sigma_T = \sqrt{D(T)} = 530.36$$

Dati uzorak će se testirati na pripadnost Normalnoj raspodeli  $N(T_0, \sigma_T)$  sa parametrima  $T_0 = 1388.05$  i  $\sigma_T = 530.36$ , odnosno:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(t-T_0)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \quad F(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-T_0)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot dt$$

## **2. Izračunavanje verovatnoća realizacije intervala $[t_{i-1} \div t_i]$ pomoću usvojene teorijske raspodele**

$$p_i = P(t_{i-1} \leq T \leq t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) \cdot dt = F(t_i) - F(t_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

$$p_1 = P(-\infty \leq T \leq 696.75) = \Phi\left(\frac{696.75 - 1388.05}{530.36}\right) = 1$$

$$= \Phi(-1.3034) = 0.5 - \Phi(1.3034) = 0.5 - 0.4038 = 0.0962$$

$$p_2 = P(696.75 \leq T \leq 961.50) = \Phi\left(\frac{961.50 - 1388.05}{530.36}\right) - \Phi\left(\frac{696.75 - 1388.05}{530.36}\right) =$$

$$= \Phi(-0.8043) - \Phi(-1.3034) = 0.5 - \Phi(0.8043) - \Phi(-1.3034) =$$

$$= 0.5 - 0.2894 - (0.5 - 0.4038) = 0.1144$$

<sup>1</sup> Vrednosti  $\Phi(t)$  – tabela 2., predavanje II

$$\begin{aligned}
 p_3 &= P(961.50 \leq T \leq 1226.25) = \Phi\left(\frac{1226.25 - 1388.05}{530.36}\right) - \Phi\left(\frac{961.50 - 1388.05}{530.36}\right) = \\
 &= \Phi(-0.3051) - \Phi(-0.8043) = 0.5 - \Phi(0.3051) - \Phi(-0.8043) = \\
 &= 0.5 - 0.1199 - (0.5 - 0.2894) = 0.1695
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_4 &= P(1226.25 \leq T \leq 1491.00) = \Phi\left(\frac{1491.00 - 1388.05}{530.36}\right) - \Phi\left(\frac{1226.25 - 1388.05}{530.36}\right) = \\
 &= \Phi(0.1941) - \Phi(-0.3051) = \Phi(0.1941) - \Phi(-0.3051) = \\
 &= 0.5770 - (0.5 - 0.1199) = 0.1969
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_5 &= P(1491.00 \leq T \leq 1755.75) = \Phi\left(\frac{1755.75 - 1388.05}{530.36}\right) - \Phi\left(\frac{1491.00 - 1388.05}{530.36}\right) = \\
 &= \Phi(0.6933) - \Phi(0.1941) = 0.7559 - 0.5770 = 0.1789
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_6 &= P(1755.75 \leq T \leq 2020.50) = \Phi\left(\frac{2020.50 - 1388.05}{530.36}\right) - \Phi\left(\frac{1755.75 - 1388.05}{530.36}\right) = \\
 &= \Phi(1.1925) - \Phi(0.6933) = 0.8835 - 0.7559 = 0.1276
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_7 &= P(2020.50 \leq T \leq 2285.25) = \Phi\left(\frac{2285.25 - 1388.05}{530.36}\right) - \Phi\left(\frac{2020.50 - 1388.05}{530.36}\right) = \\
 &= \Phi(1.6917) - \Phi(1.1925) = 0.9546 - 0.8835 = 0.0711
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_8 &= P(2285.25 \leq T \leq +\infty) = 1 - \Phi\left(\frac{2285.25 - 1388.05}{530.36}\right) = \\
 &= 1 - \Phi(1.6917) = 1 - 0.9546 = 0.0454
 \end{aligned}$$

### **3. Izračunavanje teorijskih učestalosti $n \cdot p_i$ za intervale $[t_{i-1} \div t_i)$**

R. br. [i]	Intervali		teorijske učestalosti [ $n \cdot p_i$ ]
	od ( $t_{i-1}$ )	do ( $t_i$ )	
1	$[-\infty)432.00$	696.75)	5.7726
2	[696.75	961.50)	6.8647
3	[961.50	1226.25)	10.1719
4	[1226.25	1491.00)	11.8081
5	[1491.00	1755.75)	10.7390
6	[1755.75	2020.500)	7.6515
7	[2020.50	2285.25)	4.2709
8	[2285.25	2550.00(+ $\infty$ )]	2.7212

#### **4. Izračunavanje veličine $\chi_{sr}^2$ (kriterijum)**

$$\chi_{sr}^2 = \sum_{i=1}^8 \frac{(m_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

R. br. [i]	Intervali		Apsolutne ucestalosti [m <sub>i</sub> ]	teorijske ucestalosti [n·p <sub>i</sub> ]	$\chi_{sr_i}^2$
	od (t <sub>i-1</sub> )	do (t <sub>i</sub> )			
1	[432.00	696.75)	6	5.7726	0.009
2	[696.75	961.50)	9	6.8647	0.664
3	[961.50	1226.25)	7	10.1719	0.989
4	[1226.25	1491.00)	15	11.8081	0.863
5	[1491.00	1755.75)	6	10.7390	2.091
6	[1755.75	2020.500)	11	7.6515	1.465
7	[2020.50	2285.25)	2	4.2709	1.207
8	[2285.25	2550.00)]	4	2.7212	0.601

$$\chi_{sr}^2 = 7.890$$

#### **5. Izračunavanje broja stepeni slobode v**

$$v = k - r - 1,$$

- k = 8 - broj podintervala,
- r = 2- broj parametara Normalne raspodele  $\rightarrow T_0$  i  $\sigma_T$ .

$$v = k - r - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$$

#### **6. Određivanje teorijske vrednosti $\chi^2$ raspodele $\chi_{kr}^2$**

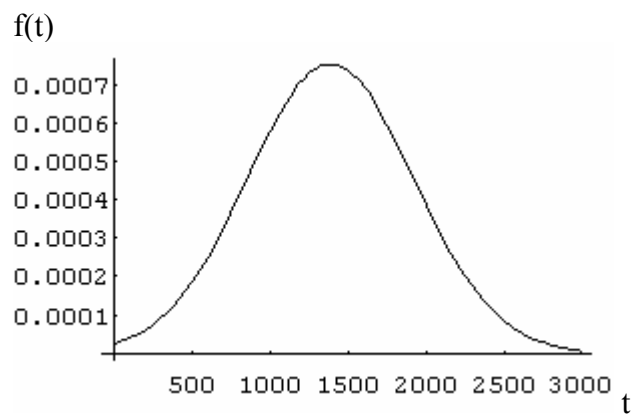
Usvaja se prag značajnosti  $\alpha=0,01$  iz tablica za  $\chi^2$  raspodelu (tabela 3., predavanje III) se određuje vrednost  $\chi_{kr}^2$  kao:

$$\chi_{kr}^2 = \chi^2(\alpha, v) = \chi^2(0.01; 5) = 15.1,$$

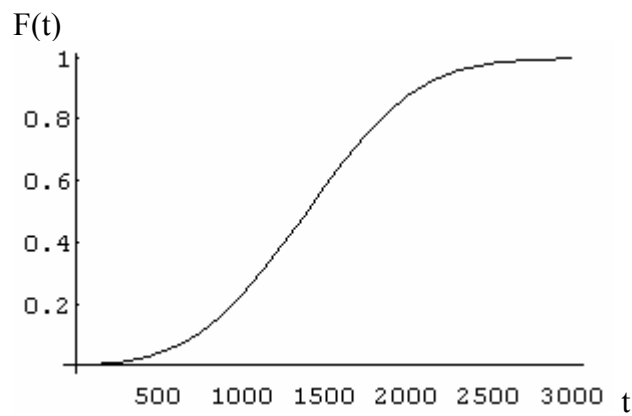
#### **7. Zaključak**

Pošto je  $\chi_{sr}^2 = 7.890 < \chi_{kr}^2 = 15.1$  prihvata se hipoteza da se dati uzorak može opisati Normalnom raspodelom  $N(T_0, \sigma_T)$  sa parametrima:  $T_0 = 1388.05$  i  $\sigma_T = 530.36$ .

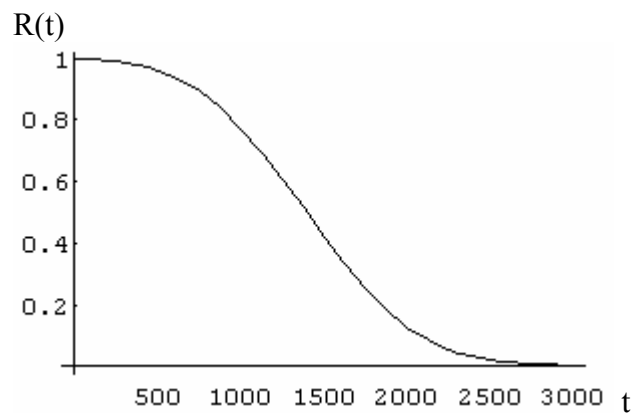
Gustina finkcije nepouzdanosti  $f(t)$ :



Funkcija nepouzdanosti  $F(t)$ :



Funkcija pouzdanosti  $R(t)$ :



Intenzitet opsluživanja  $\lambda(t)$ :

