

ZADATAK

U tabeli su data vremena rada do otkaza nekog elementa (T_i).
Primenom χ^2 – testa odrediti gustinu raspodele funkcije nepouzdanosti $f(t)$ i funkciju raspodele nepouzdanosti $F(t)$ za dati element. Na osnovu dobijenih rezultata (primenom χ^2 – testa, $f(t)$, $F(t)$) odrediti funkciju pouzdanosti $R(t)$ i intenzitet otkaza $\lambda(t)$ datog elementa u zavisnosti od vremena.

1. Statistička obrada uzorka

Obim uzorka: $n = 55$

Minimalni član: $T_{\min} = 0.00$

Maksimalni član: $T_{\max} = 138.35$

Srednja vrednost (Srednje vreme bezotkaznog rada):

$$T_0 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n T_i = 28.8469$$

Disperzija (vremena bezotkaznog rada):

$$D(T) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (T_i - T_0)^2 = 1464.9404$$

Srednje kvadratno odstupanje (vremena bezotkaznog rada):

$$\sigma_T = \sqrt{D(T)} = 38.2745$$

Broj intervala:

$$K = 5 \cdot \ln(n) = 5 \cdot \ln(55) = 8.702 \Rightarrow K = 8$$

Dužina intervala:

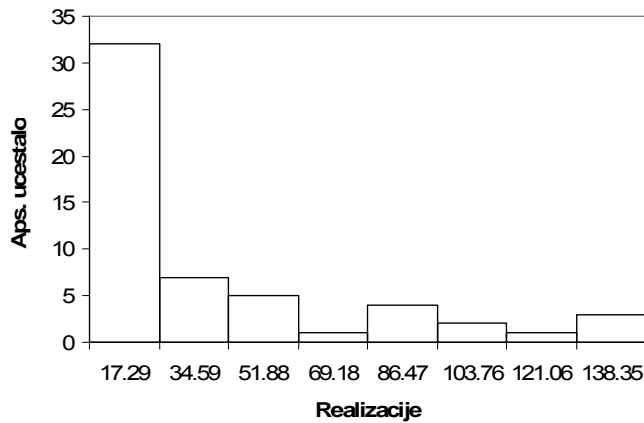
$$h = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{K} = \frac{138.35 - 0.00}{8} = 17.2938$$

Određivanje apsolutnih i relativnih učestalosti:

R. br. [i]	Intervali		Apsolutne učestalosti [m_i]	Relativne učestalosti [m_i / n]
	od (t_{i-1})	do (t_i)		
1	[0.0000	17.2938)	32	0.5818
2	[17.2938	34.5875)	7	0.1273
3	[34.5875	51.8813)	5	0.0909
4	[51.8813	69.1750)	1	0.0182
5	[69.1750	86.4688)	4	0.0727
6	[86.4688	103.7625)	2	0.0364
7	[103.7625	121.0563)	1	0.0182
8	[121.0563	138.3500]	3	0.0545
Σ			55	1.0000

R. br.	T_i
1	99.50
2	0.10
3	3.30
4	1.50
5	3.35
6	0.00
7	76.20
8	0.35
9	78.05
10	22.50
11	61.30
12	0.00
13	0.00
14	11.00
15	27.15
16	46.35
17	27.50
18	2.10
19	115.40
20	1.10
21	131.59
22	5.30
23	138.35
24	103.15
25	23.20
26	73.10
27	121.39
28	9.05
29	3.45
30	2.10
31	11.35
32	6.25
33	1.15
34	42.15
35	2.20
36	10.20
37	7.25
38	24.25
39	4.15
40	27.10
41	7.25
42	0.00
43	0.25
44	32.35
45	36.15
46	75.50
47	13.10
48	1.00
49	2.50
50	0.00
51	1.15
52	1.25
53	45.15
54	9.10
55	38.35

Crtanje histograma (apsolutnih ili relativnih učestalosti):



Na osnovu oblika histograma apsolutnih učestalosti zaključuje se da dati uzorak, vremena rada elementa do otkaza, treba testirati na pripadnost eksponencijalnoj raspodeli.

Određivanje parametra eksponencijalne raspodele:

$$\gamma = T_{\min} = 0.00$$

Određivanje parametra λ na osnovu srednje vrednosti uzorka T_0 :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n T_i - \gamma} = \frac{1}{T_0 - \gamma} = \frac{1}{28.8469 - 0.00} = 0.0347$$

Određivanje parametra λ na osnovu disperzije uzorka $D(T)$:

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (T_i - T_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{D(T)}} = \frac{1}{\sigma_T} = \frac{1}{38.2745} = 0.0261$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{2} \cdot (0.0347 + 0.0261) = 0.0304$$

Dati uzorak će se testirati na pripadnost eksponencijalnoj raspodeli sa parametrom $\lambda=0.0304$, odnosno:

$$f(t) = 0.0304 \cdot e^{-0.0304 \cdot t}; \quad F(t) = 1 - e^{-0.0304 \cdot t}$$

2. Izračunavanje verovatnoća realizacije intervala $[t_{i-1} \div t_i]$ pomoću usvojene teorijske raspodele

$$p_i = P(t_{i-1} \leq T \leq t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) \cdot dt = F(t_i) - F(t_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

$$\begin{aligned} p_1 = P(0 \leq T \leq 17.2938) &= \int_0^{17.2938} 0.0304 \cdot e^{-0.0304 \cdot t} \cdot dt = \\ &= [1 - e^{-0.0304 \cdot 17.2938}] - [1 - e^{-0.0304 \cdot 0}] = 0.4089 \end{aligned}$$

$$p_2 = P(17.2938 \leq T \leq 34.5875) = \int_{17.2938}^{34.5875} 0.0304 \cdot e^{-0.0304 \cdot t} \cdot dt =$$

$$= [1 - e^{-0.0304 \cdot 34.5875}] - [1 - e^{-0.0304 \cdot 17.2938}] = 0.2417$$

$$p_3 = P(34.5875 \leq T \leq 51.8813) = \int_{34.5875}^{51.8813} 0.0304 \cdot e^{-0.0304 \cdot t} \cdot dt =$$

$$= [1 - e^{-0.0304 \cdot 51.8813}] - [1 - e^{-0.0304 \cdot 34.5875}] = 0.1429$$

$$p_4 = P(51.8813 \leq T \leq 69.1750) = \int_{51.8813}^{69.1750} 0.0304 \cdot e^{-0.0304 \cdot t} \cdot dt =$$

$$= [1 - e^{-0.0304 \cdot 69.1750}] - [1 - e^{-0.0304 \cdot 51.8813}] = 0.0845$$

$$p_5 = P(69.1750 \leq T \leq 86.4688) = \int_{69.1750}^{86.4688} 0.0304 \cdot e^{-0.0304 \cdot t} \cdot dt =$$

$$= [1 - e^{-0.0304 \cdot 86.4688}] - [1 - e^{-0.0304 \cdot 69.1750}] = 0.0499$$

$$p_6 = P(86.4688 \leq T \leq 103.7625) = \int_{86.4688}^{103.7625} 0.0304 \cdot e^{-0.0304 \cdot t} \cdot dt =$$

$$= [1 - e^{-0.0304 \cdot 103.7625}] - [1 - e^{-0.0304 \cdot 86.4688}] = 0.0295$$

$$p_7 = P(103.7625 \leq T \leq 121.0563) = \int_{103.7625}^{121.0563} 0.0304 \cdot e^{-0.0304 \cdot t} \cdot dt =$$

$$= [1 - e^{-0.0304 \cdot 121.0563}] - [1 - e^{-0.0304 \cdot 103.7625}] = 0.0174$$

$$p_8 = P(121.0563 \leq T \leq \infty) = \int_{121.0563}^{\infty} 0.0304 \cdot e^{-0.0304 \cdot t} \cdot dt =$$

$$= [1 - e^{-0.0304 \cdot \infty}] - [1 - e^{-0.0304 \cdot 121.0563}] = 0.0252$$

3. Izračunavanje teorijskih učestalosti $n \cdot p_i$ za intervale $[t_{i-1} \div t_i]$

R. br. [i]	Intervali		teorijske učestalosti [$n \cdot p_i$]
	od (t_{i-1})	do (t_i)	
1	[0.0000	17.2938)	22.4895
2	[17.2938	34.5875)	13.2935
3	[34.5875	51.8813)	7.8595
4	[51.8813	69.1750)	4.6475
5	[69.1750	86.4688)	2.7445
6	[86.4688	103.7625)	1.6225
7	[103.7625	121.0563)	0.9570
8	[121.0563	∞]	1.3860

4. Izračunavanje veličine χ_{sr}^2 (kriterijum)

$$\chi_{sr}^2 = \sum_{i=1}^8 \frac{(m_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

R. br. [i]	Intervali		Apsolutne ucestalosti [m_i]	teorijske ucestalosti [$n \cdot p_i$]	$\chi_{sr_i}^2$
	od (t_{i-1})	do (t_i)			
1	[0.0000	17.2938)	32	22.4895	4.025
2	[17.2938	34.5875)	7	13.2935	2.979
3	[34.5875	51.8813)	5	7.8595	1.040
4	[51.8813	69.1750)	1	4.6475	2.861
5	[69.1750	86.4688)	4	2.7445	0.572
6	[86.4688	103.7625)	2	1.6225	0.087
7	[103.7625	121.0563)	1	0.9570	0.002
8	[121.0563	138.3500]	3	1.3860	1.873

$$\chi_{sr}^2 = 13.439$$

5. Izračunavanje broja stepeni slobode ν

$$\nu = k - r - 1,$$

- $k = 8$ - broj podintervala,
- $r = 1$ - broj parametara eksponencijalne raspodele $\rightarrow \lambda$.

$$\nu = k - r - 1 = 8 - 1 - 1 = 6$$

6. Određivanje teorijske vrednosti χ^2 raspodele χ_{kr}^2

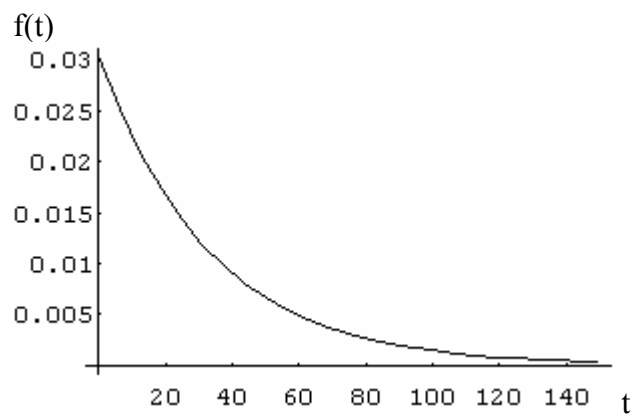
Usvaja se prag značajnosti $\alpha=0,01$ iz tablica za χ^2 raspodelu (tabela 3., predavanje III) se određuje vrednost χ_{kr}^2 kao:

$$\chi_{kr}^2 = \chi^2(\alpha, \nu) = \chi^2(0.01; 6) = 16.8,$$

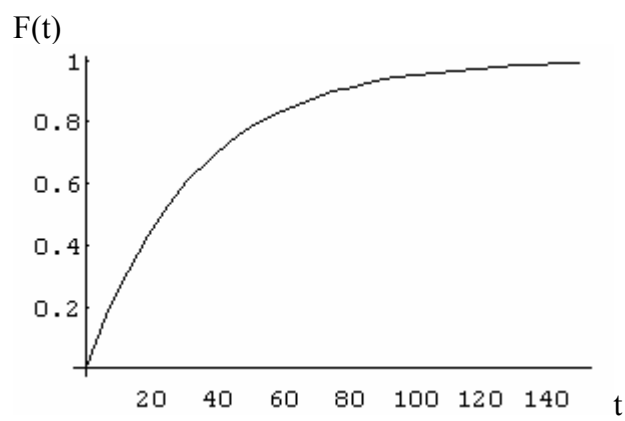
7. Zaključak

Pošto je $\chi_{sr}^2 = 13.439 < \chi_{kr}^2 = 16.8$ prihvata se hipoteza da se dati uzorak može opisati eksponencijalnom raspodelom: $f(t) = 0.0304 \cdot e^{-0.0304 \cdot t}$; $F(t) = 1 - e^{-0.0304 \cdot t}$.

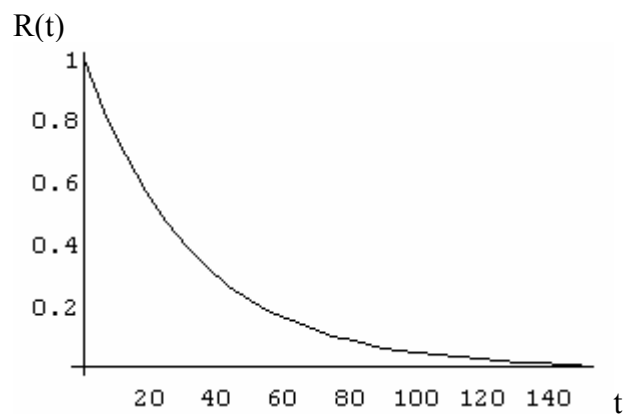
Gustina finkcije nepouzdanosti $f(t)$:



Funkcija nepouzdanosti $F(t)$:



Funkcija pouzdanosti $R(t)$:



Intenzitet opsluživanja $\lambda(t)$:

