

**Zadatak 01:**

Vremena rada do otkaza elemenata tehničkog sistema se mogu opisati eksponencijalnim zakonom raspodele čija je gustina  $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ . Cena planirane zamene elementa iznosi  $C_2 = 10 \cdot 10^3$  NJ, dok cena neplanirane zamene elementa iznosi  $C_1 = 80 \cdot 10^3$  NJ. Za  $\lambda = 0,3 \cdot 10^{-3}$  otkaza/čas odrediti:

- Srednju cenu po jedinici vremena rada sistema za strategiju „A“ zamene elemenata tehničkog sistema.
- Srednju cenu po jedinici vremena rada sistema za strategiju „B“ zamene elemenata tehničkog sistema, ako je vreme između dve planirane zamene  $t_b = 2500$  časova.
- Srednju cenu po jedinici vremena rada sistema za strategiju „C“ zamene elemenata tehničkog sistema, ako se planirana zamena vrši kad element dostigne starost od  $t_c = 3000$  časova rada.

Rešenje:

- a) Srednja cena po jedinici vremena rada sistema za strategiju „A“ zamene elemenata tehničkog sistema se određuje na osnovu izraza:

$$C_A = \frac{C_1}{T_0}$$

gde je:

$T_0$  – matematičko očekivanje dužine rada bez otkaza (srednje vreme rada do otkaza), koje se za slučaj da se vreme rada elemenata do otkaza može opisati eksponencijalnom raspodelom određuje kao:

$$T_0 = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,3 \cdot 10^{-3}} = 3333,33 \text{ časova.}$$

Za  $C_1 = 80 \cdot 10^3$  NJ srednja cena po jedinici vremena rada sistema iznosi:

$$C_A = \frac{80 \cdot 10^3}{3333,33} = 24 \text{ NJ/čas.}$$

- b) Srednja cena po jedinici vremena rada sistema za strategiju „B“ zamene elemenata tehničkog sistema se određuje na osnovu izraza:

$$C_B = \frac{C_2 + C_1 \cdot H(t_b)}{t_b}.$$

Kako je vreme rada elemenata do otkaza opisano eksponencijalnom raspodelom, to je proces obnavljanja prost odnosno radi se o Poasonovom procesu obnavljanja za koji funkcija obnavljanja  $H(t_b)$  ima sledeći oblik:

$$H(t_b) = \lambda \cdot t_b.$$

Funkcija obnavljanja  $H(t_b)$  za  $t_b = 2500$  časova ima vrednost:

$$H(2500) = 0,3 \cdot 10^{-3} \cdot 2500 \rightarrow H(2500) = 0,75 \text{ otkaza} \left[ \frac{\text{otk}}{h} \cdot h \right].$$

Za  $C_1 = 80 \cdot 10^3$  NJ,  $C_2 = 10 \cdot 10^3$  NJ i  $H(2500) = 0,75$  otkaza, srednja cena po jedinici vremena rada sistema iznosi:

$$C_B = \frac{10 \cdot 10^3 + 80 \cdot 10^3 \cdot 0,75}{2500} = \frac{10 + 60}{2,5} = 28 \text{ NJ/čas.}$$

c) Srednja cena po jedinici vremena rada sistema za strategiju „C“ zamene elemenata tehničkog sistema se određuje na osnovu izraza:

$$C_C = \frac{C_1 - (C_1 - C_2) \cdot R(t_c)}{\int_0^{t_c} R(t) \cdot dt}.$$

Za eksponencijalnu raspodelu vremena rada do otkaza, funkcija pouzdanosti  $R(t)$  ima sledeći oblik:

$$R(t) = e^{-\lambda \cdot t},$$

odakle je integral u izrazu za  $C_C$  oblika:

$$\int_0^{t_c} R(t) \cdot dt = \int_0^{t_c} e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt.$$

Uvođenjem smene:

$$-\lambda \cdot t = z; -\lambda \cdot dt = dz; dt = -\frac{dz}{\lambda},$$

gornji integral se može napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_c} e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt &= -\frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^{-\lambda \cdot t_c} e^z \cdot dz = -\frac{1}{\lambda} \cdot e^z \Big|_0^{-\lambda \cdot t_c} = -\frac{1}{\lambda} \cdot (e^{-\lambda \cdot t_c} - 1) = \frac{1}{\lambda} \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t_c}) = \\ &= T_0 \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t_c}). \end{aligned}$$

Za  $C_1 = 80 \cdot 10^3$  NJ,  $C_2 = 10 \cdot 10^3$  NJ i  $t_c = 3000$  časova, srednja cena po jedinici vremena rada sistema iznosi:

$$\begin{aligned} C_C &= \frac{C_1 - (C_1 - C_2) \cdot R(t_c)}{T_0 \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t_c})} = \frac{80 \cdot 10^3 - (80 \cdot 10^3 - 10 \cdot 10^3) \cdot e^{-0,3 \cdot 3000}}{3333,33 \cdot (1 - e^{-0,3 \cdot 3000})} = \\ &= \frac{80 - 70 \cdot e^{-0,9}}{3,33333 \cdot (1 - e^{-0,90})} = 26 \text{ NJ/čas.} \end{aligned}$$

**Zadatak 02:**

Funkcija obnavljanja nekog elementa je oblika  $H(t) = \lambda \cdot t^2$ . Odrediti optimalnu cenu rada tehničkog sistema po jedinici vremena za strategiju „B“ zamene elemenata tehničkog sistema ako je cena planirane zamene elementa  $C_2 = 5 \cdot 10^3$  NJ, cena neplanirane zamene elementa  $C_1 = 10 \cdot 10^3$  NJ i intenzitet otkaza  $\lambda = 1 \cdot 10^{-3}$  otkaza/čas.

Rešenje:

Da bi se odredila optimalna cena rada tehničkog sistema po jedinici vremena prema strategiji „B“ zamene elemenata tehničkog sistema, potrebno je prvo odrediti optimalni interval  $t_b^{opt}$  između dve planirane zamene. Optimalni interval između dve planirane zamene elemenata se određuje nalaženjem prvog izvoda izraza:

$$C_B = \frac{C_2 + C_1 \cdot H(t_b)}{t_b}$$

po  $t_b$  i njegovim izjednačavanjem sa nulom:

$$\frac{dC_B}{dt_b} = -\frac{C_2}{t_b^2} + C_1 \cdot \frac{H'(t_b) \cdot t_b - 1 \cdot H(t_b)}{t_b^2} = 0$$

$$\frac{1}{t_b^2} \cdot \{-C_2 + C_1 \cdot [H'(t_b) \cdot t_b - H(t_b)]\} = 0$$

$$H'(t_b) \cdot t_b - H(t_b) = \frac{C_2}{C_1}.$$

Za  $H(t) = \lambda \cdot t^2$  odnosno  $H'(t) = 2 \cdot \lambda \cdot t$  dobija se:

$$2 \cdot \lambda \cdot t_b \cdot t_b - \lambda \cdot t_b^2 = \frac{C_2}{C_1},$$

$$\lambda \cdot t_b^2 = \frac{C_2}{C_1} \rightarrow t_b^{opt} = \sqrt{\frac{C_2}{\lambda \cdot C_1}},$$

$$t_b^{opt} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^3}} = \sqrt{500} = 22,36 \text{ časova.}$$

Konačno optimalna cena rada tehničkog sistema po jedinici vremena za  $C_1 = 10 \cdot 10^3$  NJ,  $C_2 = 5 \cdot 10^3$  i  $t_b^{opt} = 22,36$  časova iznosi:

$$\begin{aligned} C_B^{opt} &= \frac{C_2 + C_1 \cdot H(t_b^{opt})}{t_b^{opt}} = \\ &= \frac{5 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 500}{22,36} = 447,23 \text{ NJ/čas.} \end{aligned}$$

**Zadatak 03:**

Funkcija pouzdanosti nekog elementa ima oblik  $R(t) = 1 - t/T_0$ . Odrediti optimalnu cenu rada tehničkog sistema po jedinici vremena za strategiju „C“ zamene elemenata tehničkog sistema ako je cena planirane zamene elementa  $C_2 = 3 \cdot 10^3$  NJ, cena neplanirane zamene elementa  $C_1 = 6 \cdot 10^3$  NJ i srednje vreme rada do otkaza  $T_0 = 4 \cdot 10^3$  časova.

Rešenje:

Da bi se odredila optimalna cena rada tehničkog sistema po jedinici vremena prema strategiji „C“ zamene elemenata tehničkog sistema, potrebno je prvo odrediti optimalnu „starost“  $t_c^{opt}$  elementa, tj. vreme rada posle koga element treba zameniti. Optimalna „starost“ elemenata se određuje nalaženjem prvog izvoda izraza:

$$C_C = \frac{C_1 - (C_1 - C_2) \cdot R(t_c)}{\int_0^{t_c} R(t) \cdot dt},$$

po  $t_c$  i njegovim izjednačavanjem sa nulom.

Vrednost integrala u gornjem izrazu je:

$$\int_0^{t_c} R(t) \cdot dt = \int_0^{t_c} \left(1 - \frac{t}{T_0}\right) \cdot dt = t \Big|_0^{t_c} - \frac{1}{T_0} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^{t_c} = t_c - \frac{t_c^2}{2 \cdot T_0} = \frac{2 \cdot T_0 \cdot t_c - t_c^2}{2 \cdot T_0}.$$

Konačan izraz za  $C_C$  je oblika:

$$C_C = \frac{C_1 - (C_1 - C_2) \cdot (1 - t_c/T_0)}{\frac{2 \cdot T_0 \cdot t_c - t_c^2}{2 \cdot T_0}} = \frac{2 \cdot C_1 \cdot T_0 - 2 \cdot (C_1 - C_2) \cdot (T_0 - t_c)}{2 \cdot T_0 \cdot t_c - t_c^2}.$$

Prvi izvod izraza za  $C_C$  po  $t_c$  je sledeći:

$$\begin{aligned} \frac{dC_C}{dt_c} &= \frac{2 \cdot (C_1 - C_2) \cdot (2 \cdot T_0 \cdot t_c - t_c^2) - 2 \cdot (T_0 - t_c) \cdot [2 \cdot C_2 \cdot T_0 + 2 \cdot (C_1 - C_2) \cdot t_c]}{(2 \cdot T_0 \cdot t_c - t_c^2)^2} \\ &= \frac{2 \cdot (C_1 - C_2) \cdot t_c^2 + 4 \cdot C_2 \cdot T_0 \cdot t_c - 4 \cdot C_2 \cdot T_0^2}{t_c^2 \cdot (2 \cdot T_0 - t_c)^2}. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem brojioca gornjeg izraza sa nulom:

$$2 \cdot [(C_1 - C_2) \cdot t_c^2 + 2 \cdot C_2 \cdot T_0 \cdot t_c - 2 \cdot C_2 \cdot T_0^2] = 0,$$

i zamenom brojnih vrednosti za:

$$C_1 - C_2 = 6 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^3,$$

$$2 \cdot C_2 \cdot T_0 = 2 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3 = 24 \cdot 10^6,$$

$$2 \cdot C_2 \cdot T_0^2 = 2 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot (4 \cdot 10^3)^2 = 96 \cdot 10^9,$$

u gornji izraz, dobija se kvadratna jednačina iz koje se određuje  $t_c^{opt}$  kao:

$$3 \cdot 10^3 \cdot t_c^2 + 24 \cdot 10^6 \cdot t_c - 96 \cdot 10^9 = 0, \text{ odnosno}$$

$$t_c^2 + 8 \cdot 10^3 \cdot t_c - 32 \cdot 10^6 = 0.$$

Optimalna „starost“  $t_c^{opt}$  elementa, tj. vreme rada posle koga element treba zameniti je:

$$t_c^{opt} = \frac{-8 \cdot 10^3 \pm \sqrt{(8 \cdot 10^3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32 \cdot 10^6)}}{2} = \frac{-8 \cdot 10^3 \pm 13,856 \cdot 10^3}{2}$$

$$t_c^{opt} = 2928,2 \text{ časa.}$$

Konačno optimalna cena rada tehničkog sistema po jedinici vremena za  $C_1 = 6 \cdot 10^3$  NJ,  $C_2 = 3 \cdot 10^3$  i  $t_c^{opt} = 2928,2$  časova iznosi:

$$C_C^{opt} = \frac{C_1 - (C_1 - C_2) \cdot (1 - t_c / T_0)}{t_c - \frac{t_c^2}{2 \cdot T_0}} = \frac{6 \cdot 10^3 - (6 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^3) \cdot (1 - \frac{2928,2}{4000})}{2928,2 - \frac{2928,2^2}{2 \cdot 4000}}$$

$$C_C^{opt} = 2,799 \text{ NJ/čas.}$$