

POJAM PROCESA OBNAVLJANJA I STRATEGIJE ZAMENA I OPRAVKI ELEMENATA. MODELI ZAMENE TEHNIČKIH SREDSTAVA

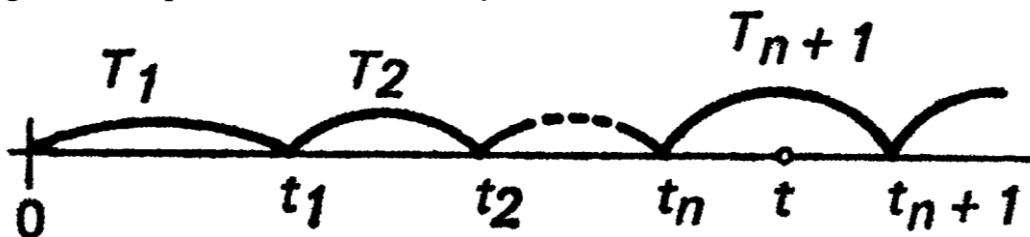
Pojam procesa obnavljanja

Do sad je razmatran rad elemenata ili sistema do prvog otkaza. Pretpostavka je da se element obnavlja posle otkaza. Obnavljanje se izvodi zamenom elementa novim ili remontovanim elementom. Pretpostavka je da se zamena izvodi **trenutno**. Remontom se elementu koji je otkazao potpuno obnavljaju njegova radna svojstva. Za model je svejedno da li je element koji je otkazao zamenjen novim ili remontovanim elementom - delom.

Element počinje da radi u trenutku $t=0$, posle slučajnog vremena T_1 otkaze. U momentu otkaza element se zamenjuje novim elementom koji posle slučajnog vremena T_2 otkazuje, pa se onda on zamenjuje trećim elementom itd. Ovaj proces se produžava neograničeno. Slučajna vremena bezotkaznog rada elemenata $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ su nezavisne slučajne promenljive koje su definisane odgovarajućom raspodelom verovatnoća – *funkcijom nepouzdanosti*. Njihova funkcija raspodele $F(T_n)$ definiše se kao: (Slika 1.)

$$F(t) = P(T_n < t), \quad n=1,2,\dots$$

dok se gustina raspodele definiše kao: $f(t) = F'(t)$.



Slika 1. Proces obnavljanja.

Proces obnavljanja

Momenti otkaza odnosno obnavljanja $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ obrazuju slučajan tok (proces) koji se naziva *proces obnavljanja*. (Slika 1.)

Momenti otkaza odnosno obnavljanja $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ se određuju na osnovu vremena bezotkaznog rada elemenata $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ na sledeći način:

$$t_1 = T_1,$$

$$t_2 = T_1 + T_2,$$

.....

$$t_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n,$$

.....

Prost proces obnavljanja.

Ako su slučajne promenljive T_1, T_2, \dots (vremena rada elemenata do otkaza) nezavisne i sa istom raspodelom verovatnoća, onda se proces obnavljanja naziva *prost proces obnavljanja*. (*1)

Opšti proces obnavljanja

Ako slučajna promenljiva T_1 , ima gustinu raspodele verovatnoće $f_1(t)$, a ostale slučajne promenljive T_2, T_3, \dots imaju istu raspodelu verovatnoća datu gustinom raspodele $f_2(t)$, $n=2,3, \dots$, onda se proces obnavljanja naziva *opštim procesom obnavljanja*. U najvećem broju slučajeva gustina raspodele vremena rada do otkaza prvog elementa razlikuje se od gustina vremena rada do otkaza ostalih elemenata (prvi posmatrani element je nov, tzv. „prva ugradnja“). (*2)

Stacionarni proces obnavljanja

Specijalno ako je $f_1(t) = R(t)/T_0$, gde je $R(t)$ - funkcija pouzdanosti, a T_0 - srednje vreme rada do otkaza (MTTF, MTBF), opšti proces obnavljanja naziva se *stacionarnim procesom obnavljanja*. Ovo je slučaj kada je proces obnavljanja počeo u dalekoj prošlosti a posmatranje je počelo u trenutku označenom sa $t=0$. Tada je za već stabilan režim rada elemenata, gustina raspodele vremena rada do otkaza jednaka: $R(t)/T_0$. (*3)

Poasonov proces obnavljanja

Prost proces obnavljanja, kod koga je raspodela vremena rada do otkaza eksponencijalna sa intenzitetom λ , koji se još naziva i *Poasonov proces obnavljanja*, je i stacionaran proces obnavljanja. (*4)

$$R(t) = e^{-\lambda \cdot t}; T_0 = \frac{1}{\lambda} \rightarrow f_1(t) = \frac{R(t)}{T_0} = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}; \quad f_2(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

Vreme do n -tog obnavljanja

Ako su zbog otkaza elementi zamenjeni u trenucima $T_1, T_1 + T_2, \dots$, onda je n -ti element zamenjen u trenutku: (*5)

$$t_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n.$$

$F(t_n)$, funkcija raspodele vremena t_n do n -tog obnavljanja, definiše se kao: (**6)

$$P(t_n < t) = P(T_1 + T_2 + \dots + T_n < t) = F_n(t),$$

dok je gustina raspodele vremena t_n :

$$f_n(t) = F'_n(t).$$

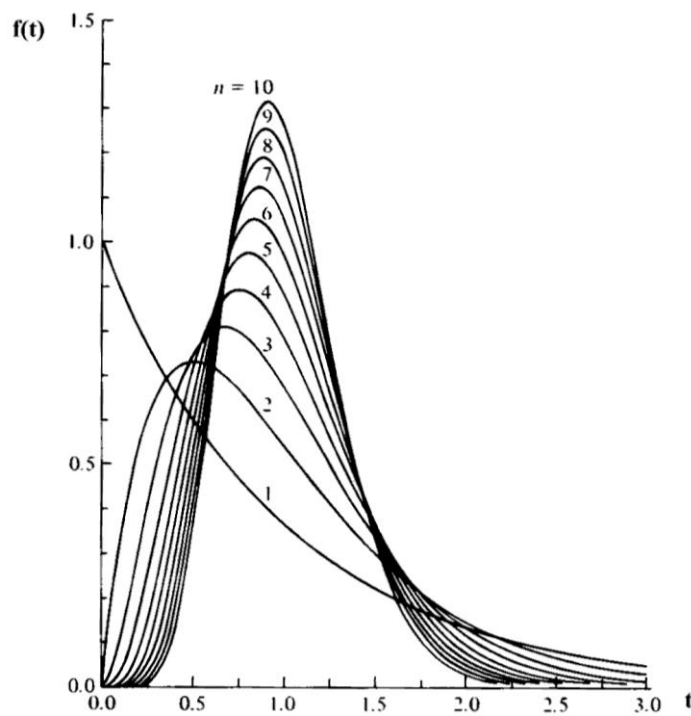
Ako se posmatra prost proces obnavljanja tada slučajne promenljive T_1, T_2, \dots, T_n imaju istu raspodelu verovatnoća (funkciju nepouzdanosti) definisanu funkcijom raspodele $F(t)$ i gustinom raspodele $f(t) = F'(t)$.

Ako su slučajne promenljive T_1, T_2, \dots, T_n definisane eksponencijalnom raspodelom sa parametrom λ ($f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ - Poasonov proces obnavljanja), tada slučajna promenljiva t_n ima Erlangovu raspodelu n -tog reda tj. gustina raspodele vremena do n -tog obnavljanja je: (Slika 2.) (**7) (Videti: Dodatak I)

$$f_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lambda^n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \quad (\text{IV.1})$$

odnosno funkcija raspodele: (Videti: Dodatak II)

$$F_n(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}. \quad (\text{IV.2})$$



Slika 2. Gustina Erlangove raspodele.

Na sličan način kao u prethodnom slučaju, pokazuje se da je gustina raspodele slučajne promenljive $t_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$, koja je jednaka zbiru n slučajnih promenljivih raspodeljenih po Erlangovoj raspodeli reda k :

$$f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \lambda^k \cdot t^{k-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t},$$

takođe Erlangova raspodela reda $n \cdot k$, tj.:

$$f_n(t) = \frac{1}{(n \cdot k - 1)!} \cdot \lambda^{n \cdot k} \cdot t^{n \cdot k - 1} \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

kao i da je funkcija raspodele jednaka:

$$F_n(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n \cdot k - 1} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

Broj obnavljanja za vreme – t (**9)

Jedna od osnovnih karakteristika procesa obnavljanja je broj obnavljanja (zamen) za vreme t , $N(t)$.

Broj obnavljanja u intervalu vremena (t_1, t_2) je jednak:

$$N(t_1, t_2) = N(t_2) - N(t_1).$$

Za određivanje raspodele verovatnoća slučajne promenljive $N(t)$ potrebno je uspostaviti vezu između broja obnavljanja za vreme t i vremena t_n do n -tog obnavljanja. Ako je $t_n > t$, tj. ako je n -to obnavljanje izvršeno van intervala $(0, t)$, onda je u intervalu $(0, t)$, izvršeno manje od n obnavljanja odnosno $N(t) < n$, tj.

$$P[N(t) \geq n] = P(t_n < t) = F_n(t),$$

odakle sledi da je :

$$P[N(t) < n] = 1 - F_n(t),$$

$$P[N(t) < n + 1] = 1 - F_{n+1}(t),$$

odnosno:

$$F_n(t) - F_{n+1}(t) = P[N(t) < n + 1] - P[N(t) < n] = P[N(t) = n] = P_n(t).$$

Za slučaj Poasonovog procesa obnavljanja gde slučajna veličina t_n ima Erlangovu raspodelu reda n , raspodela verovatnoća broja obnavljanja za vreme t je jednaka:

$$F_n(t) - F_{n+1}(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda \cdot t} - 1 + \sum_{i=0}^n \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$P_n(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}. \quad (**8)$$

Ako vreme do n -tog obnavljanja ima Erlangovu raspodelu reda n , onda broj obnavljanja za vreme t ima Poasonovu raspodelu.

U opštem slučaju, ako slučajna promenljiva $t_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$, predstavlja zbir n slučajnih promenljivih raspodeljenih po Erlangovoj raspodeli reda k , odnosno ako je funkcija raspodele vremena do n -tog obnavljanja jednaka:

$$F_n(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n \cdot k - 1} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda \cdot t},$$

tada je raspodela verovatnoća broja obnavljanja za vreme t je jednaka:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^{n \cdot k}}{(n \cdot k)!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

Funkcija obnavljanja

Matematičko očekivanje broja obnavljanja, tj. srednji broj obnavljanja do trenutka t definiše se kao funkcija obnavljanja: (*10)

$$H(t) = M[N(t)]$$

Srednji broj obnavljanja na intervalu vremena (t_1, t_2) je jednak:

$$H(t_1, t_2) = M[N(t_1, t_2)] = M[N(t_2)] - M[N(t_1)] = H(t_2) - H(t_1).$$

$$\begin{aligned} H(t) = M[N(t)] &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P[N(t) = n] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot [F_n(t) - F_{n+1}(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot F_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot F_{n+1}(t) = \\ &= F_1(t) + 2 \cdot F_2(t) + \dots - F_2(t) - 2 \cdot F_3(t) - \dots = \\ &= F_1(t) + F_2(t) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \end{aligned}$$

Funkcija obnavljanja za slučaj stacionarnog procesa obnavljanja: (*11)

$$H(t) = \frac{t}{T_0},$$

tj. matematičko očekivanje broja obnavljanja na intervalu $(0, t)$ proporcionalno je dužini intervala.

Funkcija obnavljanja za slučaj Poasonovog procesa obnavljanja: (*12)

$$H(t) = \lambda \cdot t.$$

Gustina obnavljanja

Gustina obnavljanja se definiše kao: (*13)

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[N(t, t + \Delta t)]}{\Delta t} = H'(t)$$

Gustina obnavljanja $h(t)$ predstavlja srednji broj obnavljanja koji se očekuje u malom intervalu vremena iza trenutka t .

$$h(t) = H'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F'_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$$

jer je:

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$$

Gustina obnavljanja za slučaj stacionarnog procesa obnavljanja: (*14)

$$H(t) = \frac{t}{T_0}, \text{ pa je } h(t) = \frac{1}{T_0}.$$

Gustina obnavljanja za slučaj Poasonovog procesa obnavljanja: (*15)

$$h(t) = \lambda.$$

Strategije zamena i opravki elemenata

Otkaz tehničkog sistema najčešće izaziva neželjene posledice. Npr. otkaz saobraćajnog sredstva može uticati na bezbednost saobraćaja, zbog toga se kod takvih sistema mora vršiti zamena dotrajalih delova pre otkaza. U drugim slučajevima je ekonomski isplativije dozvoliti da element otkaze pa tek onda izvršiti njegovu zamenu

U zavisnosti od željenog nivoa pouzdanosti i od troškova održavanja bira se strategija zamene elemenata tehničkog sistema.

Na izbor strategije zamene elemenata pored željenog nivoa pouzdanosti utiču i: konstruktivne karakteristike tehničkog sistema, eksploatacioni uslovi, zakon raspodele otkaza, ukupan broj otkaza u određenom vremenskom intervalu, itd.

Najčešće se sreću sledeće strategije zamene elemenata tehničkog sistema: (*16)

- A. Zamena se vrši posle otkaza po redosledu po kome su se dešavali otkazi.
- B. Zamene se vrše u unapred planiranim vremenskim trenucima $t_b, 2 \cdot t_b, \dots$, bez obzira na starost elemenata koji se zamenjuju. Ako se otkaz desi pre planiranog momenta zamene, onda se opet zamena vrši po redosledu po kome su se dešavali otkazi.
- C. Zamene se vrše tek kada element dostigne određenu “starost” t_c . Ukoliko dođe do otkaza zamena se vrši po redosledu po kome su se dešavali otkazi.

Izbor određene strategije zamena, uslovljen je obično ekonomskim pokazateljima. Taj pokazatelj je u većini slučajeva “srednja cena po jedinici vremena rada sistema”.

Strategija A: (*17)

Srednja cena po jedinici vremena rada sistema je:

$$C_A = \frac{C_1}{T_0}$$

gde je:

C_1 - srednja cena (neplanirane) zamene elementa koja se vrši posle otkaza,

T_0 - matematičko očekivanje dužine rada bez otkaza (srednje vreme rada do otkaza), MTTF, MTBF.

Strategija B: (*18)

U vremenskom intervalu t_b , između dve planirane zamene, izvršiće se jedna planirana zamena elementa čija je cena C_2 . Broj neplaniranih zamena elemenata određen je vrednošću funkcije obnavljanja u trenutku planirane zamene $H(t_b)$, čija je srednja jedinična cena C_1 .

Srednja cena po jedinici vremena rada sistema za ovu strategiju je:

$$C_B = \frac{C_2 + C_1 \cdot H(t_b)}{t_b}.$$

Strategija C: (**19)

Srednje vreme rada elementa do zamene jednako je:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_c} t \cdot f(t) \cdot dt + t_c \cdot R(t_c) &= - \int_0^{t_c} t \cdot R'(t) \cdot dt + t_c \cdot R(t_c) = \\ &= -t \cdot R(t) \Big|_0^{t_c} + \int_0^{t_c} R(t) \cdot dt + t_c \cdot R(t_c) = \\ &= -t_c \cdot R(t_c) + 0 \cdot R(0) + t_c \cdot R(t_c) = \int_0^{t_c} R(t) \cdot dt \end{aligned}$$

gde je:

$f(t)$ - gustina funkcije nepouzdanosti,

$R(t_c)$ - funkcija pouzdanosti.

Troškovi zamene iznose:

$$R(t_c) \cdot C_2 + [1 - R(t_c)] \cdot C_1.$$

Srednja cena po jedinici vremena rada sistema za ovu strategiju je:

$$C_C = \frac{C_1 - (C_1 - C_2) \cdot R(t_c)}{\int_0^{t_c} R(t) \cdot dt}.$$

Upoređivanjem veličina C_A , C_B , C_C donosi se odluka o izboru strategije zamene elemenata tehničkog sistema.

MODELI ZAMENE TEHNIČKIH SREDSTAVA

Mašine ili postrojenja tokom eksploatacije doživljavaju fizičko ili ekonomsko starenje. Fizičko starenje podrazumeva trošenje elemenata mašine do njene tehničke neispravnosti za dalju proizvodnju.

U toku eksploatacije mašine treba predvideti sredstva za njeno održavanje tj. za preventivno održavanje, zamenu i remont dotrajalih delova. Posle izvesnog vremena ti troškovi mogu biti veći od vrednosti nove mašine i troškova njenog održavanja.

Poseban vid zastarevanja mašina je poznat kao “moralno” zastarevanje. U toku eksploatacije mašine dolazi se do poboljšanih varijanti ili novih mašina ili postrojenja. Tako da stara mašina, iako ispravna može biti zastarela.

Cilj modela zamene je da se odredi momenat kada neku mašinu ili postrojenje treba zameniti novim. Kriterijum u većini slučajeva je fizička starost, ali taj kriterijum zanemaruje troškove eksploatacije, kao i dohodak. U narednim modelima kao kriterijum zamene će se uzimati troškovi eksploatacije mašine.

Troškovi eksploatacije mašine su: (*20)

- 1) troškovi mašine pri kupovini i zameni,
- 2) troškovi održavanja (mogu biti fiksni ili zavisni od vremena).

Troškovi održavanja nastaju u različitim vremenskim periodima. Ako se troškovi računaju nominalno u vremenu nastanka dolazi se do modela bez diskontnog faktora, dok ako se troškovi svode na zajednički period dobijaju modeli sa diskontnim faktorom. (*21)

Prilikom zamene mašina može biti potpuno ili delimično otpisana. Tako da postoje modeli ne uzimaju u obzir neotpisani deo mašine (potpuni otpis) i modeli kod kojih se troškovi umanjuju za vrednost mašine (delimičan otpis) prilikom zamene. (*22)

Model zamene bez diskontnog faktora i sa potpunim otpisom (***)23

U trenutnu $t=0$ nabavljena je mašina čija je vrednost K . Troškovi tokom eksploatacije su poznati i zavise od vremena. Funkcija $f(n)$ predstavlja troškove održavanja u periodu n . Periodi $n=1,2, \dots$ su međusobno jednaki.

Troškovi eksploatacije za n perioda zavise od nabavne vrednosti mašine i troškova održavanja tj.

$$F(n) = K + \sum_{i=1}^n f(i); \quad n = 1, 2, \dots$$

Prosečni troškovi eksploatacije za periode zaključno sa n -tim su:

$$\bar{F}(n) = \frac{1}{n} \cdot K + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(i); \quad n = 1, 2, \dots$$

Funkcija prosečnih troškova $\bar{F}(n)$ može imati minimalnu vrednost u zavisnosti od $f(n)$. Ako postoji takva vrednost za n da je ispunjen uslov:

$$\bar{F}(n-1) > \bar{F}(n) < \bar{F}(n+1)$$

ili

$$\bar{F}(n-1) - \bar{F}(n) > 0$$

$$\bar{F}(n+1) - \bar{F}(n) > 0,$$

tada mašinu treba zameniti novom posle n perioda eksploatacije.

Nabavna vrednost, kao i troškovi održavanja nove mašine su isti kao i za mašinu koja se zamenjuje.

Uslov $\bar{F}(n+1) - \bar{F}(n) > 0$ se transformiše u:

$$\begin{aligned} \bar{F}(n+1) - \bar{F}(n) &= \frac{1}{n+1} \cdot K + \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} f(i) - \frac{1}{n} \cdot K - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(i) > 0 \\ -\frac{1}{n \cdot (n+1)} \cdot K - \frac{1}{n \cdot (n+1)} \cdot \sum_{i=1}^n f(i) + \frac{1}{n+1} \cdot f(n+1) &> 0 \\ f(n+1) &> \bar{F}(n). \end{aligned}$$

Na sličan način uslov $\bar{F}(n-1) - \bar{F}(n) > 0$ se transformiše u:

$$f(n) < \bar{F}(n-1).$$

Period u kome treba zameniti mašinu ili postrojenje mora da zadovolji prethodna dva uslova tj. za n treba da se izabere period tako da su troškovi održavanja u $n+1$ periodu veći od prosečnih troškova eksploatacije zaključno sa n -tim periodom i da su troškovi održavanja u n -tom periodu manji od prosečnih troškova eksploatacije zaključno sa $n-1$ periodom.

Model zamene bez diskontnog faktora i sa delimičnim otpisom ***24

Neka je u trenutku $t=0$ kupljena mašina čija je nabavna vrednost K . Mašina tokom vremena gubi vrednost i $\phi(t)$ predstavlja faktor otpisa vrednosti mašine. Posle vremena dužine t vrednost mašine je $K \cdot \phi(t)$.

Funkcija $\phi(t)$ u trenutku $t=0$ mora biti $\phi(0) = 1$ jer mašina je tek nabavljena i ima vrednost K . Tokom vremena vrednost mašine se smanjuje pa funkcija $\phi(t)$ mora biti monotono opadajuća i mora da teži nuli sa povećanjem vremena.

Funkcija $f(t)$ predstavlja kumulativne troškove održavanja i u trenutku $t=0$ mora biti $f(0)=0$. Troškovi tokom vremena rastu pa je $f(t)$ monotono rastuća funkcija. Troškovi u nekom vremenskom periodu (t_1, t_2) mogu se dobiti kao $f(t_2) - f(t_1)$.

Ukupni troškovi eksploatacije mašine su nabavna vrednost mašine K , troškovi održavanja $f(t)$ umanjani za vrednost mašine u trenutku t :

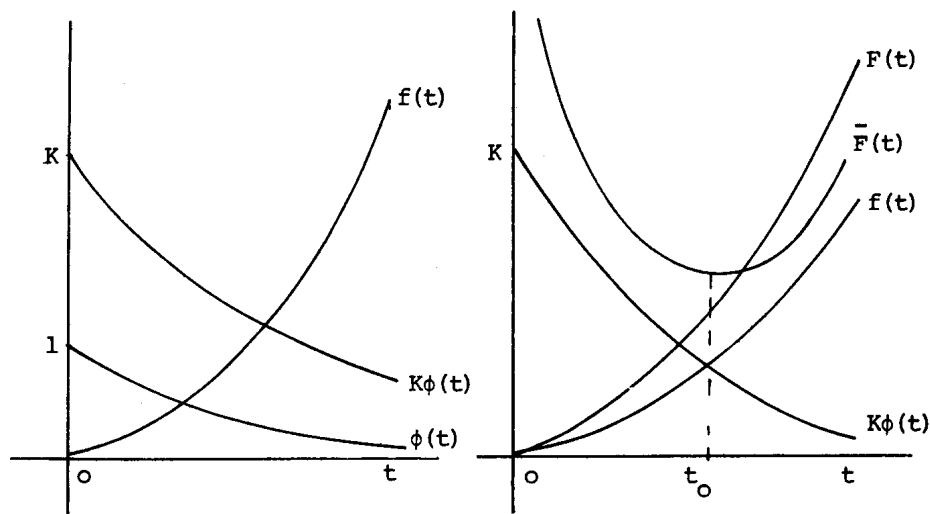
$$F(t) = K + f(t) - K \cdot \phi(t)$$

ili

$$F(t) = K \cdot [1 - \phi(t)] + f(t).$$

$F(t)$ je monotono rastuća funkcija u vremenu t . Kako je $\phi(t)$ monotono opadajuća funkcija i uvek manja od 1, to je $1 - \phi(t)$ monotono rastuća funkcija i $1 - \phi(0) = 0$. Uz $f(0)=0$ dobija se da je $F(0)=0$.

Kad $t \rightarrow \infty$, $\phi(\infty) \rightarrow 0$ tj. $1 - \phi(\infty) \rightarrow 1$ pa u ukupne eksploatacione troškove ulazi neumanjena nabavna vrednost mašine. (slika 3.)



slika 3. Troškovi eksploatacije mašine.

Ukupni eksploatacioni troškovi nemaju ekstremnu vrednost budući da su predstavljeni monotono rastućom funkcijom, iz tog razloga se definišu prosečni troškovi kao:

$$\bar{F}(t) = \frac{1}{t} \cdot K \cdot [1 - \phi(t)] + \frac{1}{t} \cdot f(t).$$

Prosečni troškovi $\bar{F}(t)$ biće opadajuća funkcija do nekog vremena t_0 , posle čega će ovi troškovi rasti. Trenutak $t=t_0$ je vreme kada su prosečni troškovi u periodu $[0, t_0]$ minimalni. (slika 3.)

Dužina vremena eksploatacije $[0, t_0]$ za koju su minimalni prosečni troškovi dobija se preko prvog izvoda funkcije $\bar{F}(t)$ kao:

$$\frac{d\bar{F}(t)}{dt} = \frac{1}{t^2} \cdot \{ [-K \cdot \phi'(t) + f'(t)] \cdot t - K \cdot [1 - \phi(t)] - f(t) \} = 0.$$

Prethodna jednačina može imati rešenje za $t=t_0$, tj. prosečni troškovi će biti minimalni ako je ispunjen uslov:

$$\frac{d^2\bar{F}(t)}{dt^2} > 0.$$

Na osnovu t_0 mogu se odrediti:

1. Troškovi eksploatacije:

$$F(t_0) = K \cdot [1 - \phi(t_0)] + f(t_0),$$

2. Prosečni troškovi eksploatacije:

$$\bar{F}(t_0) = \frac{1}{t_0} \cdot K \cdot [1 - \phi(t_0)] + \frac{1}{t_0} \cdot f(t_0),$$

3. Vrednost mašine pri zameni:

$$K \cdot \phi(t_0),$$

4. Vrednost otpisanog dela mašine:

$$K \cdot [1 - \phi(t_0)].$$

Model zamene sa diskontnim faktorom (**25)

U prethodnim modelima troškovi održavanja u više uzastopnih perioda su sabirani u nominalnim iznosima (iznosi u trenutku nastanka). Troškovi održavanja se izražavaju u novčanim jedinicama koje nisu adekvatne, jer novac vremenom gubi vrednost. Iz tog razloga se troškovi moraju svesti na isti period, prvi, poslednji ili neki drugi.

U ovom slučaju prvi period je izabran za osnovni i troškovi održavanja u njemu su a_1 . Troškovi održavanja u drugom periodu svedeni na prvi period su $a_2 \cdot q$ gde je:

$$q = \frac{1}{1+r} \text{ - diskontni faktor sa stopom } r.$$

Troškovi održavanja iz trećeg perioda svedeni na prvi period su $a_3 \cdot q^2$, dok su troškovi održavanja iz n -tog perioda svedeni na prvi period $a_n \cdot q^{n-1}$.

Ukupni eksploatacioni troškovi do n -tog perioda tj. nabavna vrednost mašine (K) i troškovi održavanja (a_i), svedeni na prvi period, su:

$$K + a_1 + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q^2 + \dots + a_n \cdot q^{n-1}.$$

Posle n perioda eksploatacije mašina se zamenjuje novom istih karakteristika. Nabavna cena nove mašine i cena održavanja u njenom prvom periodu svedeni na prvi period stare mašine su:

$$(K + a_1) \cdot q^n.$$

Troškovi održavanja nove mašine svedeni na prvi period stare mašine su:

$$a_2 \cdot q^{n+1} + a_3 \cdot q^{n+2} + \dots + a_n \cdot q^{2n-1}.$$

Pod pretpostavkom da postoji više uzastopnih zamena mašina istih karakteristika, tada su ukupni eksploatacioni troškovi svih mašina svedeni na prvi period prve mašine $F(n)$ sledeći:

$$\begin{aligned} F(n) = & K + a_1 + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q^2 + \dots + a_n \cdot q^{n-1} + \\ & + (K + a_1) \cdot q^n + a_2 \cdot q^{n+1} + a_3 \cdot q^{n+2} + \dots + a_n \cdot q^{2n-1} + \\ & + \dots \end{aligned}$$

Uočava se da za sve mašine postoji zajednička suma:

$$K + \sum_{i=1}^n a_i \cdot q^{i-1},$$

pa se $F(n)$ može izraziti kao:

$$F(n) = (K + \sum_{i=1}^n a_i \cdot q^{i-1}) \cdot (1 + q^n + q^{2n} + \dots),$$

ili

$$F(n) = (K + \sum_{i=1}^n a_i \cdot q^{i-1}) \cdot \frac{1}{1 - q^n}.$$

gde $(1 + q^n + q^{2n} + \dots)$ predstavlja geometrijski red jer je diskontni faktor

$$q = \frac{1}{1+r}, r > 0, \text{ manji od jedan tj. } 0 < q < 1.$$

Funkcija $F(n)$ predstavlja ukupne eksploatacione troškove više mašina istih karakteristika sukcesivno zamenjivanih, svedene na prvi period prve mašine. $F(n)$ je definisana na diskretnom skupu i imaće minimalnu vrednost za ono n koje zadovoljava relacije:

$$F(n-1) > F(n) < F(n+1)$$

ili

$$F(n-1) - F(n) > 0$$

$$F(n+1) - F(n) > 0.$$

Kako je:

$$F(n+1) = (K + \sum_{i=1}^n a_i \cdot q^{i-1} + a_{n+1} \cdot q^n) \cdot \frac{1}{1-q^{n+1}}$$

a

$$K + \sum_{i=1}^n a_i \cdot q^{i-1} = F(n) \cdot (1-q^n)$$

to je:

$$F(n+1) = [F(n) \cdot (1-q^n) + a_{n+1} \cdot q^n] \cdot \frac{1}{1-q^{n+1}}.$$

Konačno:

$$F(n+1) - F(n) = [F(n) \cdot (1-q^n) + a_{n+1} \cdot q^n] \cdot \frac{1}{1-q^{n+1}} - F(n) > 0$$

odakle je:

$$[F(n) \cdot (q^{n+1} - q^n) + a_{n+1} \cdot q^n] \cdot \frac{1}{1-q^{n+1}} > 0 \text{ ili}$$

$$F(n) \cdot (q-1) + a_{n+1} > 0,$$

jer je $1-q^{n+1} > 0$ i $0 < q^n < 1$.

Konačno uslov $F(n+1) - F(n) > 0$ se transformiše u:

$$F(n) < \frac{a_{n+1}}{1-q}.$$

Na sličan način uslov $F(n-1) - F(n) > 0$ se transformiše u:

$$F(n-1) > \frac{a_n}{1-q}.$$

Prethodna dva izraza određuju uslove koje moraju da ispunjavaju troškovi eksploatacije i troškovi održavanja da bi došlo do zamene mašine. Mašina se zamenjuje u onom periodu (n) kada su troškovi eksploatacije manji od troškova održavanja u narednom ($n+1$) periodu podeljenih sa $(1-q)$ i kada su troškovi eksploatacije, u prethodnom periodu ($n-1$), veći od troškova održavanja u n – tom periodu podeljenih sa $(1-q)$.

Prethodni uslovi mogu da se napišu i na sledeći način:

$$a_{n+1} > (1-q) \cdot F(n)$$

$$a_{n+1} > (1-q) \cdot (K + \sum_{i=1}^n a_i \cdot q^{i-1}) \cdot \frac{1}{1-q^n}$$

$$a_{n+1} > \frac{K + a_1 + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q^2 + \dots + a_n \cdot q^{n-1}}{1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}} = S(n).$$

odnosno:

$$a_n < \frac{K + a_1 + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q^2 + \dots + a_{n-1} \cdot q^{n-2}}{1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2}} = S(n-1).$$

Period n , kada treba zameniti mašinu, jeste onaj u kome su troškovi održavanja mašine manji od prosečnih troškova održavanja po svim periodima do n -tog sa ponderima $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2}$, i ako su troškovi održavanja u narednom $n+1$ periodu veći od prosečnih troškova održavanja po svim periodima zaključno sa n -tim sa ponderima $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$.

Model grupne zamene (**26)

U mnogim tehničkim sistemima neki deo može biti zastupljen u više komada. U zameni takvih neispravnih delova moguća su dva načina. Prvi način je da se svaki neispravan deo zameni pojedinačno u trenutku otkaza. Drugi način je grupna zamena delova kada se broj delova koji su otkazali toliko uveća da je ekonomičnije zameniti sve delove novim bez obzira da li su otkazali ili ne.

Kod grupne zamene bitan je broj neispravnih delova u nekom vremenskom periodu. Za očekivati je da je u početku broj neispravnih delova manji i da se sa vremenom povećava.

Oznake korišćene u modelu:

- N – ukupan broj istih delova,
- c_1 – troškovi grupne zamene svedeni na jedan deo,
- c_2 – troškovi pojedinačne zamene dela,
- $K(n)$ – broj neispravnih delova u n -tom periodu između dve uzastopne grupne zamene.

Ukupni troškovi pojedinačnih zamena u n perioda i grupne zamene posle tih n perioda su:

$$F(n) = c_1 \cdot N + c_2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} K(i).$$

Funkcija $F(n)$ je monotono rastuća jer su troškovi $c_1 \cdot N$ fiksni a troškovi $c_2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} K(i)$ rastu sa povećanjem broja perioda.

Prosečni troškovi po jednom periodu su:

$$\bar{F}(n) = \frac{c_1}{n} \cdot N + \frac{c_2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} K(i)$$

i predstavljaju zbir inverzne funkcije $\frac{c_1}{n} \cdot N$ i funkcije koja može izvesno vreme rasti ali posle većeg broja perioda ona opada. Ova funkcija može imati minimum za ono n koje ispunjava relaciju:

$$\bar{F}(n-1) > \bar{F}(n) < \bar{F}(n+1)$$

ili

$$\bar{F}(n-1) - \bar{F}(n) > 0$$

$$\bar{F}(n+1) - \bar{F}(n) > 0.$$

Kako je:

$$\bar{F}(n+1) = \frac{c_1}{n+1} \cdot N + \frac{c_2}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^n K(i) = \frac{c_1}{n+1} \cdot N + \frac{c_2}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} K(i) + \frac{c_2}{n+1} \cdot K(n),$$

to je:

$$\bar{F}(n+1) - \bar{F}(n) = \frac{c_1}{n+1} \cdot N + \frac{c_2}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^n K(i) + \frac{c_2}{n+1} \cdot K(n) - \frac{c_1}{n} \cdot N - \frac{c_2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} K(i),$$

ili

$$-\frac{c_1}{n \cdot (n+1)} \cdot N - \frac{c_2}{n \cdot (n+1)} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} K(i) + \frac{c_2}{n+1} \cdot K(n) > 0$$

$$-\bar{F}(n) + c_2 \cdot K(n) > 0$$

što predstavlja uslov za period u kome treba izvršiti grupnu zamenu delova koji su otkazali.

Konačno uslov $\bar{F}(n+1) - \bar{F}(n) > 0$ se transformiše u:

$$\bar{F}(n) < c_2 \cdot K(n).$$

Na sličan način uslov $\bar{F}(n-1) - \bar{F}(n) > 0$ se transformiše u:

$$\bar{F}(n-1) > c_2 \cdot K(n-1).$$

Za period n u kome treba izvršiti grupnu zamenu, treba odabrati onaj u kome su prosečni troškovi po svim periodima, računajući i taj, manji od troškova pojedinačnih zamena u tom periodu i da su prosečni troškovi do prethodnog perioda $(n-1)$ veći od troškova pojedinačnih zamena u prethodnom periodu.

PITANJA:

1. Prost proces obnavljanja.
2. Opšti proces obnavljanja.
3. Stacionarni proces obnavljanja.
4. Poasonov proces obnavljanja.
5. Vreme do n -tog obnavljanja.
6. Funkcija i gustina raspodele vremena t_n do n -tog obnavljanja.
7. Funkcija i gustina raspodele vremena t_n do n -tog obnavljanja za Poasonov proces obnavljanja.
8. Raspodela verovatnoća broja obnavljanja za Poasonov proces obnavljanja.
9. Broj obnavljanja za vreme – t .
10. Definicija funkcije obnavljanja.
11. Funkcija obnavljanja za slučaj stacionarnog procesa obnavljanja.
12. Funkcija obnavljanja za slučaj Poasonovog procesa obnavljanja.
13. Definicija gustine obnavljanja.
14. Gustina obnavljanja u slučaju stacionarnog procesa obnavljanja.
15. Gustina obnavljanja u slučaju Poasonovog procesa obnavljanja.
16. Vrste strategija zamene elemenata tehničkog sistema.
17. Strategija „A“.
18. Strategija „B“.
19. Strategija „C“.
20. Troškovi eksploatacije mašine.
21. Razlika između modela sa diskontnim faktorom i modela bez diskontnog faktora.
22. Razlika između modela sa potpunim otpisom i modela sa delimičnim otpisom.
23. Model zamene bez diskontnog faktora i sa potpunim otpisom.
24. Model zamene bez diskontnog faktora i sa delimičnim otpisom.
25. Model zamene sa diskontnim faktorom.
26. Model grupne zamene.

Dodatak I

Primenom matematičke indukcije dokazaće se da slučajna promenljiva z , koja je jednaka zbiru n slučajnih promenljivih x_1, x_2, \dots, x_n raspodeljenih po eksponencijalnoj raspodeli sa gustinom raspodele $f(x_i) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x_i}$ $i = 1, 2, \dots, n$, ima Erlangovu raspodelu n -tog reda čija je gustina raspodele jednaka:

$$f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lambda^n \cdot z^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot z}, \quad (\text{D.1})$$

gde je:

$$z = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Provera za $n=1$:

Zamenom $n=1$ u izraz (D.1) za $f(z)$ dobija se:

$$f(z) = \frac{1}{(1-1)!} \cdot \lambda^1 \cdot z^{1-1} \cdot e^{-\lambda \cdot z} = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot z},$$

kako je u ovom slučaju $z = x_1$, izraz (D.1) je tačan za $n=1$.

Provera za $n=2$:

Gustinu raspodele slučajne promenljive z koja je jednaka zbiru dve slučajne promenljive x_1 i x_2 moguće je odrediti konvolucijom te dve slučajne promenljive.

Kako je:

$$z = x_1 + x_2, \quad f(x_1) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x_1}, \quad f(x_2) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x_2}$$

sledi da je:

$$x_2 = z - x_1,$$

$$f(z) = \int_0^z \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (z-x_1)} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x_1} \cdot dt_1 = \int_0^z \lambda^2 \cdot e^{-\lambda \cdot z} \cdot dt_1,$$

$$f(z) = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda \cdot z} \cdot t_1 \Big|_0^z = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda \cdot z} \cdot z - 0,$$

$$f(z) = \lambda^2 \cdot z \cdot e^{-\lambda \cdot z}.$$

Zamenom $n=2$ u izraz (D.1) za $f(z)$ dobija se:

$$f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \cdot \lambda^2 \cdot z^{2-1} \cdot e^{-\lambda \cdot z} = \lambda^2 \cdot z \cdot e^{-\lambda \cdot z},$$

čime je dokazana tačnost izraza (D.1) za $n=2$.

Pretpostavlja se da je izraz (D.1) tačan za $n = m$ i $z = y$ tj.:

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_m, \quad f(y) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lambda^m \cdot y^{m-1} \cdot e^{-\lambda \cdot y}.$$

Ako gornji izraz važi za $n = m$ onda takođe važi i za $n = m + 1$, tj.:

$$z = x_1 + x_2 + \dots + x_m + x_{m+1}, \quad f(z) = \frac{1}{m!} \cdot \lambda^{m+1} \cdot z^m \cdot e^{-\lambda \cdot z}. \quad (\text{D.2})$$

Na osnovu gore napisanog, slučajna promenljiva z se može napisati kao:

$$z = y + x_{m+1},$$

odnosno: $x_{m+1} = z - y$.

Konvolucijom slučajnih promenljivih y i x_{m+1} dobija se:

$$f(z) = \int_0^z \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (z-y)} \cdot \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lambda^m \cdot y^{m-1} \cdot e^{-\lambda \cdot y} \cdot dy,$$

$$f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lambda^{m+1} \cdot e^{-\lambda \cdot z} \cdot \int_0^z y^{m-1} \cdot dy,$$

$$f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lambda^{m+1} \cdot e^{-\lambda \cdot z} \cdot \frac{1}{m} \cdot y^m \Big|_0^z = \frac{1}{m \cdot (m-1)!} \cdot \lambda^{m+1} \cdot e^{-\lambda \cdot z} \cdot [z^m - 0],$$

$$f(z) = \frac{1}{m!} \cdot \lambda^{m+1} \cdot z^m \cdot e^{-\lambda \cdot z}.$$

Kako je prethodni izraz identičan sa izrazom (D.2) to je dokazano da je gustina raspodele zbira n slučajnih promenljivih raspodeljenih po eksponencijalnoj raspodeli jednaka gustini Erlangove raspodele n -tog reda: (izraz D.1).

$$f_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lambda^n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

Dodatak II

Funkcija raspodele Erlangove raspodele n -tog reda dobija se integracijom izraza za gustinu Erlangove raspodele: (izraz D.1)

$$F(t) = \int_0^t f(z) \cdot dz = \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lambda^n \cdot z^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot z} \cdot dz,$$

$$F(t) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lambda^n \cdot \int_0^t z^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot z} \cdot dz = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lambda^n \cdot I(n, t). \quad (\text{D.3})$$

Gornji integral $I(n, t)$ se rešava iterativno primenom parcijalne integracije:

$$\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v) \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du.$$

U integralu $I(n, t)$, u i dv se biraju na sledeći način:

$$u = z^{n-1}, du = (n-1) \cdot z^{n-2} \cdot dz; dv = e^{-\lambda \cdot z} \cdot dz, v = -\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot z}.$$

Zamenom gornjih vrednosti u formulu za parcijalnu integraciju dobija se:

$$I(n, t) = \left(-z^{n-1} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot z} \right) \Big|_0^t - \int_0^t \left(-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot z} \right) \cdot (n-1) \cdot z^{n-2} \cdot dz,$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t} + \frac{1}{\lambda} \cdot (n-1) \cdot \int_0^t z^{n-2} \cdot e^{-\lambda \cdot z} \cdot dz.$$

Primenom parcijalne integracije, na prikazan način, još $n-2$ puta dobija se:

$$I(n, t) = -e^{-\lambda \cdot t} \cdot \left[\frac{t^{n-1}}{\lambda} + \frac{(n-1) \cdot t^{n-2}}{\lambda^2} + \dots + \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot t^2}{\lambda^{n-2}} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^{n-2}} \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot \left[\left(-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot z} \cdot z \right) \Big|_0^t + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^t e^{-\lambda \cdot z} \cdot dz \right],$$

odnosno rešenje integrala $I(n, t)$:

$$I(n, t) = -e^{-\lambda \cdot t} \cdot \left[\frac{t^{n-1}}{\lambda} + \frac{(n-1) \cdot t^{n-2}}{\lambda^2} + \dots + \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot t^1}{\lambda^{n-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot t^0}{\lambda^n} \right] + \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{\lambda^n}.$$

Zamenom rešenja integrala $I(n, t)$ u izraz (D.3) dobija se:

$$F(t) = -e^{-\lambda \cdot t} \cdot \left[\frac{\lambda^{n-1} \cdot t^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\lambda^{n-2} \cdot t^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{\lambda^2 \cdot t^2}{2!} + \frac{\lambda^1 \cdot t^1}{1!} + \frac{\lambda^0 \cdot t^0}{0!} \right] + 1,$$

odnosno konačan izraz za funkciju raspodele Erlangove raspodele n -tog reda:

$$F(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$