

Zadatak 01:

Gustina raspodele vremena bezotkaznog rada $f(t)$ je ravnomerna za: $t_1 < t < t_2$.
Naći intenzitet otkaza – $\lambda(t)$.

Rešenje:

Veza između: intenziteta otkaza $\lambda(t)$, gustine raspodele bezotkaznog rada $f(t)$ i funkcije pouzdanosti $R(t)$ definisana je izrazom:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}.$$

Gustina ravnomerne raspodele na intervalu: $t_1 < t < t_2$ je definisana kao:

$$f(t) = \frac{1}{t_2 - t_1}, \text{ za } t \in [t_1; t_2].$$

Pomoću gustine raspodele bezotkaznog rada $f(t)$ funkcija pouzdanosti $R(t)$ se izračunava kao:

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(t) \cdot dt$$

tj.

$$R(t) = \int_t^{t_2} \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot t \Big|_t^{t_2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot (t_2 - t)$$

$$R(t) = \frac{(t_2 - t)}{t_2 - t_1}.$$

Zamenom izraza za gustinu raspodele bezotkaznog rada $f(t)$ i funkciju pouzdanosti $R(t)$ u izraz za intenziteta otkaza $\lambda(t)$ dobija se:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\frac{1}{t_2 - t_1}}{\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}} \rightarrow \lambda(t) = \frac{1}{t_2 - t}.$$

Zadatak 02:

Pouzdanost elementa se menja po linearnom zakonu: $R(t) = 1 - \frac{t}{t_0}$ za $0 < t < t_0$,
 $R(t) = 0$, za $t > t_0$. Naći intenzitet otkaza $\lambda(t)$ i srednje vreme bezotkaznog rada T_0
 datog elementa.

Rešenje:

Srednje vreme bezotkaznog rada T_0 , na osnovu funkcije pouzdanosti $R(t)$, može se
 direktno odrediti rešavanjem sledećeg integrala:

$$T_0 = \int_0^{t_0} R(t) \cdot dt = \int_0^{t_0} \left[1 - \frac{t}{t_0} \right] \cdot dt = \left[t - \frac{t}{t_0} \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^{t_0} = t_0 - \frac{1}{t_0} \cdot \frac{t_0^2}{2} - 0$$

$$T_0 = \frac{t_0}{2}.$$

Veza između: intenziteta otkaza $\lambda(t)$, gustine raspodele bezotkaznog rada $f(t)$ i
 funkcije pouzdanosti $R(t)$ definisana je izrazom:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}.$$

Gustina raspodele bezotkaznog rada $f(t)$ se može izračunati kao prvi izvod funkcije
 pouzdanosti $R(t)$ po vremenu, tj.:

$$f(t) = -\frac{d}{dt} R(t) = -\frac{d}{dt} \left[1 - \frac{t}{t_0} \right]$$

$$f(t) = \frac{1}{t_0}.$$

Zamenom izraza za gustinu raspodele bezotkaznog rada $f(t)$ i funkciju pouzdanosti
 $R(t)$ u izraz za intenziteta otkaza $\lambda(t)$ dobija se:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\frac{1}{t_0}}{1 - \frac{t}{t_0}} = \frac{\frac{1}{t_0}}{\frac{t_0 - t}{t_0}} \rightarrow \lambda(t) = \frac{1}{t_0 - t}.$$

Napomena:

Kada $t \rightarrow t_0$, tada $\lambda \rightarrow \infty$.

Zadatak 03:

Gustina raspodele vremena bezotkaznog rada elementa data je izrazom:

$$f(t) = 2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t}).$$

Odrediti: funkciju pouzdanosti $R(t)$, intenzitet otkaza $\lambda(t)$ i srednje vreme bezotkaznog rada T_0 datog elementa.

Rešenje:

Funkcija pouzdanosti $R(t)$ se na osnovu gustine raspodele bezotkaznog rada $f(t)$ izračunava kao:

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(t) \cdot dt$$

tj.

$$\begin{aligned} R(t) &= \int_t^{\infty} 2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t}) \cdot dt = \int_t^{\infty} (2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} - 2 \cdot \lambda \cdot e^{-2 \cdot \lambda \cdot t}) \cdot dt = \\ &= 2 \cdot \lambda \cdot \int_t^{\infty} e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt - 2 \cdot \lambda \cdot \int_t^{\infty} e^{-2 \cdot \lambda \cdot t} \cdot dt \end{aligned}$$

Za rešavanje gornjih integrala potrebno je uvesti sledeće smene:

$$\begin{aligned} -\lambda \cdot t &= z; -\lambda \cdot dt = dz; dt = -\frac{dz}{\lambda}, \\ -2 \cdot \lambda \cdot t &= x; -2 \cdot \lambda \cdot dt = dx; dt = -\frac{dx}{2 \cdot \lambda}. \end{aligned}$$

Zamenom uvedenih smena u integrale dobija se:

$$\begin{aligned} R(t) &= 2 \cdot \lambda \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \cdot \int_{-\lambda \cdot t}^{-\infty} e^z \cdot dz - 2 \cdot \lambda \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot \lambda}\right) \cdot \int_{-2 \cdot \lambda \cdot t}^{-\infty} e^x \cdot dx \\ R(t) &= -2 \cdot e^z \Big|_{-\lambda \cdot t}^{-\infty} + e^x \Big|_{-2 \cdot \lambda \cdot t}^{-\infty} = -2 \cdot \left[e^{-\infty} - e^{-\lambda \cdot t}\right] + \left[e^{-\infty} - e^{-2 \cdot \lambda \cdot t}\right] \\ R(t) &= 2 \cdot e^{-\lambda \cdot t} - e^{-2 \cdot \lambda \cdot t}, \text{ odnosno} \\ R(t) &= e^{-\lambda \cdot t} \cdot (2 - e^{-\lambda \cdot t}). \end{aligned}$$

Intenzitet otkaza $\lambda(t)$ se dobija kao količnik gustine raspodele bezotkaznog rada $f(t)$ i funkcije pouzdanosti $R(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t})}{e^{-\lambda \cdot t} \cdot (2 - e^{-2 \cdot \lambda \cdot t})} = \frac{\lambda \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t})}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda \cdot t}}.$$

Integraljenjem funkcije pouzdanosti $R(t)$ po vremenu dobija se srednje vreme bezotkaznog rada T_0 kao:

$$\begin{aligned} T_0 &= \int_0^{\infty} R(t) \cdot dt = \int_0^{\infty} (2 \cdot e^{-\lambda \cdot t} - e^{-2 \cdot \lambda \cdot t}) \cdot dt = \\ &= 2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\infty} e^{-2 \cdot \lambda \cdot t} \cdot dt \end{aligned}$$

Uvođenjem smena i rešavanjem gornjih integrala dobija se:

$$\begin{aligned} T_0 &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} \right) \cdot e^z \Big|_0^{-\infty} - \left(-\frac{1}{2 \cdot \lambda} \right) \cdot e^x \Big|_0^{-\infty} = -\frac{2}{\lambda} \cdot [0 - 1] + \frac{1}{2 \cdot \lambda} \cdot [0 - 1] \\ T_0 &= \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2 \cdot \lambda} = \frac{4 - 1}{2 \cdot \lambda} \\ T_0 &= \frac{3}{2 \cdot \lambda}. \end{aligned}$$

Zadatak 04:

Intenzitet otkaza elementa zavisi od vremena i dat je izrazom:

$$\lambda(t) = \frac{k^2 \cdot t}{1 + k \cdot t};$$

Odrediti: funkciju pouzdanosti $R(t)$, gustinu funkcije raspodele vremena bezotkaznog rada $f(t)$ i srednje vreme bezotkaznog rada T_0 datog elementa.

Rešenje:

Veza između intenziteta otkaza $\lambda(t)$ i funkcije pouzdanosti $R(t)$ definisana je izrazom:

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) \cdot dt}.$$

Pri rešavanju integrala u eksponentu prethodnog izraza:

$$-\int_0^t \lambda(t) \cdot dt = -\int_0^t \frac{k^2 \cdot t}{1 + k \cdot t} \cdot dt,$$

potrebno je uvesti sledeću smenu:

$$1 + k \cdot t = z; k \cdot dt = dz; dt = \frac{dz}{k} \rightarrow k \cdot t = z - 1.$$

Zamenom uvedenih smena u prethodni integral dobija se:

$$\begin{aligned} -\int_0^t \frac{k^2 \cdot t}{1 + k \cdot t} \cdot dt &= -k \cdot \int_0^t \frac{k \cdot t}{1 + k \cdot t} \cdot dt = -k \cdot \int_1^{1+k \cdot t} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{k} \cdot dz = \\ &= -\int_1^{1+k \cdot t} \frac{dz}{z} + \int_1^{1+k \cdot t} \frac{dz}{z} = -z \Big|_1^{1+k \cdot t} + \ln(z) \Big|_1^{1+k \cdot t} = \\ &= -1 - k \cdot t + 1 + \ln(1 + k \cdot t) - \ln(1) = \\ &= -k \cdot t + \ln(1 + k \cdot t). \end{aligned}$$

Zamenom dobijenog rešenja u početni izraz za funkciju pouzdanosti $R(t)$ dobija se:

$$\begin{aligned} R(t) &= e^{[-k \cdot t + \ln(1 + k \cdot t)]} = e^{-k \cdot t} \cdot e^{\ln(1 + k \cdot t)} \\ R(t) &= e^{-k \cdot t} \cdot (1 + k \cdot t). \end{aligned}$$

Gustine raspodele bezotkaznog rada $f(t)$ može se odrediti kao proizvod intenziteta otkaza $\lambda(t)$ i funkcije pouzdanosti $R(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \rightarrow f(t) = \lambda(t) \cdot R(t).$$

$$f(t) = \frac{k^2 \cdot t}{1 + k \cdot t} \cdot e^{-k \cdot t} \cdot (1 + k \cdot t),$$

$$f(t) = k^2 \cdot t \cdot e^{-k \cdot t}.$$

Srednje vreme bezotkaznog rada T_0 dobija se integraljenjem funkcije pouzdanosti $R(t)$ po vremenu:

$$T_0 = \int_0^{\infty} R(t) \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-k \cdot t} (1 + k \cdot t) \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-k \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\infty} k \cdot t \cdot e^{-k \cdot t} \cdot dt.$$

Za rešavanje prvog integrala u gornjem izrazu potrebno je uvesti sledeću smenu:

$$-k \cdot t = z; -k \cdot dt = dz; dt = -\frac{dz}{k},$$

što daje:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-k \cdot t} \cdot dt &= -\frac{1}{k} \cdot \int_0^{-\infty} e^z \cdot dz = -\frac{1}{k} \cdot e^z \Big|_0^{-\infty} = -\frac{1}{k} \cdot [e^{-\infty} - e^0] - \frac{1}{k} \cdot [0 - 1] = \\ &= \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Drugi integral u gornjem izrazu:

$$\int_0^{\infty} k \cdot t \cdot e^{-k \cdot t} \cdot dt,$$

se pomoću istovetne smene svodi na sledeći oblik:

$$\int_0^{\infty} k \cdot t \cdot e^{-k \cdot t} \cdot dt = -\frac{1}{k} \cdot \int_0^{-\infty} (-z) \cdot e^z \cdot dz = -\frac{1}{k} \cdot \int_{-\infty}^0 z \cdot e^z \cdot dz,$$

koji se rešava parcijalnom integracijom uvodeći sledeće smene:

$$u = z; \quad du = dz; \quad u' = 1,$$

$$v' = e^z; \quad v = \int e^z \cdot dz; \quad v = e^z.$$

Zamenjujući uvedene smene u formulu za parcijalnu integraciju dobija se:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{k} \cdot \int_{-\infty}^0 z \cdot e^z \cdot dz &= -\frac{1}{k} \cdot \left[z \cdot e^z \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^z \cdot 1 \cdot dz \right] = \\
 &= -\frac{1}{k} \cdot \left\{ \left[0 \cdot e^0 - (-\infty \cdot e^{-\infty}) \right] - e^z \Big|_{-\infty}^0 \right\} = -\frac{1}{k} \cdot \left[- (e^0 - e^{-\infty}) \right] = -\frac{1}{k} \cdot (-1 + 0) = \\
 &= \frac{1}{k}.
 \end{aligned}$$

Konačno, srednje vreme bezotkaznog rada T_0 dobija se kao zbir rešenja prethodna dva integrala, tj.:

$$\begin{aligned}
 T_0 &= \int_0^{\infty} e^{-k \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\infty} k \cdot t \cdot e^{-k \cdot t} \cdot dt = \frac{1}{k} + \frac{1}{k}, \\
 T_0 &= \frac{2}{k}.
 \end{aligned}$$

Zadatak 05:

Intenzitet otkaza jednog elementa vazduhoplova je konstantan i iznosi:

$\lambda = 0,82 \cdot 10^{-3}$ otkaza/čas. Naći:

- pouzdanost (verovatnoću bezotkaznog rada) leta vazduhoplova koji traje 6 časova – $R(6)$,
- vrednost funkcije nepouzdanosti $f(t)$ za 1000 časova leta – $f(1000)$,
- srednje vreme bezotkaznog rada vazduhoplova – T_0 , i
- pouzdanost između drugog ($t_1=2$) i četvrtog časa leta ($t_2=4$) – $R(2,4)$.

Rešenje:

Kako je intenzitet otkaza konstantan $\lambda = \text{const.}$, to funkciji nepouzdanosti $F(t)$ odgovara funkcija eksponencijalne raspodele, dok je funkcija pouzdanosti $R(t)$ definisana kao:

$$R(t) = e^{-\lambda \cdot t},$$

odakle za $\lambda = 0,82 \cdot 10^{-3}$ otkaza/čas pouzdanost leta koji traje 6 časova iznosi:

$$R(6) = e^{-0,82 \cdot 10^{-3} \cdot 6} = 0,995.$$

Gustina funkcije nepouzdanosti $f(t)$ odgovara gustini eksponencijalne raspodele:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

i za 1000 časova leta i intenzitet otkaza $\lambda = 0,82 \cdot 10^{-3}$ otkaza/čas ima sledeću vrednost:

$$f(1000) = 0,82 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-0,82 \cdot 10^{-3} \cdot 1000} = 0,36 \cdot 10^{-3}.$$

U slučaju kada funkcija nepouzdanosti $F(t)$ odgovara funkciji eksponencijalne raspodele tada je srednje vreme bezotkaznog rada T_0 jednako recipročnoj vrednosti intenziteta otkaza:

$$T_0 = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,82 \cdot 10^{-3}} = 1219,5 \text{ časova.}$$

Pouzdanost između drugog i četvrtog časa leta – $R(2,4)$ određuje se na sledeći način:

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= e^{-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) \cdot dt} = R(2,4) = e^{-\int_2^4 0,82 \cdot 10^{-3} \cdot dt} = e^{-0,82 \cdot 10^{-3} \cdot t} \Big|_2^4 = \\ &= e^{-0,82 \cdot 10^{-3} \cdot [4-2]} = e^{-0,82 \cdot 10^{-3} \cdot 2} = e^{-1,64 \cdot 10^{-2}} = 0,998. \end{aligned}$$

Zadatak 06:

Srednji broj merenja lasera, koji se koristi za merenje rastojanja, između dva uzastopna otkaza je 3.000.000. Ako se u toku jedne sekunde izvrši 10 merenja, naći intenzitet otkaza i pouzdanost lasera u toku 0,5 časova neprekidnog merenja. Pretpostaviti da se može primeniti eksponencijalna raspodela.

Rešenje:

Pod pretpostavkom da se može primeniti eksponencijalna raspodela, slede da je intenzitet otkaza konstantan $\lambda = \text{const.}$, i jednak recipročnoj vrednosti srednjeg vremena bezotkaznog rada T_0 .

$$T_0 = \frac{3.000.000}{10} = 300.000 \text{ s, ili } 83,33 \text{ časova.}$$

Intenzitet otkaza iznosi:

$$\lambda = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{83,33} = 0,012 \text{ otkaza/čas.}$$

Pouzdanost lasera za 0,5 časova neprekidnog merenja iznosi:

$$R(t) = e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow R(t) e^{-0,012 \cdot 0,5} = 0,994.$$

Zadatak 07:

Raspodela vremena rada elementa do otkaza je normalna sa parametrima $T_0 = 100$ h i $\sigma^2 = 1000$ h. Odrediti pouzdanost i intenzitet otkaza za $t_1 = 70$ i $t_2 = 130$ časova rada, kao i pouzdanost u vremenskom intervalu između sedamdesetog i stotridesetog časa rada.

Rešenje:

Pošto se vrednosti funkcije normalne raspodele $N(T_0, \sigma)$, u opštem slučaju, ne mogu direktno izračunati potrebno je datu normalnu raspodelu svesti na normalnu raspodelu čije je matematičko očekivanje nula i srednje kvadratno odstupanje jedan na tzv. standardizovanu normalnu raspodelu $N(0, 1)$. Svođenje tj. „standardizacija“ se vrši tako što se slučajnoj promenljivoj T raspodeljenoj po normalnoj raspodeli $N(T_0, \sigma)$ oduzme matematičko očekivanje T_0 nakon čega se dobijena razlika podeli sa srednjim kvadratnim odstupanjem σ , tj dobijena nova (standardizovana) slučajna promenljiva z raspodeljena po normalnoj raspodeli $N(0, 1)$ je oblika:

$$z = \frac{T - T_0}{\sigma}.$$

U tom slučaju mogu se koristiti tablice sa izračunatim vrednostima funkcije standardizovane normalne raspodele (Laplasova funkcija $\phi(t)$) – tabela 2).

Polazeći od definicije funkcije pouzdanosti i pretpostavke da je raspodela vremena rada elementa do otkaza je normalna, pouzdanost elementa se izračunava na sledeći način:

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) = P\left(\frac{T - T_0}{\sigma} > \frac{t - T_0}{\sigma}\right) = 1 - P\left(\frac{T - T_0}{\sigma} \leq \frac{t - T_0}{\sigma}\right) = \\ &= 1 - \left[P\left(\frac{T - T_0}{\sigma} < 0\right) + P\left(0 \leq \frac{T - T_0}{\sigma} \leq \frac{t - T_0}{\sigma}\right) \right] = \\ &= 1 - \left[0,5 + \phi\left(\frac{t - T_0}{\sigma}\right) \right] = 0,5 - \phi\left(\frac{t - T_0}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Napomena:

Za Laplasovu funkciju $\phi(t)$ važi: $\phi(-t) = -\phi(t)$.

Primenjujući gornji izraz, pouzdanost za $t_1 = 70$ časova rada elementa određuje se na sledeći način:

$$R(t_1) = R(70) = 0,5 - \phi\left(\frac{70 - 100}{31,6}\right) = 0,5 - \phi(-0,95),$$

kako je $\phi(-0,95) = -\phi(0,95) = -0,3289$, (vrednost za $\phi(0,95) = 0,3289$ se očitava iz tablice 2) i $\sigma = \sqrt{1000} = 31,6$, dobija se:

$$R(70) = 0,5 - (-0,3289) = 0,8289.$$

Na sličan način se dobija vrednost pouzdanosti za $t_1 = 130$ časova rada datog elementa:

$$R(t_2) = R(130) = 0,5 - \phi\left(\frac{130 - 100}{31,6}\right) = 0,5 - \phi(0,95)$$

$$R(130) = 0,5 - 0,3289 = 0,1711.$$

Za određivanje intenziteta otkaza koristi se izraz:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}.$$

Vrednost gustine normalne raspodele (funkcije nepouzdanosti) $f(t)$ za parametre T_0 i σ i odgovarajući argument t moguće je direktno odrediti iz izraza:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(t-T_0)^2}{2 \cdot \sigma^2}}.$$

Radi lakšeg izračunavanja uspostavlja se veza između gustine normalne raspodele sa parametrima T_0 i σ i standardizovane normalne raspodele – $N(0,1)$, čije su vrednosti date u tablicama (funkcija $\phi(x)$ – tabela 1) i čija je gustina raspodele definisana izrazom:

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \rightarrow \phi(x).$$

Napomena:

Za funkciju $\phi(x)$ važi: $\phi(-x) = \phi(x)$.

Veza između gornja dva izraza je sledeća:

$$f(t) = \frac{f_0(z)}{\sigma}, \text{ gde je } z = \frac{t - T_0}{\sigma}.$$

Konačno intenzitet otkaza, kada je vreme rada elementa do otkaza raspodeljeno po normalnoj raspodeli, može se odrediti iz sledećeg izraza:

$$\lambda(t) = \frac{f_0(z)}{\sigma \cdot R(t)}.$$

Primenjujući gornji izraz, intenzitet otkaza za $t_1=70$ časova rada elementa određuje se na sledeći način:

$$t_1=70 \rightarrow z_1 = \frac{70-100}{31,6} = -0,95$$

$$f_0(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi} \cdot e^{-\frac{z_1^2}{2}} \Rightarrow f_0(-0,95) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi} \cdot e^{-\frac{(-0,95)^2}{2}} = 0,2541$$

Kako je $\varphi(-x) = \varphi(x)$ gornja vrednost se može očitati i iz tabele 1, tj. $\varphi(-0,95) = \varphi(0,95) = 0,2541$.

$$\lambda(t_1) = \frac{f_0(z_1)}{\sigma \cdot R(t_1)} \Rightarrow \lambda(70) = \frac{f_0(-0,95)}{\sigma \cdot R(70)} = \frac{0,2541}{31,6 \cdot 0,8289} = 9,7 \cdot 10^{-3} \text{ otkaza/h.}$$

Na identičan način se određuje intenzitet otkaza za $t_1=130$ časova rada elementa određuje se na sledeći način:

$$t_1=130 \rightarrow z_1 = \frac{130-100}{31,6} = 0,95$$

$$f_0(z_2) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi} \cdot e^{-\frac{z_2^2}{2}} \Rightarrow f_0(0,95) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi} \cdot e^{-\frac{0,95^2}{2}} = 0,2541$$

$$\lambda(t_2) = \frac{f_0(z_2)}{\sigma \cdot R(t_2)} \Rightarrow \lambda(130) = \frac{f_0(0,95)}{\sigma \cdot R(130)} = \frac{0,2541}{31,6 \cdot 0,1711} = 4,7 \cdot 10^{-2} \text{ otkaza/h.}$$

Pouzdanost u vremenskom intervalu između sedamdesetog i stotridesetog časa rada $R(70,130)$ određuje se na sledeći način:

$$R(70,130) = \frac{R(130)}{R(70)} = \frac{0,1711}{0,8289} = 0,2064.$$

Zadatak 08:

Element ima normalnu raspodelu vremena rada do otkaza sa parametrima $T_0 = 250$ h i $\sigma = 20$ h. Odrediti pouzdanost i intenzitet otkaza za $t = 200$ časova rada.

Rešenje:

Pouzdanost elemenata čije je vreme rada do otkaza raspodeljeno po normalnoj raspodeli određuje iz izraza:

$$R(t) = 0,5 - \phi\left(\frac{t - T_0}{\sigma}\right).$$

Za $t = 200$ časova rada elementa pouzdanost iznosi:

$$R(200) = 0,5 - \phi\left(\frac{200 - 250}{20}\right) = 0,5 - \phi(-2,5),$$

$$R(200) = 0,5 - (-0,4938) = 0,9938,$$

jer je $\phi(-2,5) = -\phi(2,5) = -0,4938$ (tabela 2).

Intenzitet otkaza elemenata čije je vreme rada do otkaza raspodeljeno po normalnoj raspodeli određuje iz izraza:

$$\lambda(t) = \frac{f_0(z)}{\sigma \cdot R(t)}.$$

Za $t = 200$ časova rada elementa intenzitet otkaza se izračunava na sledeći način:

$$t = 200 \rightarrow z = \frac{200 - 250}{20} = -2,5$$

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \Rightarrow f_0(-2,5) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(-2,5)^2}{2}} = 0,0175$$

Kako je $\phi(-x) = \phi(x)$ gornja vrednost se može očitati i iz tabele 1, tj. $\phi(-2,5) = \phi(2,5) = 0,0175$.

$$\lambda(t) = \frac{f_0(z)}{\sigma \cdot R(t)} \Rightarrow \lambda(200) = \frac{f_0(-2,5)}{\sigma \cdot R(200)} = \frac{0,0175}{20 \cdot 0,9938} = 8,8 \cdot 10^{-4} \text{ otkaza/h.}$$

Zadatak 09:

Vreme rada do otkaza nekog elementa može se opisati zakonom Vejbulove raspodele sa parametrima $\gamma = 100$, $\eta = 3500$ i $\beta = 4$. Odrediti pouzdanost i intenzitet otkaza elementa za $t = 3000$ časova rada kao i srednje vreme bezotkaznog rada.

Rešenje:

Pouzdanost elementa čije se vreme rada do otkaza može opisati zakonom Vejbulove raspodele izračunava se preko sledećeg izraza:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}.$$

Pouzdanost elementa za $t = 3000$ časova rada i odgovarajuće vrednosti parametara Vejbulove raspodele iznosi:

$$R(3000) = e^{-\left(\frac{3000-100}{3500}\right)^4} = 0,6242.$$

Intenzitet otkaza elementa čije se vreme rada do otkaza može opisati zakonom Vejbulove raspodele izračunava se preko sledećeg izraza:

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1},$$

što za $t = 3000$ časova rada i odgovarajuće vrednosti parametara Vejbulove raspodele iznosi:

$$\lambda(3000) = \frac{4}{3500} \cdot \left(\frac{3000-100}{3500}\right)^{4-1} = 0,00065 \text{ otkaza/čas.}$$

Srednje vreme bezotkaznog rada elementa čije se vreme rada do otkaza može opisati zakonom Vejbulove raspodele izračunava se preko sledećeg izraza:

$$T_0 = \gamma + \eta \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right),$$

gde $\Gamma(p)$ predstavlja vrednost Gama funkcije argumenta p . (tabela 3)

Srednje vreme bezotkatnog rada elementa za $t = 3000$ časova rada i odgovarajuće vrednosti parametara Vejbulove raspodele iznosi:

$$T_0 = 100 + 3500 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4} + 1\right) = 100 + 3500 \cdot \Gamma(1,25) = 100 + 2500 \cdot 0,9064$$

$$T_0 = 3272,4 \text{ časova.}$$

$$\Gamma(1,25) = 0,9064 \rightarrow \text{tabela 3.}$$

Zadatak 10:

Vek trajanja nekog elementa može se opisati zakonom Weibulove raspodele sa parametrima $\gamma = 0$, $\eta = 3000$ i $\beta = 1,2$. Ako u radu na nekom sistemu ima $N=100$ takvih elemenata, odrediti koliko će ih biti ispravno posle $t_1=50$, $t_2=2000$ i $t_3=10000$ časova rada. Takođe odrediti odgovarajuće intenzitete otkaza kao i pouzdanost između 50-tog i 2000-tog časa rada.

Rešenje:

Pouzdanost $R(t)$ i intenzitet otkaza $\lambda(t)$ elementa čiji se vek trajanja može opisati zakonom Weibulove raspodele sa parametrima $\gamma = 0$, $\eta = 3000$ i $\beta = 1,2$ izračunavaju se preko sledećih izraza:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} = e^{-\left(\frac{t-0}{3000}\right)^{1,2}} = e^{-\left(\frac{t}{3000}\right)^{1,2}}$$

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} = \frac{1,2}{3000} \cdot \left(\frac{t-0}{3000}\right)^{1,2-1} = \frac{1,2}{3000^{1,2}} \cdot t^{0,2} = 0,0000807 \cdot t^{0,2}$$

Za $t_1=50$ časova rada	$\rightarrow R(50) = 0,9927;$	$\lambda(50) = 0,000176$
Za $t_2=2000$ časova rada	$\rightarrow R(2000) = 0,5408;$	$\lambda(2000) = 0,000369$
Za $t_3=10000$ časova rada	$\rightarrow R(10000) = 0,0144;$	$\lambda(10000) = 0,000509$

Posle $t_1=50$ časova rada biće ispravno $N \cdot R(50)$ elemenata, odnosno:

$$N \cdot R(50) = 100 \cdot 0,9927 = 99,27 \text{ elemenata.}$$

Posle $t_2=2000$ časova rada biće ispravno $N \cdot R(2000)$ elemenata, odnosno:

$$N \cdot R(2000) = 100 \cdot 0,5408 = 54,08 \text{ elemenata.}$$

Posle $t_3=10000$ časova rada biće ispravno $N \cdot R(10000)$ elemenata, odnosno:

$$N \cdot R(10000) = 100 \cdot 0,0144 = 1,44 \text{ elemenata.}$$

Pouzdanost elementa između 50-tog i 2000-tog časa rada $R(50,2000)$ određuje se na sledeći način:

$$R(50,2000) = \frac{R(2000)}{R(50)} = \frac{0,5408}{0,9927} = 0,5448.$$

Zadatak 11:

Vreme rada do otkaza elementa može se opisati normalnom raspodelom. Deset elemenata je radilo pod istim uslovima i njihova vremena rada do otkaza su: 15600, 15900, 17500, 18200, 19600, 20100, 20300, 21000, 22100, 23700 časova rada. Odrediti pouzdanost i intenzitet otkaza elemenata za $t = 20000$ časova rada elemenata.

Rešenje:

Prvo, na osnovu uzorka, potrebno je odrediti parametre normalne raspodele tj. T_0 , $D(T)$ odnosno σ .

$$T_0 = \frac{1}{10} \cdot (15600 + 15900 + 17500 + 18200 + 19600 + 20100 + 20300 + 21000 + 22100 + 23700)$$

$$T_0 = 19400 \text{ časova.}$$

$$D(T) = \frac{1}{10-1} \cdot [(15600-19400)^2 + (15900-19400)^2 + (17500-19400)^2 + (18200-19400)^2 + (19600-19400)^2 + (20100-19400)^2 + (20300-19400)^2 + (21000-19400)^2 + (22100-19400)^2 + (23700-19400)^2]$$

$$D(T) = 6824444 \text{ časova}^2.$$

$$\sigma = \sqrt{6824444} = 2612,36 \text{ časova.}$$

Pouzdanost elemenata čije je vreme rada do otkaza raspodeljeno po normalnoj raspodeli određuje iz izraza:

$$R(t) = 0,5 - \phi\left(\frac{t - T_0}{\sigma}\right).$$

Za $t = 20000$ časova rada elementa pouzdanost iznosi:

$$R(20000) = 0,5 - \phi\left(\frac{20000 - 19400}{2612,36}\right) = 0,5 - \phi(0,23),$$

$$R(20000) = 0,5 - 0,0910 = 0,4090,$$

jer je $\phi(0,23) = 0,0910$ (tabela 2).

Intenzitet otkaza elemenata čije je vreme rada do otkaza raspodeljeno po normalnoj raspodeli određuje iz izraza:

$$\lambda(t) = \frac{f_0(z)}{\sigma \cdot R(t)}.$$

Za $t=20000$ časova rada elementa intenzitet otkaza se izračunava na sledeći način:

$$t=20000 \rightarrow z = \frac{20000 - 19400}{2612,36} = 0,23$$

$$f_0(0,23) = \varphi(0,23) = 0,3885 \text{ (tabela 1)}$$

$$\lambda(20000) = \frac{f_0(0,23)}{\sigma \cdot R(20000)} = \frac{0,3885}{2612,36 \cdot 0,4090} = 3,636 \cdot 10^{-4} \text{ otkaza/čas.}$$