

DODATAK:

Slučajni događaji, verovatnoća slučajnog događaja

Slučajni događaji

Pojam verovatnoće se, po pravilu, vezuje sa realizacijama eksperimenta (ogleda). Realizacije eksperimenata nazivaju se **događajima**.

Na primer, vrši se eksperiment – *bacanje novčića* i posmatra se šta je sa gornje strane. Postoje dve moguće realizacije i to:

- prvi događaj, na gornjoj strani je “grb”,
- drugi događaj, na gornjoj strani je “pismo”.

Pojavljivanje “grba” ili “pisma” zavisi od slučaja do slučaja i zato se ti događaji nazivaju **slučajni događaji**.

Uobičajeno je da se slučajni događaji obeležavaju slovima A, B, C Npr. slučajni događaj *G* pojavljivanje “grba” odnosno slučajni događaj *P* pojavljivanje “pisma”. Dva događaja se izdvajaju od ostalih i to: **siguran događaj** i **nemoguć događaj**.

Slučajan događaj se naziva *sigurnim*, označava se sa slovom *E*, ako se on odigrava u svakom eksperimentu. Npr. događaj “pojavio se grb ili pismo” je siguran događaj u eksperimentu bacanje novčića.

Slučajan događaj se naziva *nemogućim* i označava se sa slovom *V*, ako on ne može da se odigra ni u jednom eksperimentu. Npr. događaj “nije se pojavio ni grb ni pismo” je nemoguć događaj u eksperimentu bacanje novčića.

Odnosi među slučajnim događajima

Neki od mogućih odnosa između slučajnih događaja biće definisani preko eksperimenta *bacanje kockice*.

Realizacije eksperimenta *bacanje kockice* su sledeći slučajni događaji:

- A1 – na gornjoj strani kocke je jedna tačka,
- A2 – na gornjoj strani kocke su dve tačke,
- A3 – na gornjoj strani kocke su tri tačke,
- A4 – na gornjoj strani kocke su četiri tačke,
- A5 – na gornjoj strani kocke su pet tačaka,
- A6 – na gornjoj strani kocke su šest tačaka.

Takođe moguće je definisati i sledeće događaje:

B1 – na gornjoj strani kocke je paran broj tačaka,

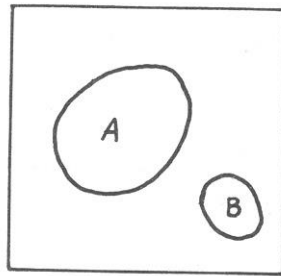
B2 – na gornjoj strani kocke je neparan broj tačaka,

B3 – na gornjoj strani kocke pojavio se broj tačaka manji ili jednak od tri,

B4 – na gornjoj strani kocke pojavio se broj tačaka veći od tri, itd.

Događaj B1 - na gornjoj strani kocke je paran broj tačaka, može se realizovati na više načina tj. na gornjoj strani kocke mogu se pojaviti ili dve tačke, ili četiri, ili šest tačaka. Sa druge strane Događaj A5 - na gornjoj strani kocke su pet tačaka, može da se realizuje na samo jedan način. Razlika između događaja B1 i događaja A5 je ista kao i razlika između skupova (2,4,6) i (5).

Događaji B1 i A5 imaju i sledeću zajedničku osobinu: ne mogu se realizovati istovremeno, tj. ako se na gornjoj strani kocke pojavio paran broj tačaka, sigurno se nije pojavilo pet tačaka, odnosno ako se pojavilo pet tačaka sigurno se nije pojavio paran broj tačaka. Ovakvi događaji koji se među sobom isključuju nazivaju se **nesaglasnim** (disjunktnim) događajima. Nesaglasnost događaja B1 i A5 znači isto što i disjunktnost skupova (2,4,6) i (5) koji nemaju zajedničke elemente, kao što je prikazano na slici D1.



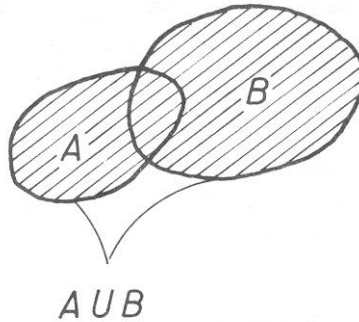
Slika D1. Nesaglasni (disjunktni) događaji.

Događaji B2 i A5 se među sobom ne isključuju, oba događaja će se realizovati ako se na gornjoj strani kocke pojave pet tačaka. Događaji B2 i A5 su **saglasni**.

Skup realizacija posmatranog eksperimenta, tj. skup događaja takvih da se jedan od njih u eksperimentu obavezno odigrava, a među sobom su nesaglasni, naziva se kompletnim skupom događaja. Svaki događaj iz tog skupa naziva se elementarnim događajem. Kompletan skupa događaja za eksperiment *bacanje kockice* je (A1, A2, A3, A4, A5, A6) odnosno (1,2,3,4,5,6).

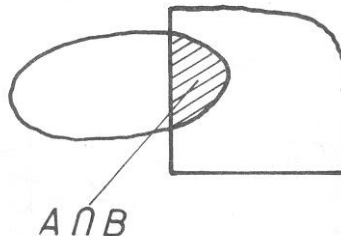
Broj povoljnih realizacija nekog događaja predstavlja ukupan broj realizacija nekog eksperimenta koje dovode do realizacije posmatranog događaja. Npr. broj povoljnih realizacija događaja B1 – na gornjoj strani kocke je paran broj tačaka je **tri**, tj. ako se na gornjoj strani kocke pojave dve, četiri ili šest tačaka, dok je broj povoljnih realizacija događaja A3 – na gornjoj strani kocke su tri tačke, **jedan**.

Događaj koji se sastoji u tome da se realizuje najmanje jedan od dva događaja, naziva se *zbirom* tih događaja. Zbir događaja B4 (na gornjoj strani kocke pojavio se broj tačaka veći od tri) i događaja B1 (na gornjoj strani kocke je paran broj tačaka) jeste događaj koji se sastoji od pojave dve, četiri, pet i šest tačaka na gornjoj strani kocke. Zbiru ovih događaja odgovara skup (2,4,5,6) koji predstavlja zbir (uniju) skupova: (4,5,6) i (2,4,6), kao što je prikazano na slici D2.



Slika D2. Zbir događaja – unija skupova.

Događaj koji se sastoji u istovremenoj realizaciji dva događaja naziva se *proizvodom* tih događaja. Proizvod događaja B4 (na gornjoj strani kocke pojavio se broj tačaka veći od tri) i događaja B1 (na gornjoj strani kocke je paran broj tačaka) jeste događaj koji se sastoji od pojave četiri i šest tačaka na gornjoj strani kocke. Proizvodu ovih događaja odgovara skup (4,6) koji predstavlja proizvod (presek) skupova: (4,5,6) i (2,4,6), kao što je prikazano na slici D3.



Slika D3. Proizvod događaja – presek skupova.

Verovatnoća događaja

Verovatnoća nekog događaja je broj (u intervalu od 0 do 1) koji karakteriše stepen mogućnosti odigravanja posmatranog događaja.

Definicija: Verovatnoća posmatranog događaja A predstavlja odnos broja povoljnih realizacija (m) za događaj A prema ukupnom broju jednako mogućih, nesaglasnih (ne mogu se realizovati istovremeno) realizacija eksperimenta (n) koje obrazuju kompletan skup događaja, tj.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Drugi važan pojam teorije verovatnoće predstavlja je relativna učestalost. Pretpostavka je da se eksperiment vršio n puta a da se događaj A odigrao M puta.

Definicija: Relativna učestalost događaja A je odnos broja eksperimenata u kojima se događaj A odigrao prema ukupnom broju izvršenih eksperimenata. Tako da se relativna učestalost definiše formulom:

$$f_r(A) = \frac{M}{n}.$$

Poređenjem definicije relativne učestalosti i definicije verovatnoće, zaključuje se da se u definiciji verovatnoće ne zahteva da se eksperimenti vrše, dok se to pretpostavlja u definiciji relativne učestalosti. Zato se i kaže da se verovatnoća sračunava pre eksperimenta a relativna učestalost posle izvršenih eksperimenata.

U različitom broju eksperimenata relativna učestalost nekog događaja se menja oscilujući oko nekog konstantnog broja, kome asimptotski teži kad broj eksperimenata teži beskonačnosti tj. $n \rightarrow \infty$. Taj broj se uzima kao verovatnoća događaja.

Verovatnoća zbira nesaglasnih događaja

Događaji A i B su dva nesaglasna događaja (ne mogu se realizovati istovremeno), pri čemu su verovatnoće njihovog odigravanja $P(A)$ i $P(B)$. Verovatnoća realizacije bilo događaja A ili događaja B tj. događaja $A+B$ ($A \cup B$) definiše se kao:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Dokaz. Neka je n broj svih mogućih realizacija eksperimenta, m_1 – broj realizacija povoljnih za događaj A , m_2 – broj realizacija povoljnih za događaj B . Tada je:

$$P(A) = \frac{m_1}{n}; \quad P(B) = \frac{m_2}{n}.$$

Broj povoljnih realizacija bilo za događaj A , bilo za događaj B tj. događaj $A+B$ je $m_1 + m_2$ što na kraju daje:

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B).$$

Verovatnoća proizvoda nezavisnih događaja

Verovatnoće odigravanja dva nezavisna događaja A i B su $P(A)$ i $P(B)$. Verovatnoća realizacije preseka (proizvoda) događaja A i događaja B tj. događaja $A \cap B$ definiše se kao:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Dve kutije sadrže n_1 odnosno n_2 loptica. Broj belih loptica u prvoj kutiji je m_1 a u drugoj kutiji je m_2 . Eksperiment se sastoji u tome da se iz svake kutije izvuče po jedna loptica. Događaj A: iz prve kutije je izvučena bela loptica. Događaj B: iz druge kutije je izvučena bela loptica. Događaji A i B su nezavisni u tom smislu što boja loptice izvučene iz jedne kutije ne može da utiče na boju loptice koja se izvlači iz druge kutije. Verovatnoće događaja A odnosno događaja B definisane kao:

$$P(A) = \frac{m_1}{n_1}; \quad P(B) = \frac{m_2}{n_2}$$

Da bi se odredila verovatnoća događaja $A \cdot B$ odnosno $P(A \cdot B)$ potrebno je prvo odrediti broj mogućih realizacija eksperimenta kao i broj povoljnih realizacija za događaj $A \cdot B$.

Svaka od n_1 realizacija izvlačenja loptice iz prve kutije može da se kombinuje sa svakom od n_2 realizacija izvlačenja loptice iz druge kutije, što daje $n_1 \cdot n_2$ mogućih realizacija. Na isti način se zaključuje da je broj povoljnih realizacija (bela loptica iz obe kutije) $m_1 \cdot m_2$.

Prema definiciji verovatnoće događaja:

$$P(A \cdot B) = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = P(A) \cdot P(B),$$

što znači da je verovatnoća proizvoda dva nezavisna događaja jednaka proizvodu njihovih verovatnoća.

Uslovna verovatnoća

U velikom broju slučajeva potrebno je izračunati verovatnoću događaja A pod uslovom da se realizovao događaj B. Takva verovatnoća se naziva *uslovnom*. Verovatnoća događaja A, pod uslovom da se realizovao događaj B, označava se $P(A/B)$.

U kutiji se nalazi n loptica. Broj belih loptica u kutiji je m_1 dok su preostale crne. Eksperiment se sastoji u tome da se iz kutije izvlače dve loptice jedna za drugom bez vraćanja. Odrediti verovatnoću da obe izvučene loptice budu bele. Događaj A: prva izvučena loptica je bela. Događaj B: druga izvučena loptica je isto bela. Verovatnoća događaja A je:

$$P(A) = \frac{m_1}{n},$$

dok verovatnoća događaja B zavisi od toga koje je boje prva izvučena loptica. Ako je prva izvučena loptica bela tada je uslovna verovatnoća događaja B jednaka:

$$P(B/A) = \frac{m_1 - 1}{n - 1},$$

a ako je prva izvučena loptica crna (događaj \bar{A}) onda je uslovna verovatnoća događaja B jednaka:

$$P(B/\bar{A}) = \frac{m_1}{n - 1}.$$

U slučaju da se posle izvlačenja loptica vraća u kutiju, verovatnoća događaja B ne zavisi od realizacije događaja A i jednaka je:

$$P(B) = P(A) = \frac{m_1}{n},$$

i očigledno je da je:

$$P(B/A) \neq P(B).$$

Na osnovu gore iznetog, uslovna verovatnoća se definiše na sledeći način:

Ako je $P(A) > 0$, onda je uslovna verovatnoća događaja B, pod uslovom da se realizovao događaj A, jednaka:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)},$$

odakle sledi da je verovatnoća saglasnog pojavljivanja dva zavisna događaja (događaji su saglasni ako se mogu realizovati istovremeno tj. u istom eksperimentu), jednaka proizvodu verovatnoća jednog od njih i uslovne verovatnoće drugog, sračunate pod pretpostavkom da se prvi događaj odigrao, tj.:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A).$$

U slučaju da su događaji A i B nezavisni, tada je $P(B/A) = P(B)$ pa gornja formula postaje:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

tj. formula za izračunavanje verovatnoće proizvoda dva nezavisna događaja.

Slučajne promenljive

Slučajnom promenljivom naziva se funkcija definisana na skupu realizacija datog eksperimenta. Slučajna promenljiva u svakom eksperimentu uzima jednu i samo jednu vrednost, unapred nepoznatu, koja zavisi od okolnosti koje se ne mogu unapred uzeti u obzir.

Slučajne promenljive se dele u dve grupe: **diskretne** i **kontinualne**.

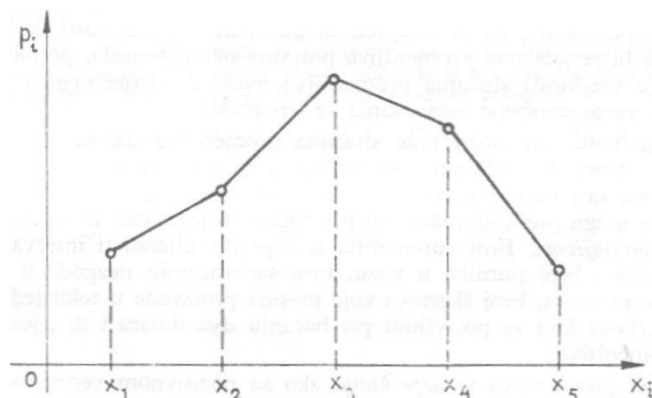
Zakon raspodele verovatnoća i funkcija raspodele (kumulativni zakon) diskretne slučajne promenljive

Zakon raspodele verovatnoća diskretne slučajne promenljive X je pravilo po kome se svakoj vrednosti slučajne promenljive x_i pridružuje odgovarajuća verovatnoća p_i tj. $P(X=x_i)=p_i$. Zakonom raspodele verovatnoća, ukupna verovatnoća jednaka jedinici, raspodeljuje se na pojedine vrednosti slučajne promenljive, drugim rečima zakon raspodele daje verovatnoću p_i kao funkciju definisanu na skupu elementarnih slučajnih događaja $X=x_i$. Ta funkcija se ponekad može izraziti i formulom $p_i=f(x_i)$.

Ako diskretna slučajna promenljiva X može uzeti samo konačan broj različitih vrednosti, tada se zakon raspodele može dati u obliku tablice.

X	x_1	x_2	x_i	x_n
p	p_1	p_2		p_i		p_n

Grafička ilustracija zakona raspodele verovatnoća diskretne slučajne promenljive je *poligon* raspodele verovatnoća. Poligon raspodele verovatnoća se dobija spajanjem tačaka (x_i, p_i) u koordinatnom sistemu, gde se na apscisu nanose vrednosti x_i slučajne promenljive X , a na ordinatu odgovarajuće verovatnoće p_i , kao što je prikazano na slici D4.



Slika D4. Poligon raspodele verovatnoća.

Funkcija raspodele verovatnoća ili kumulativni zakon raspodele verovatnoća definiše verovatnoće događaja $X \leq x$, a ne $X=x$. Verovatnoća događaja $X \leq x$ zavisi od x , tj. ona je funkcija od x i obeležava se sa $F(x)$:

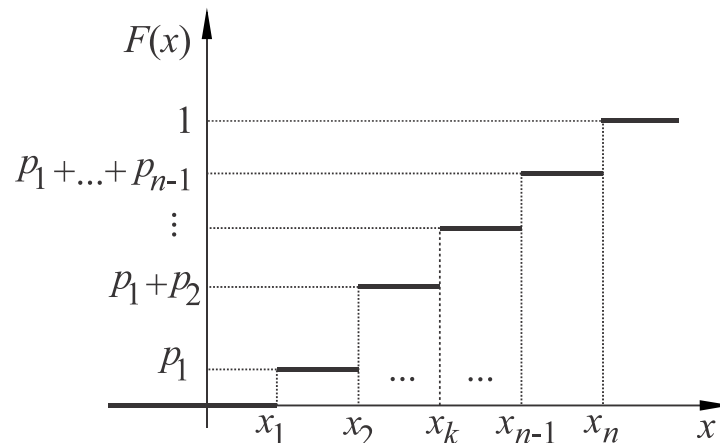
$$F(x) = P(X \leq x)$$

odnosno za diskretnu slučajnu promenljivu X , koja može da uzme vrednosti x_1, x_2, \dots, x_n funkcija raspodele je jednaka:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i, \text{ odnosno}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \leq x_1 \\ p_1 & \text{za } x_1 < x \leq x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{za } x_2 < x \leq x_3 \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} & \text{za } x_{n-1} < x \leq x_n \\ 1 & x > x_n \end{cases}$$

kao što je prikazano na slici D5.



Slika D5. Kumulativni zakon raspodele verovatnoća diskretne slučajne promenljive.

Numeričke karakteristike diskretnih slučajnih promenljivih

Matematičko očekivanje

Matematičko očekivanje diskretne slučajne promenljive naziva se zbir proizvoda svih mogućih njenih vrednosti i odgovarajućih verovatnoća. Ako slučajna promenljiva može da uzme vrednosti x_1, x_2, \dots, x_n sa verovatnoćama p_1, p_2, \dots, p_n tada je matematičko očekivanje:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i.$$

Disperzija

Disperzija diskretne slučajne promenljive predstavlja matematičko očekivanje kvadrata odstupanja slučajne veličine od njenog matematičkog očekivanja, tj.:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2,$$

što se posle elementarnih transformacija može napisati kao:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Srednje kvadratno odstupanje

Srednje kvadratno odstupanje $\sigma(X)$ se definiše kao kvadratni koren iz disperzije, tj.

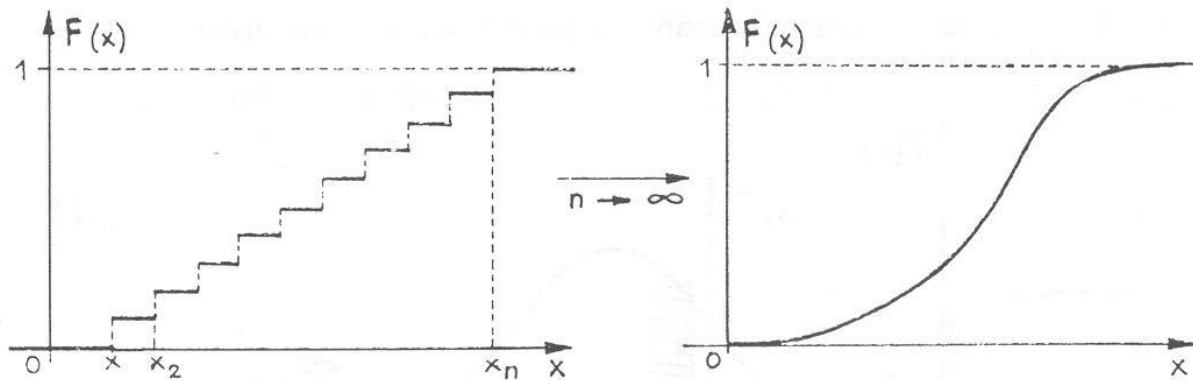
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Gustina raspodele verovatnoća i funkcija raspodele neprekidne slučajne promenljive

Za razliku od diskretne slučajne promenljive, koja se zadaje preko realizacija koje ona može da uzme i verovatnoća pojedinih realizacija, kod neprekidne slučajne promenljive takav način definisanja se ne može primeniti. Ako slučajna promenljiva X može uzeti bilo koju vrednost iz intervala (a, b) , jasno je da je skup realizacija slučajne promenljive X beskonačan.

Slučajna promenljiva je neprekidna ako je njena funkcija raspodele neprekidna i delimično diferencijabilna sa neprekidnim prvim izvodom.

Funkcija raspodele neprekidne slučajne promenljive proizilazi iz funkcije raspodele verovatnoća diskretne slučajne promenljive kada broj realizacija diskretne slučajne promenljive teži beskonačnosti tj. $n \rightarrow \infty$. Tada, pri uvećanju broja mogućih realizacija slučajne promenljive, broj skokova je veći a sami skokovi manji. Stepenasta forma funkcije $F(x)$ postepeno se približava neprekidnoj krivoj (slika D6).



Slika D6. Funkcija raspodele neprekidne slučajne promenljive.

Pored funkcije raspodele, koja predstavlja opšti način zadavanja kako diskretne tako i neprekidne slučajne promenljive, neprekidne slučajne promenljive mogu se zadati i preko gustine raspodele verovatnoća.

Ako je funkcija raspodele $F(x)$ neprekidne slučajne promenljive X diferencijabilna, tada funkcija:

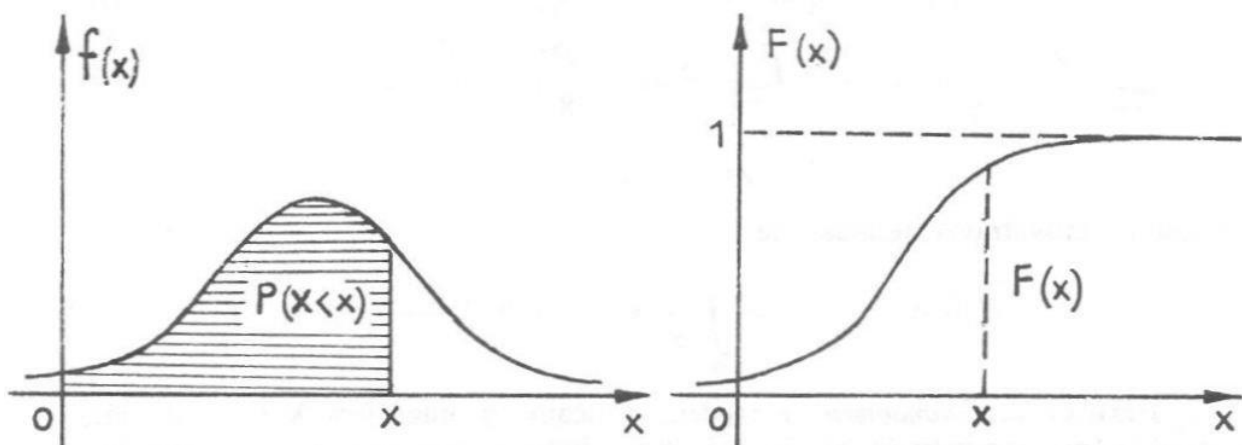
$$f(x) = F'(x)$$

predstavlja gustinu raspodele verovatnoća, odnosno:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) \cdot dx$$

ako je neprekidna slučajna promenljiva definisana na intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Geometrijski, vrednost funkcije raspodele $F(x)$ predstavlja površinu ispod krive gustine raspodele, levo od tačke x (slika D7).



Slika D7. Odnos gustine raspodele i funkcije raspodele neprekidne slučajne promenljive.

Numeričke karakteristike neprekidnih slučajnih promenljivih

Matematičko očekivanje

Matematičko očekivanje neprekidne slučajne promenljive definiše se kao:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx.$$

Disperzija

Disperzija neprekidne slučajne promenljive definiše se kao:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - (M(X))^2.$$

Srednje kvadratno odstupanje

Srednje kvadratno odstupanje $\sigma(X)$ se definiše kao kvadratni koren iz disperzije, tj.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$