

### Zadatak 01:

Proizvođač se obavezao da isporuči  $A=24000$  jedinica nekog rezervnog dela u toku godine ( $T=12$  meseci). Proizvođač mora dnevnu proizvodnju da skladišti jer naručilac ne poseduje skladišni prostor. U slučaju da dođe do neuredne isporuke dolazi do otkaza cele porudžbine. Mesečni troškovi skladištenja po jedinici rezervnog dela su  $C_1 = 0,1 \cdot 10^3$  NJ, dok su troškovi jedne isporuke  $C = 350 \cdot 10^3$  NJ. Odrediti: optimalni broj rezervnih delova pri svakoj isporuci  $x^*$ , optimalnu dužinu intervala između dve isporuke  $t^*$ , optimalni broj isporuka  $n^*$  kao i optimalne ukupne troškove  $F(x^*)$  čuvanja zaliha za vremenski period  $T$ .

### Rešenje:

Kako je potražnja za rezervnim delovima unapred poznata (konstantna) i pošto se celokupna količina rezervnih delova naručuje se odjednom u toku posmatranog vremenskog perioda a nedostatak rezervnih delova nije dopustiv, za određivanje optimalnih ukupnih troškova čuvanja zaliha koristi se *model upravljanja zalihama sa konstantnom potražnjom artikala, kada je potražnja jednaka zalihama*.

Optimalna veličina isporuke  $x^*$  određuje se na osnovu izraza:

$$x = x^* = \sqrt{2 \cdot \frac{A \cdot C}{T \cdot C_1}} = \sqrt{2 \cdot \frac{24000 \cdot 350 \cdot 10^3}{12 \cdot 0,1 \cdot 10^3}} \cong 3742 \text{ rezervna dela.}$$

Optimalan broj isporuka je jednak:

$$n = n^* = \frac{A}{x^*} = \sqrt{\frac{A \cdot T \cdot C_1}{2 \cdot C}} \rightarrow \frac{24000}{3742} = 6,414 \text{ isporuke.}$$

Optimalni vremenski interval između isporuka je:

$$t = t^* = \frac{T}{A} \cdot x^* = \sqrt{2 \cdot \frac{T \cdot C}{A \cdot C_1}}$$
$$t^* = \frac{12}{24000} \cdot 3742 = 1,871 \text{ meseci ili } 8,02 \text{ nedelje.}$$

Optimalni ukupni troškovi čuvanja zaliha za vremenski period  $T$  iznose:

$$F(x) = F(x^*) = \frac{C_1 \cdot T}{2} \cdot x^* + \frac{C \cdot A}{x^*} = \sqrt{2 \cdot A \cdot T \cdot C_1 \cdot C},$$
$$F(x^*) = \sqrt{2 \cdot 24000 \cdot 12 \cdot 0,1 \cdot 10^3 \cdot 350 \cdot 10^3} = 4490 \cdot 10^3 \text{ NJ.}$$

### **Zadatak 01a:**

Za optimalnu veličinu isporuke, iz prethodnog zadatka, od  $x^* = 3742$  rezervna dela, odrediti veličini signalne zalihe  $Q_s$  ako  $Z=1000$  istih mašina koristi dati rezervni deo. Srednje vreme bezotkaznog rada rezervnog dela je raspodeljeno po eksponencijalnoj raspodeli sa intenzitetom otkaza  $\lambda = 0,067$  otkaza/dan, dok je vreme potrebno za nabavku jedne isporuke  $t_i = 15$  dana.

#### Rešenje:

Srednji broj zamena datog elementa na jednoj mašini definisan je funkcijom obnavljanja tj.  $H(t)$ . U ovom slučaju potrebno je odrediti vrednost funkcije obnavljanja za vremenski interval koji je potreban za nabavku jedne isporuke tj. za  $t_i = 15$  dana.

Pošto je srednje vreme rada do otkaza, svih rezervnih delova, raspodeljeno po eksponencijalnoj raspodeli, to proces zamene rezervnih delova predstavlja Poasonov proces obnavljanja. Za Poasonov proces obnavljanja i vremenski interval ( $0 \div t_i = 15$ ), funkcija obnavljanja ima sledeću vrednost:

$$H(t_i) = \lambda \cdot t_i \rightarrow H(15) = 0,067 \cdot 15 = 1,005 \text{ otkaza,}$$

što znači da srednji broj zamena datog elementa po jednoj mašini za  $t_i = 15$  dana iznosi 1,005.

U slučaju  $Z=1000$  istih mašina, za  $t_i = 15$  dana, potreban broj rezervnih delova za zamenu će biti:

$$Z \cdot H(t_i) = 1000 \cdot H(15) = 1000 \cdot 1,005 = 1005 \text{ komada,}$$

odakle sledi da veličina signalne zalihe iznosi  $Q_s = 1005$  komada.

## Zadatak 02:

Ugovorene obaveze proizvođača prema kupcu su  $A=600$  rezervnih delova, koji se moraju isporučivati ravnomerno sa skladišta proizvođača u toku godine ( $T=12$  meseci). U slučaju neuredne isporuke dolazi do otkaza cele porudžbine. Mesečni troškovi skladištenja po jedinici rezervnog dela su  $C_I = 0,3 \cdot 10^3$  NJ, dok troškovi jedne isporuke zavise od njene veličine ( $x$ ) i definisani su izrazom:  $C(x) = (8 \cdot x + 20) \cdot 10^3$  NJ. Odrediti: optimalni broj rezervnih delova pri svakoj isporuci  $x^*$ , optimalnu dužinu intervala između dve isporuke  $t^*$ , optimalni broj isporuka  $n^*$  kao i optimalne ukupne troškove  $F(x^*)$  čuvanja zaliha za vremenski period  $T$ .

### Rešenje:

Kako nedostatak rezervnih delova nije dopustiv a cela količina rezervnih delova je unapred ugovorena, za određivanje optimalnih ukupnih troškova čuvanja zaliha koristi se *model upravljanja zalihama sa konstantnom potražnjom artikala, kada je potražnja jednaka zalihama*.

Pošto su troškovi jedne isporuke dati u zavisnosti od njene veličine, optimalni broj rezervnih delova pri svakoj isporuci  $x^*$  se određuje iz izraza za ukupne troškove čuvanja zaliha:

$$F(x) = \frac{C_I \cdot T}{2} \cdot x + \frac{C \cdot A}{x} = \frac{0,3 \cdot 10^3 \cdot 12}{2} \cdot x + \frac{(8 \cdot x + 20) \cdot 10^3 \cdot 600}{x},$$
$$F(x) = (1,8 \cdot x + \frac{12000}{x} + 4800) \cdot 10^3,$$

tj. njegovim diferenciranjem po  $x$  i izjednačavanjem sa nulom:

$$\frac{dF(x)}{dx} = (1,8 - \frac{12000}{x^2}) \cdot 10^3 = 0,$$

odakle sledi da je optimalni broj rezervnih delova pri svakoj isporuci  $x^*$  jednak:

$$x^* = \sqrt{\frac{12000}{1,8}} = 81,65 \rightarrow x^* \cong 82 \text{ komada.}$$

Optimalan broj isporuka je jednak:

$$n^* = \frac{A}{x^*} = \frac{600}{82} = 7,32 \text{ isporuke.}$$

Optimalni vremenski interval između isporuka je:

$$t^* = \frac{T}{A} \cdot x^* = \frac{12}{600} \cdot 82 = 1,64 \text{ meseci.}$$

Optimalni ukupni troškovi čuvanja zaliha za vremenski period  $T$  iznose:

$$F(x^*) = (1,8 \cdot x^* + \frac{12000}{x^*} + 4800) \cdot 10^3,$$

$$F(x^*) = (1,8 \cdot 82 + \frac{12000}{82} + 4800) \cdot 10^3 = 5093,94 \cdot 10^3 \text{ NJ.}$$

### Zadatak 03:

Godišnje potrebe ( $T=12$  meseci) za rezervnim delovima iznose  $A=12000$  komada. Cena nabavke jedne isporuke rezervnih delova u količini od  $x$  komada je  $C(x) = 300 \cdot x + 3000$  NJ, dok mesečna cena skladištenja, po rezervnom delu, iznosi 1% vrednosti uskladištene robe. U slučaju neuredne isporuke dolazi do otkaza cele porudžbine. Odrediti: optimalni broj rezervnih delova pri svakoj isporuci  $x^*$ , optimalnu dužinu intervala između dve isporuke  $t^*$ , optimalni broj isporuka  $n^*$  kao i optimalne ukupne troškove  $F(x^*)$  čuvanja zaliha za vremenski period  $T$ .

### Rešenje:

Pošto nedostatak rezervnih delova nije dopustiv a cela količina rezervnih delova je unapred ugovorena, za određivanje optimalnih ukupnih troškova čuvanja zaliha koristi se *model upravljanja zalihama sa konstantnom potražnjom artikala, kada je potražnja jednaka zalihama*.

Kako cena skladištenja rezervnih delova, po jednom rezervnom delu, iznosi 1% od vrednosti uskladištene robe, to se cena skladištenja određuje kao:

$$C_I(x) = \frac{C(x)}{x} \cdot k = \frac{300 \cdot x + 3000}{x} \cdot k,$$

gde je  $k=0,01$  (1%).

Pošto su troškovi jedne isporuke dati u zavisnosti od njene veličine a troškovi skladištenja rezervnih delova dati u zavisnosti od vrednosti uskladištene robe, optimalni broj rezervnih delova pri svakoj isporuci  $x^*$  se određuje iz izraza za ukupne troškove čuvanja zaliha:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{C_I(x) \cdot T}{2} \cdot x + \frac{C(x) \cdot A}{x} = k \cdot T \cdot \frac{C(x)}{2} + A \cdot \frac{C(x)}{x}, \\ F(x) &= 0,01 \cdot 12 \cdot \frac{300 \cdot x + 3000}{2} + 12000 \cdot \frac{300 \cdot x + 3000}{x}, \\ F(x) &= 18 \cdot x + 180 + 3600000 + \frac{36000000}{x}, \end{aligned}$$

tj. njegovim diferenciranjem po  $x$  i izjednačavanjem sa nulom:

$$\frac{dF(x)}{dx} = 18 - \frac{36000000}{x^2} = 0,$$

odakle sledi da je optimalni broj rezervnih delova pri svakoj isporuci  $x^*$  jednak:

$$x^* = \sqrt{\frac{36000000}{18}} = 1414,21 \rightarrow x^* \cong 1414 \text{ komada.}$$

Optimalan broj isporuka je jednak:

$$n^* = \frac{A}{x^*} = \frac{12000}{1414} = 8,49 \text{ isporuka.}$$

Optimalni vremenski interval između isporuka je:

$$t^* = \frac{T}{A} \cdot x^* = \frac{12}{12000} \cdot 1414 = 1,414 \text{ meseci.}$$

Optimalni ukupni troškovi čuvanja zaliha za vremenski period  $T$  iznose:

$$F(x^*) = 18 \cdot x^* + 180 + 3600000 + \frac{36000000}{x^*},$$

$$F(x^*) = 18 \cdot 1414 + 180 + 3600000 + \frac{36000000}{1414} = 3651091,7 \text{ NJ.}$$

#### Zadatak 04:

Proizvođač treba da isporuči naručiocu  $A=40000$  jedinica nekog rezervnog dela u toku godine ( $T=12$  meseci). Proizvođač mora dnevnu proizvodnju da skladišti jer naručilac ne poseduje skladišni prostor. Mesečni troškovi skladištenja po jedinici rezervnog dela iznose  $C_1 = 15$  NJ, dok su troškovi jedne isporuke  $C = 3500$  NJ. U slučaju neredovne isporuke proizvođač snosi troškove u iznosu od  $C_2 = 250$  NJ po jedinici neisporučenog rezervnog dela za jedan mesec. Odrediti: optimalni broj rezervnih delova pri svakoj isporuci  $x^*$  ( $y^*$ ), optimalnu dužinu intervala između dve isporuke  $t^*$ , optimalni broj isporuka  $n^*$  kao i optimalne ukupne troškove  $F(x^*, y^*)$  čuvanja zaliha za vremenski period  $T$ .

#### Rešenje:

Kako je potražnja za rezervnim delovima unapred poznata (konstantna) i pošto se celokupna količina rezervnih delova naručuje se odjednom u toku posmatranog vremenskog perioda a nedostatak rezervnih delova, koji se kompenzuje hitnom nabavkom, **je dopustiv**, za određivanje optimalnih ukupnih troškova čuvanja zaliha koristi se *model upravljanja zalihama sa konstantnom potražnjom artikala, kada je potražnja veća od zaliha*.

Optimalna veličina isporuke  $x^*$  određuje se na osnovu izraza:

$$x = x^* = \sqrt{2 \cdot \frac{A \cdot C}{T \cdot C_1} \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_2}}$$
$$x^* = \sqrt{2 \cdot \frac{40000 \cdot 3500}{12 \cdot 15} \cdot \frac{15 + 250}{250}} \cong 1284 \text{ rezervna dela,}$$

dok je količina rezervnih delova  $y^*$  na početku svakog vremenskog intervala  $t^*$ :

$$y = y^* = \sqrt{2 \cdot \frac{A \cdot C}{T \cdot C_1} \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2}}$$
$$y^* = \sqrt{2 \cdot \frac{40000 \cdot 3500}{12 \cdot 15} \cdot \frac{250}{15 + 250}} \cong 1176,6 \text{ komada.}$$

Prosečan broj rezervnih delova koji nedostaje između dve isporuke  $\Delta^*$  je:

$$\Delta^* = x^* - y^* = 1284 - 1176,6 = 107,4 \text{ komada.}$$

Optimalan broj isporuka je jednak:

$$n = n^* = \frac{A}{x^*} = \frac{40000}{1284} = 31,15 \text{ isporuke.}$$

Optimalni vremenski interval između isporuka je:

$$t = t^* = \frac{T}{A} \cdot x^* = \frac{12 \cdot 1284}{40000} = 11,56 \text{ dana ili } 0,3852 \text{ meseci,}$$

dok vremenski interval  $t_1^*$  u kome je potražnja za rezervnim delovima zadovoljena iznosi:

$$t_1 = t_1^* = \frac{y^*}{x^*} \cdot t^* = \frac{1176,6}{1284} \cdot 11,56 = 10,5 \text{ dana.}$$

Vremenski interval  $t_2^*$  u kome je potražnja za rezervnim delovima nije zadovoljena iznosi:

$$t_2 = t_2^* = \frac{x^* - y^*}{x^*} \cdot t^* = t^* - t_1^* = 11,56 - 10,5 = 1,06 \text{ dana.}$$

Optimalni ukupni troškovi čuvanja zaliha za vremenski period  $T$  iznose:

$$F(x, y) = F(x^*, y^*) = \sqrt{2 \cdot A \cdot T \cdot C_1 \cdot C} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}},$$

$$F(x^*, y^*) = \sqrt{2 \cdot 40000 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 3500} \cdot \sqrt{\frac{250}{15 + 250}} = 218053,14 \text{ NJ.}$$



### Zadatak 05:

Proizvođač se obavezao da kupcu isporuči dnevno u toku mesec dana ( $T=30$  dana) po  $a=20$  komada nekog rezervnog dela. Za svako kašnjenje u isporuci jednog rezervnog dela plaćaju se penali u iznosu od  $C_2 = 200$  NJ dnevno. Troškovi jedne isporuke iznose  $C = 2500$  NJ, dok troškovi uskladištenja iznose  $C_1 = 50$  NJ dnevno po jednom rezervnom delu. Odrediti: optimalni broj rezervnih delova pri svakoj isporuci  $x^*(y^*)$ , optimalnu dužinu intervala između dve isporuke  $t^*$ , optimalni broj isporuka  $n^*$  kao i optimalne ukupne troškove  $F(x^*, y^*)$  čuvanja zaliha za vremenski period  $T$ .

### Rešenje:

Kako je nedostatak rezervnih delova **dopustiv** a cela količina rezervnih delova je unapred ugovorena, za određivanje optimalnih ukupnih troškova čuvanja zaliha koristi se *model upravljanja zalihama sa konstantnom potražnjom artikala, kada je potražnja veća od zaliha*.

Ukupna ugovorena količina rezervnih delova za mesec dana iznosi:

$$A = a \cdot T = 20 \cdot 30 = 600 \text{ komada.}$$

Optimalna veličina isporuke  $x^*$  određuje se na osnovu izraza:

$$x = x^* = \sqrt{2 \cdot a \cdot \frac{C}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}}$$
$$x^* = \sqrt{2 \cdot 20 \cdot \frac{2500}{50}} \cdot \sqrt{\frac{50 + 200}{200}} = 50 \text{ rezervna dela,}$$

dok je količina rezervnih delova  $y^*$  na početku svakog vremenskog intervala  $t^*$ :

$$y = y^* = \sqrt{2 \cdot a \cdot \frac{C}{C_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}}$$
$$y^* = \sqrt{2 \cdot 20 \cdot \frac{2500}{50}} \cdot \sqrt{\frac{200}{50 + 200}} = 40 \text{ komada.}$$

Prosečan broj rezervnih delova koji nedostaje između dve isporuke  $\Delta^*$  je:

$$\Delta^* = x^* - y^* = 50 - 40 = 10 \text{ komada.}$$

Optimalan broj isporuka je jednak:

$$n = n^* = \frac{a \cdot T}{x^*} = \frac{20 \cdot 30}{50} = 12 \text{ isporuka.}$$

Optimalni vremenski interval između isporuka je:

$$t = t^* = \frac{x^*}{a} = \frac{50}{20} = 2,5 \text{ dana,}$$

dok vremenski interval  $t_1^*$  u kome je potražnja za rezervnim delovima zadovoljena iznosi:

$$t_1 = t_1^* = \frac{y^*}{x^*} \cdot t^* = \frac{40}{50} \cdot 2,5 = 2 \text{ dana.}$$

Vremenski interval  $t_2^*$  u kome je potražnja za rezervnim delovima nije zadovoljena iznosi:

$$t_2 = t_2^* = t^* - t_1^* = 2,5 - 2 = 0,5 \text{ dana.}$$

Optimalni ukupni troškovi čuvanja zaliha za vremenski period  $T$  iznose:

$$F(x, y) = F(x^*, y^*) = \sqrt{2 \cdot a \cdot T^2 \cdot C_1 \cdot C} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}},$$
$$F(x^*, y^*) = \sqrt{2 \cdot 20 \cdot 30^2 \cdot 50 \cdot 2500} \cdot \sqrt{\frac{200}{50 + 200}} = 60000 \text{ NJ.}$$