

### Zadatak 01:

Do skladišta gotovih proizvoda dolazi 10 kamiona dnevno. Vreme istovara kamiona je funkcija broja paleta koje se nalaze u kamionu i vremena trajanja ciklusa viljuškara pri istovaru iz kamiona do prijemne zone ili direktno u skladište. Vreme ciklusa viljuškara pri istovaru paleta sa kamiona direktno u skladište iznosi 2,11 minuta. U kamionu ima prosečno 28 euro paleta. Odrediti potreban broj istovarnih rampi, ako jedan viljuškar istovara kamion na jednoj istovarnoj rampi, kao i parametre tehnološke funkcije – karakteristike rada sistema ako se istovar obavlja u jednoj smeni (efektivno vreme rada  $t_{ef} = 6,5$  h).

### Rešenje:

Prijemna zona skladišta se sastoji od prijemnih rampi na kojima se obavlja istovar paletizovane robe iz kamiona tj. prijem robe u skladište. Rampi može biti jedna ili više što zavisi od intenziteta kojim kamioni dolaze u skladište kao i intenziteta kojim se kamioni istovaraju. Kamioni koji dolaze, ukoliko su sve rampe zauzete, na istovar čekaju u redu - parkingu. Može se smatrati da postoji beskonačan broj mesta u redu, jer svi kamioni koji dođu na istovar moraju biti istovareni. Pretpostavlja se da su vremena između dolazaka kamiona u skladište kao i vremena trajanja istovara kamiona raspodeljena po eksponencijalnoj raspodeli. U skladu sa tim prijemna zona skladišta se može modelirati kao višekanalni sistem opsluživanja sa beskonačnim redom, tj. sistem opsluživanja  $M/M/c/\infty$ .

Na osnovu ulaznih podataka:

- broj kamiona:  $n_k = 10$  kamiona/dan.
- kapacitet kamiona:  $n = 28$  paleta.
- ciklus viljuškara:  $T_c = 2,11$  min/pal.

potrebno je odrediti intenzitet dolazaka kamiona u sistem kao i intenzitet istovara kamiona.

Da bi se odredio srednji intenzitet istovara kamiona  $\mu$  potrebno je prvo odrediti vreme potrebno za istovar kamiona  $T_{ik}$ :

$$T_{ik} = n \cdot T_c + t_{m1} + t_{m2} \text{ min,}$$

gde je:

- $n = 28$  pal. – broj paleta u kamionu.
- $T_c = 2,11$  min – vreme ciklusa viljuškara pri istovaru jedne palete iz kamiona direktno u skladište.
- $t_{m1} = 10$  min – vreme potrebno za manipulaciju kamiona pri postavljanju za istovar.
- $t_{m2} = 5$  min – vreme potrebno za manipulaciju kamiona pri odlasku.

$$T_{ik} = n \cdot T_c + t_{m1} + t_{m2} = 28 \cdot 2,11 + 10 + 5 = 74,1 \text{ min.}$$

Na osnovu vremena potrebnog za istovar kamiona  $T_{ik}$ , srednji intenzitet opsluživanja (istovara) kamiona određuje se kao:

$$\mu = \frac{1}{T_{ik}} = \frac{1}{74,1} = 0,01351/\text{min.}$$

Na osnovu prosečnog vremena između dolazaka kamiona u sistem:

$$\bar{t}_d = \frac{t_{ef}}{n_k} = \frac{390}{10} = 39 \text{ min.}$$

gde je:

$t_{ef} = 390 \text{ min. (6,5 h)}$  – efektivno trajanje radnog vremena u toku smene,

određuje se srednji intenzitet dolaska kamiona u sistem kao:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{t}_d} = \frac{1}{39} = 0,0256 \text{ 1/min.}$$

Koeficijent iskorišćenja kanala za opsluživanje (istovarne rampe) je:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,0256}{0,0135} = 1,9.$$

Da bi sistem mogao da funkcioniše potrebno je da koeficijent iskorišćenja kanala bude manji od 1, što znači da je potrebno usvojiti dva kanala za opsluživanje tj. dve istovarne rampe  $c=2$ .

Prijemna zona za istovar kamiona u skladištu se u ovom slučaju modelira se kao dvokanalni sistem opsluživanja sa beskonačnim redom tj.  $M/M/2/\infty$ .

Ulazne veličine za dalji proračun:

broj kanala za opsluživanje:  $c=2$ .

srednji intenzitet dolaska kamiona u sistem:  $\lambda = 0,0256 \text{ 1/min.}$

srednji intenzitet opsluživanja (istovara) kamiona:  $\mu = 0,0135 \text{ 1/min.}$

koeficijent iskorišćenja kanala za opsluživanje (istovarne rampe):

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} = \frac{0,0256}{2 \cdot 0,0135} = 0,94815$$

Verovatnoća stanja sistema  $p_0$  višekanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom određuje se iz izraza:

$$p_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^c \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot \rho \cdot \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho}} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=0}^c \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho}}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^2 \frac{(2 \cdot 0,94815)^k}{k!} + \frac{(2 \cdot 0,94815)^2}{2!} \cdot \frac{0,94815}{1 - 0,94815}} = 0,026616.$$

Ostale verovatnoće stanja se određuju iz izraza:

$$p_i = \frac{(c \cdot \rho)^i}{i!} \cdot p_0 = \frac{(2 \cdot 0,94815)^i}{i!} \cdot 0,026616; \text{ za } i=1,2$$

$$p_1 = 0,050472; \quad p_2 = p_c = 0,047855.$$

$$p_i = \frac{\rho^{i-c} \cdot (c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot p_0 = \frac{0,95^{i-2} \cdot (2 \cdot 0,94815)^2}{2!} \cdot 0,026616;$$

za  $i=3,4,\dots,\infty$

$$p_3 = 0,045373; \quad p_4 = 0,043021; \quad p_5 = 0,040790; \text{ itd.}$$

Karakteristike rada prijemne zone skladišta, određuju se nalaženjem granične vrednosti kad  $m \rightarrow \infty$  odgovarajućih izraza višekanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom za  $c=2$ , su sledeće:

Verovatnoća opsluživanja:

$$P_{ops} = \lim_{m \rightarrow \infty} 1 - \rho^m \cdot p_c = 1;$$

Srednji broj zauzetih kanala – istovarnih rampi:

$$\begin{aligned} c_z &= \lim_{m \rightarrow \infty} p_0 \cdot \sum_{k=0}^c k \cdot \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + c \cdot \rho \cdot \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \cdot p_c = \\ &= \sum_{k=0}^c k \cdot \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + c \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot p_c = \\ &= \sum_{k=0}^2 k \cdot \frac{(2 \cdot 0,94815)^k}{k!} + 2 \cdot \frac{0,94815}{1 - 0,94815} \cdot 0,047855 = 1,89630; \end{aligned}$$

Srednji koeficijent zauzetosti kanala za opsluživanje – istovarnih rampi:

$$\frac{c_z}{c} = \frac{1,89630}{2} = 0,94815;$$

Verovatnoća postojanja reda:

$$\begin{aligned} P_{pr} &= \lim_{m \rightarrow \infty} p_c \cdot \rho \cdot \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} = p_c \cdot \rho \cdot \frac{1}{1 - \rho} = \\ &= 0,047855 \cdot 0,94815 \cdot \frac{1}{1 - 0,94815} = 0,87506; \end{aligned}$$

Srednji broj jedinica – kamiona u redu:

$$\begin{aligned} N_w &= \lim_{m \rightarrow \infty} \rho \cdot p_c \cdot \frac{1 - \rho^m \cdot [m \cdot (1 - \rho) + 1]}{(1 - \rho)^2} = p_c \cdot \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} = \\ &= 0,047855 \cdot \frac{0,94815}{(1 - 0,94815)^2} = 16,87611 \text{ kamiona.} \end{aligned}$$

Srednji broj jedinica – kamiona u sistemu:

$$N_{ws} = c_z + N_w = 1,89630 + 16,87611 = 18,77241 \text{ kamiona.}$$

Srednje vreme koje jedinica – kamion provede u redu:

$$t_w = \frac{N_w}{\lambda} = \frac{16,87611}{0,0256} = 659,22 \text{ min.}$$

Srednje vreme koje jedinica – kamion provede u sistemu:

$$t_{ws} = \frac{N_{ws}}{\lambda} = \frac{18,77241}{0,0256} = 733,30 \text{ min.}$$

Pošto je vreme zadržavanja jedinice – kamiona u redu odnosno sistemu veoma veliko (što je posledica velikog opterećenja kanala  $\rho=0,95$ ) potrebno je povećati broj kanala – istovarnih

rampi na  $c=3$ . Srednji intenziteti dolaska i istovara kamiona ostaju isti, tako da se sad prijemna zona skladišta modelira kao trokanalni sistem opsluživanja sa beskonačnim redom tj.  $M/M/3/\infty$ .

Nove ulazne veličine za proračun su:

broj kanala za opsluživanje (istovarnih rampi):  $c=3$ .

srednji intenzitet dolaska kamiona u sistem:  $\lambda = 0,0256$  1/min.

srednji intenzitet opsluživanja (istovara) kamiona:  $\mu = 0,0135$  1/min.

koeficijent iskorišćenja kanala za opsluživanje (istovarne rampe):

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} = \frac{0,0256}{3 \cdot 0,0135} = 0,6321.$$

Verovatnoće stanja sistema:

$$p_0 = 0,128479; \quad p_1 = 0,243634; \quad p_2 = 0,231001; \quad p_3 = p_c = 0,146015;$$

$$p_4 = 0,092296; \quad p_5 = 0,058340 \text{ itd.}$$

Karakteristike rada prijemne zone skladišta sa tri prijemne rampe su date u sledećoj tabeli:

Karakter.	$P_{ops}$	$c_z$	$c_z/c$	$P_{pr}$	$N_w$	$t_w (min)$	$N_{ws}$	$t_{ws} (min)$
Vrednost	1	1,89630	0,6321	0,25087	0,68190	26,63672	2,57820	100,71079

Konačno, potreban broj istovarnih rampi u prijemnoj zoni skladišta je 3.

## Zadatak 02:

Iz otpremne zone skladišnog sistema u toku smene se otpremi 23 kamiona nosivosti 10 tona i 19 kamiona nosivosti 2,5 tona. Otprema se paletizovana roba na standardnim euro paletama dimenzija  $1200 \times 800 \times 145$  mm. Prosečno vreme utovara kamiona nosivosti 10 tona iznosi 0,5 sati, dok je vreme potrebno za postavljanje, pozicioniranje i izmenu kamiona 0,33 sata. Prosečno vreme utovara kamiona nosivosti 2,5 tona iznosi 0,23 sata, dok je vreme potrebno za postavljanje, pozicioniranje i izmenu kamiona 0,1 sat. Otprema robe u skladištu se obavlja u jednoj smeni sa efektivnim vremenom rada  $t_{ef}=6,5$  sati. Za dati skladišni sistem odrediti:

- potreban broj utovarnih rampi,
- verovatnoću da u sistemu nema kamiona za utovar, i
- pokazatelje – karakteristike rada (parametre tehnološke funkcije) otpremnog dela skladišnog sistema.

## Rešenje:

Otpremna zona skladišta se sastoji od otpremnih rampi na kojima se vrši utovar paletizovane robe u kamione tj. distribucija robe iz skladišta. Rampi može biti jedna ili više što zavisi od intenziteta kojim kamioni dolaze u skladište tj. intenziteta zahteva za izdavanjem robe kao i vremena potrebnog za utovar i manipulaciju kamionima. Kamioni koji dolaze na utovar, ukoliko su sve rampe zauzete, čekaju u redu - parkingu. Smatra se da postoji beskonačan broj mesta u redu, jer svi kamioni koji dođu na utovar moraju biti i utovareni. Pretpostavlja se da su vremena između dolazaka kamiona u skladište kao i vremena trajanja utovara i manipulacije kamionima raspodeljena po eksponencijalnoj raspodeli. U skladu sa tim otpremna zona skladišta se može modelirati kao višekanalni sistem opsluživanja sa beskonačnim redom, tj. sistem opsluživanja  $M/M/c/\infty$ .

Roba se iz skladišta otprema sa dve vrste kamiona i to sa  $n_{k1}=23$  kamiona/dan (prva vrsta kamiona) i  $n_{k2}=19$  kamiona/dan (druga vrsta kamiona).

Ukupan broj kamiona koji dnevno dolaze na utovar u skladišni sistem je:

$$n_k = n_{k1} + n_{k2} = 23 + 19 = 42 \text{ kamiona/dan.}$$

Srednje vreme između dolazaka kamiona  $\bar{t}_d$  (bilo koje vrste) na utovar iznosi:

$$\bar{t}_d = \frac{t_{ef}}{n_k} = \frac{6,5}{42} = 0,1548 \text{ sati,}$$

odnosno srednji intenzitet dolazaka kamiona na utovar u skladišni sistem je:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{t}_d} = \frac{1}{0,1548} = 6,46 \text{ kamiona/sat.}$$

Vreme potrebno za opsluživanje kamiona sastoji se od vremena potrebnog za manipulaciju kamiona (ulazak i izlazak na/sa rampe) i vremena potrebnog za sam utovar kamiona.

Za prvu vrstu kamiona srednje vreme opsluživanja  $\bar{t}_{ops1}$  iznosi:

$$\bar{t}_{ops1} = t_{m1} + t_{u1} = 0,33 + 0,5 = 0,83 \text{ sata,}$$

gde je:

$t_{m1}=0,33$  sata – vreme potrebno za manipulaciju prvom vrstom kamiona,

$t_{u1}=0,5$  sati – vreme potrebno za utovar prve vrste kamiona.

Za drugu vrstu kamiona srednje vreme opsluživanja  $\bar{t}_{ops_2}$  iznosi:

$$\bar{t}_{ops_2} = t_{m_2} + t_{u_2} = 0,1 + 0,23 = 0,33 \text{ sata},$$

gde je:

$t_{m_2} = 0,1$  sat – vreme potrebno za manipulaciju drugom vrstom kamiona,

$t_{u_2} = 0,23$  sata – vreme potrebno za utovar druge vrste kamiona.

Srednje vreme  $\bar{t}_{ops}$  potrebno za opsluživanje kamiona na utovarnoj rampi određuje se kao:

$$\bar{t}_{ops} = \frac{1}{n_k} \cdot \sum_{i=1}^k t_{ops_i} \cdot n_{k_i} = \frac{1}{42} \cdot (0,83 \cdot 23 + 0,33 \cdot 19) = 0,6038 \text{ sati},$$

gde  $k$  predstavlja broj različitih vrsta kamiona, tj.  $k=2$ .

Srednji intenzitet opsluživanja kamiona na utovarnoj rampi je:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{ops}} = \frac{1}{0,6038} = 1,6562 \text{ kamiona/sat.}$$

Ulazne veličine za dalji proračun:

broj kanala za opsluživanje:  $c=?$ .

srednji intenzitet dolaska kamiona u sistem:  $\lambda = 6,46$  kamiona/sat.

srednji intenzitet opsluživanja (utovara) kamiona:  $\mu = 1,6562$  kamiona/sat.

koeficijent iskorišćenja kanala za opsluživanje (utovarne rampe):

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} = \frac{6,46}{c \cdot 1,6562} = \frac{3,9005}{c}$$

### Odgovori:

a) Koeficijent iskorišćenja kanala za opsluživanje (utovarne rampe) je:

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} = \frac{6,46}{c \cdot 1,6562} = \frac{3,9005}{c}.$$

Da bi sistem mogao da funkcioniše potrebno je da koeficijent iskorišćenja kanala bude manji od 1. Ukoliko bi se usvojilo da je broj kanala (utovarnih rampi) jednak 4, to bi dovelo do veoma velikog koeficijenta iskorišćenja kanala za opsluživanje  $\approx 0,9751$  što nije realno. U ovom slučaju je potrebno usvojiti pet kanala za opsluživanje tj. pet utovarnih rampi  $c=5$ . U tom slučaju koeficijent iskorišćenja kanala za opsluživanje (utovarne rampe) je:

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} = \frac{6,46}{5 \cdot 1,6562} = 0,7801.$$

Konačno otpremna zona za utovar kamiona u skladištu se u ovom slučaju modelira se kao petokanalni sistem opsluživanja sa beskonačnim redom tj.  $M/M/5/\infty$ , tj.:

broj kanala za opsluživanje:  $c=5$ .

koeficijent iskorišćenja kanala za opsluživanje (utovarne rampe):  $\rho = 0,7801$ .

b) Verovatnoća da u sistemu nema kamiona za utovar znači da je sistem prazan tj. da se nalazi u stanju  $X=0$ , koje se karakteriše verovatnoćom  $p_0$ .

Verovatnoća stanja sistema  $p_0$  višekanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom određuje se iz izraza:

$$p_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^c \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot \rho \cdot \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho}} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=0}^c \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho}}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^5 \frac{(5 \cdot 0,7801)^k}{k!} + \frac{(5 \cdot 0,7801)^5}{5!} \cdot \frac{0,7801}{1 - 0,7801}} = 0,0151.$$

Ostale verovatnoće stanja se određuju na iz izraza:

$$p_i = \frac{(c \cdot \rho)^i}{i!} \cdot p_0 = \frac{(5 \cdot 0,7801)^i}{i!} \cdot 0,0151; \text{ za } i=1,2,\dots,5$$

$$p_1 = 0,0589; \quad p_2 = 0,1148; \quad p_3 = 0,1493;$$

$$p_4 = 0,1456; \quad p_5 = p_c = 0,1136.$$

$$p_i = \frac{\rho^{i-c} \cdot (c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot p_0 = \frac{0,7801^{i-5} \cdot (5 \cdot 0,7801)^5}{5!} \cdot 0,0151; \text{ za } i=6,7,\dots,\infty$$

$$p_6 = 0,0886; \quad p_7 = 0,0691; \quad p_8 = 0,0539; \text{ itd.}$$

Verovatnoća da u sistemu nema kamiona za utovar iznosi  $p_0=0,0151$ .

c) Pokazatelji – karakteristike rada (parametri tehnološke funkcije) otpremnog dela skladišnog sistema, određuju se nalaženjem granične vrednosti kad  $m \rightarrow \infty$  odgovarajućih izraza višekanalnog sistema opsluživanja sa neograničenim redom za  $c=5$ , imaju sledeće vrednosti:

Verovatnoća opsluživanja:

$$P_{ops} = \lim_{m \rightarrow \infty} 1 - \rho^m \cdot p_c = 1;$$

Srednji broj zauzetih kanala – otpremnih rampi:

$$c_z = \lim_{m \rightarrow \infty} p_0 \cdot \sum_{k=0}^c k \cdot \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + c \cdot \rho \cdot \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \cdot p_c =$$

$$= \sum_{k=0}^c k \cdot \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + c \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot p_c =$$

$$= \sum_{k=0}^5 k \cdot \frac{(5 \cdot 0,7801)^k}{k!} + 5 \cdot \frac{0,7801}{1 - 0,7801} \cdot 0,1136 = 3,9005;$$

Srednji koeficijent zauzetosti kanala za opsluživanje:

$$\frac{c_z}{c} = \frac{3,9005}{5} = 0,7801 \rightarrow \rho;$$

Verovatnoća postojanja reda:

$$P_{pr} = \lim_{m \rightarrow \infty} p_c \cdot \rho \cdot \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} = p_c \cdot \rho \cdot \frac{1}{1 - \rho} = \\ = 0,1136 \cdot 0,7801 \cdot \frac{1}{1 - 0,7801} = 0,4030;$$

Srednji broj jedinica – kamiona u redu:

$$N_w = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho \cdot p_c \cdot \frac{1 - \rho^m \cdot [m \cdot (1 - \rho) + 1]}{(1 - \rho)^2} = p_c \cdot \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} = \\ = 0,1136 \cdot \frac{0,7801}{(1 - 0,7801)^2} = 1,8326 \text{ kamiona.}$$

Srednji broj jedinica – kamiona u sistemu:

$$N_{ws} = c_z + N_w = 3,9005 + 1,8326 = 5,7331 \text{ kamiona.}$$

Srednje vreme koje jedinica – kamion provede u redu:

$$t_w = \frac{N_w}{\lambda} = \frac{1,8326}{6,46} = 0,2837 \text{ sati ili } 17,02 \text{ min.}$$

Srednje vreme koje jedinica – kamion provede u sistemu:

$$t_{ws} = \frac{N_{ws}}{\lambda} = \frac{5,7331}{6,46} = 0,8875 \text{ sati ili } 53,25 \text{ min.}$$

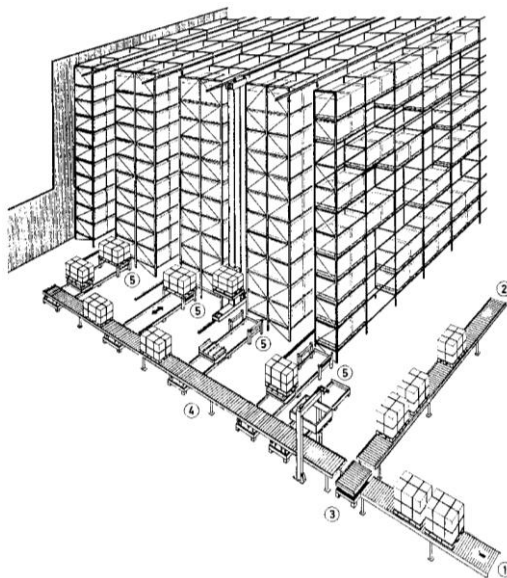


### Zadatak 03:

Visoko regalno paletno skladište sastoji se od četiri modula – hodnika, odnosno osam regala. Svaki hodnik se opslužuje visoko regalnom dizalicom (vidi sliku). Sistem visoko regalnog skladišta je projektovan tako da se otprema paleta obavlja sa jedne strane, bilo da se otpremaju cele palete ili da se palete otpremaju posle dvodimenzionalnog procesa komisioniranja visoko regalnom dizalicom. Visoko regalne dizalice odlažu palete na izlazne rolgange (5) koji se nalaze po jedan uz svaki hodnik. Postojeća četiri izlazna rolganga su povezana sa centralnim rolgangom (4) koji prihvata palete sa njih i transportuje ih do mesta sa otpremu. Centralni deo rolganga na svom kraju se završava akumulacionim delom (1). Pre akumulacionog dela postavljena je skretnica (okretni sto) (3) koja se aktivira kad je akumulacioni deo pun, tako što prebacuje palete na poseban deo centralnog rolganga (2). Sa akumulacionog dela centralnog rolganga palete se zahvataju viljuškarom i transportuju do otpremne zone. Na otpremi paleta rade dva viljuškara sa srednjim vremenom trajanja ciklusa od  $\bar{t}_{ops} = 5$  minuta. Vremena trajanja ciklusa rada viljuškara su raspodeljena po eksponencijalnoj raspodeli.

Svaka visoko regalna dizalica u toku jednog sata iznese iz skladišta u proseku po pet paleta (celih ili komisioniranih). Dolazni tok paleta od svake visoko regalne dizalice je Poisson-ov. Za dati skladišni sistem odrediti:

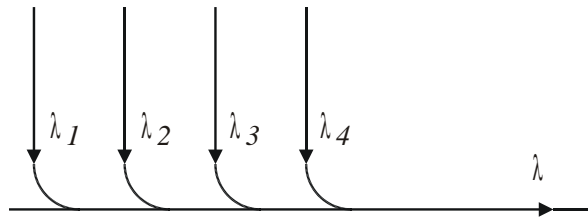
- potrebnu dužinu akumulacionog dela centralnog rolganga ako se pretpostavi da skretnica ne postoji.
- kako dužina akumulacionog dela centralnog rolganga utiče na broj paleta koje se skretnicom prebacuju na poseban deo centralnog rolganga.



### Rešenje:

Otprema paleta iz regala se obavlja preko sistema rolganga koji transportuju palete do mesta odakle ih zahvata viljuškar i odvozi do otpremne zone skladišta. Pošto u sistemu postoje četiri visoko regalne dizalice gde svaka od njih iznosi palete iz regala i postavlja ih na izlazne rolgange (5) sa intenzitetom  $\lambda_i = 5$  paleta/sat ( $i=1,2,3,4$ ), to se ukupni intenzitet kojim se palete otpremaju iz regala odnosno srednji intenzitet kojim palete dolaze na akumulacioni deo rolganga (1) dobija kao zbir intenziteta kojim visoko regalne dizalice iznose palete regala, tj.

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20 \text{ paleta/sat.}$$



Srednji intenzitet opsluživanja paleta viljuškarom:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{ops}} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ palete/min ili } 12 \text{ paleta/sat.}$$

U skladu sa gore iznetim, transport paleta iz regala do otpremne zone skladišta se može modelirati kao dvokanalni sistem opsluživanja kod koga je potrebno odrediti broj mesta u redu, tj. sistem opsluživanja  $M/M/2/?$ .

Ulazne veličine za dalji proračun:

broj kanala za opsluživanje:

$$c=2.$$

broj mesta u redu:

$$m = ?$$

srednji intenzitet dolaska paleta:

$$\lambda = 20 \text{ paleta/sat.}$$

srednji intenzitet opsluživanja paleta:

$$\mu = 12 \text{ paleta/sat.}$$

koeficijent iskorišćenja kanala za opsluživanje (viljuškara):

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} = \frac{20}{2 \cdot 12} = 0,8333.$$

### Odgovori:

a) Potrebna dužina akumulacionog dela centralnog rolganga, pod pretpostavkom da skretnica ne postoji, može se približno odrediti na osnovu srednjeg broja jedinica (paleta) koje se nalaze u redu  $N_w$  (akumulacionom delu centralnog rolganga) u slučaju da se transport paleta iz regala do otpremne zone modelira kao dvokanalni sistem opsluživanja sa beskonačnim redom tj.  $M/M/2/\infty$ .

Srednji broj jedinica u redu, kod višekanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom, određuje iz izraza:

$$\begin{aligned} N_w &= \lim_{m \rightarrow \infty} \rho \cdot p_c \cdot \frac{1 - \rho^m \cdot [m \cdot (1 - \rho) + 1]}{(1 - \rho)^2} = p_c \cdot \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} = \\ &= 0,12626 \cdot \frac{0,8333}{(1 - 0,8333)^2} = 3,78 \text{ paleta,} \end{aligned}$$

gde  $p_c$  ( $c=2$ ) predstavlja verovatnoću da se u sistemu nalaze dve jedinice (palete) tj. verovatnoću da su oba kanala za opsluživanje (viljuškara) zauzeta. Verovatnoća stanja  $p_c$  se određuje na osnovu izraza (8.76) kao:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{(c \cdot \rho)^i}{i!} \cdot p_0; \text{ za } i=2, \\ p_2 &= p_c = \frac{(2 \cdot 0,8333)^2}{2!} \cdot 0,09091 = 0,12626, \end{aligned}$$

dok se verovatnoća stanja  $p_0$  višekanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom određuje iz izraza (8.75) kao:

$$p_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^c \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot \rho \cdot \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho}} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=0}^c \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho}}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^2 \frac{(2 \cdot 0,8333)^k}{k!} + \frac{(2 \cdot 0,8333)^2}{2!} \cdot \frac{0,8333}{1 - 0,8333}} = 0,09091.$$

Pošto je srednji broj jedinica (paleta) u redu tj. na akumulacionom delu centralnog rolganga  $N_w=3,78$  usvaja se da akumulacioni deo centralnog rolganga treba da prihvati 4 palete. Kako se u skladišnom sistemu koriste euro palete dimenzija  $1200 \times 800 \times 145$  mm, potrebne dimenzije akumulacionog dela centralnog rolganga su:

dužina:  $L=4 \times 1200 = 4800$  mm, i širina:  $B= 800$  mm.

b) Palete se prebacuju na poseban deo centralnog rolganga kada je akumulacioni deo centralnog rolganga popunjen, što znači da sistem ne može da prihvati dolazeću paletu. U tom slučaju dve palete se transportuju viljuškarima do otpremne zone (kanali za opsluživanje opslužuju jedinice) i na akumulacionom rolgangu nema mesta za prihvatanje dolazeće palete (red je popunjen). Stanje sistema u kome će paleta koja dolazi biti skrenuta na posebni deo centralnog rolganga, tj. dobiti otkaz je  $X=c+m$ , i karakteriše se verovatnoćom  $p_{c+m}$ .

Verovatnoća stanja  $p_{c+m}$  višekanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom izračunava se iz izraza:

$$p_i = \frac{\rho^{i-c} \cdot (c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot p_0 \text{ za } i=c+m, c=2 \text{ i } \rho=0,8333 \text{ tj.,}$$

$$p_{2+m} = \frac{0,8333^m \cdot (2 \cdot 0,8333)^2}{2!} \cdot p_0,$$

dok se verovatnoća stanja  $p_0$  izračunava na iz izraza:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^c \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot \rho \cdot \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho}} \text{ tj.}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^2 \frac{(2 \cdot 0,8333)^k}{k!} + \frac{(2 \cdot 0,8333)^2}{2!} \cdot 0,8333 \cdot \frac{1 - 0,8333^m}{1 - 0,8333}}.$$

Broj paleta koji se u jedinici vremena skrene na posebni deo centralnog rolganga, tj. broj jedinica koje su dobile otkaz, određuje se iz sledećeg izraza:

$$N_{otk} = \lambda \cdot p_{c+m} = \lambda \cdot p_{2+m}.$$

U narednoj tabeli je prikazana promena broja paleta, u jedinici vremena, koje će biti skrenute na poseban deo centralnog rolganga u zavisnosti od kapaciteta akumulacionog dela centralnog rolganga tj. broja mesta u redu –  $m$ .

$\lambda = 20$ paleta/sat; $c=2$			
$m$	$p_0$	$p_{c+m}$	$N_{otk}$ paleta/sat
2	0,161879	0,156133	3,12
3	0,143241	0,115131	2,30
4	0,130702	0,087543	1,75
6	0,115283	0,053622	1,07

Uočava se da se povećanjem akumulacionog dela centralnog rolganga broj paleta koji se skreće na posebni deo centralnog rolganga smanjuje.

#### Zadatak 04:

Na pripremi robe za distribuciju – komisioniranju rade dva radnika u smeni ( $t_{ef}=7,5$  sati). Komisioniranje se obavlja u skladištu pomoću paletnih kolica za komisioniranje. Prosečno, oba radnika kompletiraju 50 porudžbina. Svaka porudžbina staje na jednu paletu. Pripremljene (komisionirane) palete radnici odlažu na za to predviđenu podnu površinu, odakle se palete jednim viljuškarom prebacuju do otpremne zone skladišnog sistema. Na podnu površinu za odlaganje paleta maksimalno mogu da se odlože tri palete. Ako je srednje vreme trajanja ciklusa viljuškara  $\bar{t}_{ops}=7,5$  minuta odrediti:

- broj paleta koje nije moguće odložiti na predviđenu podnu površinu,
- srednji broj paleta na podnoj površini, i
- srednje vreme koje komisionirana paleta provede u sistemu tj. dok je viljuškar ne odloži u otpremnu zonu skladišta.

#### Rešenje:

Pod pretpostavkom da se kompletiranje porudžbina (jedinica) odigrava po Poisson-ovom procesu sa intenzitetom od 50 porudžbina u smeni i da je vreme potrebno da se porudžbina otpremi do otpremne zone skladišnog sistema eksponencijalno raspodeljeno sa srednjim vremenom  $\bar{t}_{ops}=7,5$  minuta, sistem transporta komisioniranih paleta do otpremne zone skladišta može se modelirati sa  $M/M/1/4$  sistemom opsluživanja.

broj kanala za opsluživanje (viljuškar):	$c=1,$
broj mesta u redu (podna površina):	$m=3,$
srednji intenzitet dolaska porudžbina (paleta):	$\lambda=50$ paleta/smeni $\rightarrow$ $\lambda=50/t_{ef}=50/7,5$ $\lambda=6,6667$ paleta/sat,
srednji intenzitet opsluživanja porudžbina (paleta):	$\mu=1/\bar{t}_{ops}=1/7,5 \rightarrow$ $\mu=0,1333$ paleta/minuti, $\mu=0,1333 \cdot 60=8$ paleta/sat.
koeficijent iskorišćenja kanala za opsluživanje (viljuškara):	$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} = \frac{6,6667}{1 \cdot 8} = 0,8333.$

#### Odgovori:

a) Palete nije moguće odložiti na predviđenu podnu površinu ukoliko se jedna paleta transportuje viljuškarom do otpremne zone i ako se na predviđenoj podnoj površini već nalaze tri palete. U tom slučaju sistem je popunjen i nalazi se u stanju  $X=c+m=1+3=4$  koje se karakteriše verovatnoćom  $p_4$ .

Verovatnoće stanja jednokanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom izračunavaju se iz izraza:

$$p_i = \rho^i \cdot \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}},$$

za  $i=4$  i  $m=3$  dobija se:

$$p_4 = 0,8333^4 \cdot \frac{1-0,8333}{1-0,8333^{3+2}} = 0,1344.$$

Broj paleta u jedinici vremena koje nije moguće odložiti na predviđenu podnu površinu tj. broj paleta koje su dobile otkaz, određuje se iz sledećeg izraza:

$$N_{otk} = \lambda \cdot p_4 = 6,6667 \cdot 0,1344 = 0,9 \text{ paleta/sat.}$$

b) Srednji broj paleta na podnoj površini ustvari predstavlja srednji broj jedinica u redu  $N_w$  i za jednokanalni sistem sa ograničenim redom određuje se iz izraza ( $m=3$ ):

$$N_w = \rho^2 \cdot \frac{1 - \rho^m \cdot [m \cdot (1 - \rho) + 1]}{(1 - \rho) \cdot (1 - \rho^{m+2})},$$

$$N_w = 0,8333^2 \cdot \frac{1 - 0,8333^3 \cdot [3 \cdot (1 - 0,8333) + 1]}{(1 - 0,8333) \cdot (1 - 0,8333^{3+2})} = 0,9192 \text{ palete,}$$

što znači da je praktično uvek u redu jedna paleta.

c) Vreme od trenutka postavljanja komisionirane palete na predviđenu podnu površinu do trenutka dok je viljuškar ne odloži u otpremnu zonu skladišta predstavlja srednje vreme koje jedinica provede u sistemu  $t_{ws}$  koje se određuje primenom *Little* - ove formule kao:

$$t_{ws} = \frac{N_{ws}}{\bar{\lambda}} = \frac{1,6405}{5,7707} = 0,2843 \text{ sata ili } 17,1 \text{ minut,}$$

gde je  $N_{ws}$  srednji broj jedinica u sistemu koji se za jednokanalni sistem opsluživanja sa ograničenim redom određuje iz izraza:

$$N_{ws} = \rho \cdot \frac{1 - \rho^{m+1} \cdot [m \cdot (1 - \rho) + 2 - \rho]}{(1 - \rho) \cdot (1 - \rho^{m+2})}$$

$$N_{ws} = 0,8333 \cdot \frac{1 - 0,8333^{3+1} \cdot [3 \cdot (1 - 0,8333) + 2 - 0,8333]}{(1 - 0,8333) \cdot (1 - 0,8333^{3+2})} = 1,6405,$$

dok  $\bar{\lambda}$  predstavlja prosečni intenzitet dolaznog toka koji se određuje na osnovu izraza ( $m=3$ ):

$$\bar{\lambda} = \lambda \cdot (1 - p_{m+1}) = \lambda \cdot (1 - p_{3+1}) = 6,6667 \cdot (1 - 0,1344) = 5,7707.$$

gde je:

$$p_4 = 0,1344.$$

### Zadatak 05:

Visoko regalno paletno skladište sastoji se od četiri modula – hodnika, odnosno osam regala. Svaki hodnik se opslužuje visoko regalnom dizalicom (VRD). Sistem visoko regalnog skladišta je projektovan tako da se prijem paleta obavlja sa jedne strane. Visoko regalne dizalice prihvataju palete sa dva konzolno postavljena prijemna paletna mesta koja se nalaze uz svaki hodnik. Palete se od prijemne zone skladišta do mesta sa kojih ih zahvataju visoko regalne dizalice dopremaju sa dva viljuškara i ravnomerno raspoređuju po hodnicima. Svaki viljuškar prosečno dopremi  $\lambda_v=40$  paleta na sat. Srednje vreme trajanja jednostrukog ciklusa visoko regalne dizalice na unosu paleta u regal je  $\bar{t}_{ops}=2,5$  minuta. Odrediti broj paleta koje visoko regalne dizalice ne mogu da opsluže usled popunjenosti konzolnih mesta za prijem paleta.

### Rešenje:

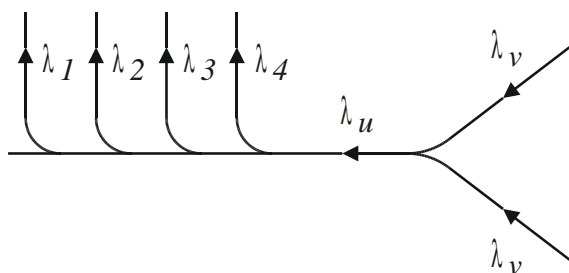
Pošto se palete koje transportuju viljuškari ravnomerno raspoređuju na sva četiri hodnika i pod pretpostavkom da se doprema paleta (jedinica) svakim od viljuškara odigrava po Poisson-ovom procesu sa srednjim intenzitetom od  $\lambda_v=40$  paleta na sat kao i da je vreme trajanja jednostrukog ciklusa visoko regalne dizalice eksponencijalno raspodeljeno sa srednjim vremenom  $\bar{t}_{ops}=2,5$  minuta, sistem unosa paleta u visoko regalno može se modelirati kao četiri nezavisna sa jednokanalna sistema sa ograničenim redom tj. sa četiri  $M/M/1/3$  sistema opsluživanja.

Palete se do visoko regálnih dizalica dovoze sa dva viljuškara srednjim intenzitetom od  $\lambda_v=40$  paleta na sat što daje ukupni srednji intenzitet dolaska paleta  $\lambda_u$  od:

$$\lambda_u = \lambda_v + \lambda_v = 40 + 40 = 80 \text{ paleta/sat.}$$

Ukupni srednji intenzitet dolaska paleta  $\lambda_u$  se ravnomerno raspoređuje na sva četiri hodnika, tako da je srednji intenzitet kojim palete dolaze do svake od dizalica jednak: (vidi sliku)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{\lambda_u}{4} = \frac{80}{4} = \lambda \rightarrow \lambda = 20 \text{ paleta/sat.}$$



U skladu sa prethodnim tekstom očigledno je da je dovoljno analizirati rad samo jedne visoko regalne dizalice tj. jednog jednokanalnog sistema opsluživanja sa dva mesta u redu a da dobijene rezultate treba pomnožiti sa četiri da bi se dobili rezultati koji se odnose na celokupan sistem unosa paleta u visoko regalno skladište.

broj kanala za opsluživanje (VRD):

$$c=1,$$

broj mesta u redu:

$$m=2,$$

srednji intenzitet dolaska jedinica (paleta):

$$\lambda=20 \text{ paleta/sat,}$$

srednji intenzitet opsluživanja jedinica (paleta):

$$\mu=1/\bar{t}_{ops}=1/2,5 \rightarrow$$

$$\mu=0,4 \text{ palete/minuti,}$$

$$\mu = 0,4 \cdot 60 = 24 \text{ palete/sat.}$$

koeficijent iskorišćenja kanala za opsluživanje (VRD):

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} = \frac{20}{1 \cdot 24} = 0,8333.$$

### Odgovori:

a) Palete nije moguće odložiti na jedno od dva konzolno postavljena prijemna paletna mesta ukoliko se jedna paleta visoko regalnom dizalicom unosi u regal i ako se na svakom od postojećih dva prijemna paletna mesta već nalaze palete. U tom slučaju sistem je popunjen i nalazi se u stanju  $X=c+m=1+2=3$  koje se karakteriše verovatnoćom  $p_3$ .

Verovatnoće stanja jednokanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom izračunavaju se na osnovu izraza:

$$p_i = \rho^i \cdot \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}},$$

za  $i=3$  i  $m=2$  dobija se:

$$p_3 = 0,8333^3 \cdot \frac{1 - 0,8333}{1 - 0,8333^{2+2}} = 0,1863.$$

Broj paleta u jedinici vremena koje nije moguće odložiti na konzolno postavljena prijemna mesta tj. broj paleta koje su dobile otkaz, određuje se iz sledećeg izraza:

$$N_{otk} = \lambda \cdot p_3 = 20 \cdot 0,1863 = 3,73 \text{ palete/sat.}$$

Broj paleta koje visoko regalne dizalice ne mogu da opsluže usled popunjenosti konzolnih mesta za prijem paleta iznosi:

$$4 \times N_{otk} = 4 \cdot 3,73 = 14,92 \approx 15 \text{ paleta/sat,}$$

što iznosi približno 19% od ukupnog broja paleta koje na sat dopreme do visoko regalnih dizalica.