

## Projekat - template

### Primer

Preduzeće Construction Co. je pobedilo na tenderu vrednom 5,4 miliona NJ za izgradnju nove fabrike. Investitor očekuje da fabrika bude izgrađena odnosno spremna za rad u roku od godinu dana. U skladu sa tim ugovor sadrži sledeće klauzule vezane za bonuse odnosno penale:

- Ako se fabrika izgradi i preda investitoru u roku od 40 nedelja preduzeće Construction Co. će zaraditi bonus u iznosu od 150.000 NJ.
- Ukoliko se fabrika ne završi u roku od 47 nedelja preduzeće Construction Co. je u obavezi da investitoru plati penale u iznosu od 300.000 NJ zbog kašnjenja radova.

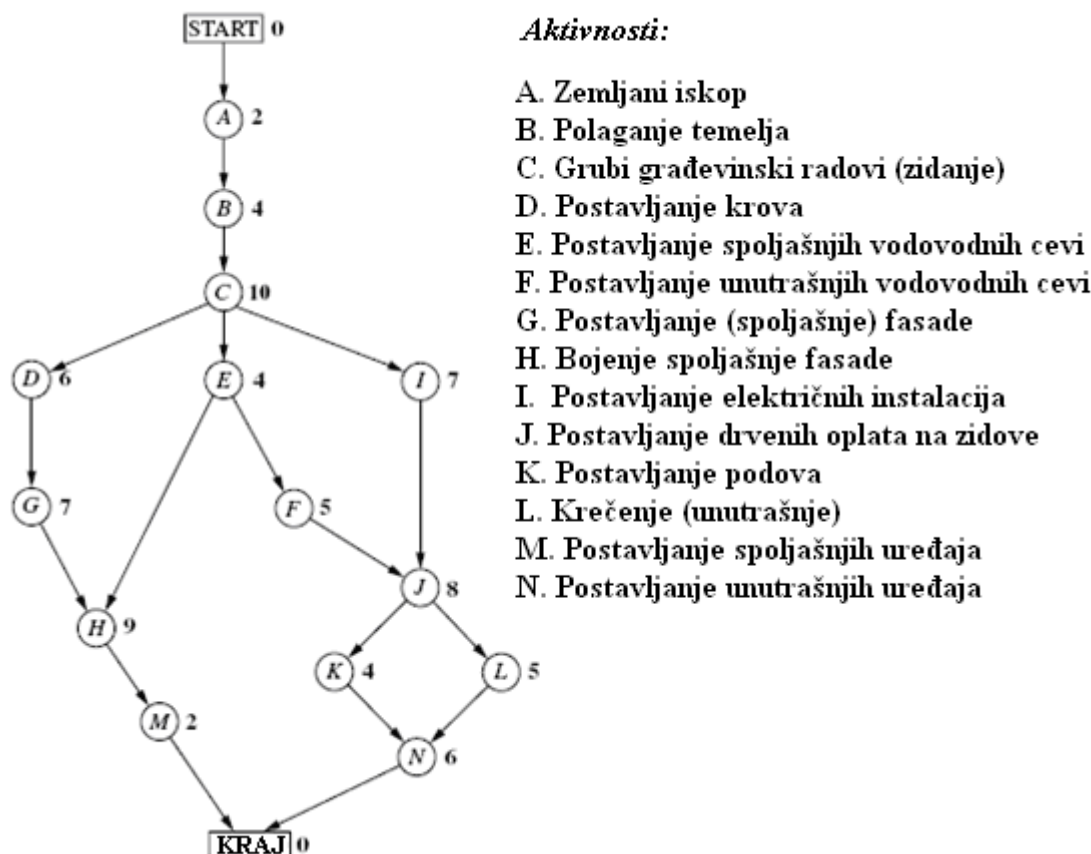
Preduzeće Construction Co. je za menadžera projekta odredilo svog najboljeg građevinskog inženjera (menadžera), da bi osigurali završetak projekata izgradnje fabrike u predviđenom roku pa ako je moguće i nekoliko nedelja ranije. Pošto je zajednička ocena rukovodstva preduzeća Construction Co. i menadžera projekta da je malo verovatno da se projekat izgradnje fabrike može završiti u roku of 40 nedelja bez dodatnih troškova, odlučeno je da se inicijalna planiranja usmere na ostvarivanje zadatog roka od 47 nedelja. Lista aktivnosti za Construction Co. projekat prikazana je u tabeli P-1, dok je mrežni dijagram prikazan na slici P-1.

Tabela P-1. Lista aktivnosti za Construction Co. projekat.

| Aktivnost | Opis aktivnosti                          | Neposredno prethodna aktivnost | Procenjeno trajanje |
|-----------|--|--------------------------------|---------------------|
| A         | Zemljani iskop                           | ÷                              | 2 nedelje           |
| B         | Polaganje temelja                        | A                              | 4 nedelje           |
| C         | Grubi građevinski radovi (zidanje)       | B                              | 10 nedelja          |
| D         | Postavljanje krova                       | C                              | 6 nedelja           |
| E         | Postavljanje spoljašnjih vodovodnih cevi | C                              | 4 nedelje           |
| F         | Postavljanje unutrašnjih vodovodnih cevi | E                              | 5 nedelja           |
| G         | Postavljanje (spoljašnje) fasade         | D                              | 7 nedelja           |
| H         | Bojenje spoljašnje fasade                | E, G                           | 9 nedelja           |
| I         | Postavljanje električnih instalacija     | C                              | 7 nedelja           |
| J         | Postavljanje drvenih oplata na zidove    | F, I                           | 8 nedelja           |
| K         | Postavljanje podova                      | J                              | 4 nedelje           |
| L         | Krećenje (unutrašnje)                    | J                              | 5 nedelja           |
| M         | Postavljanje spoljašnjih uređaja         | H                              | 2 nedelje           |
| N         | Postavljanje unutrašnjih uređaja         | K, L                           | 6 nedelja           |

## Mrežni dijagram projekta

Za konstruisanje mrežnih dijagrama projekta obično se koriste neki od postojećih softverskih paketa. U narednom tekstu biće prikazano kako se primenom programa *MS Project* konstruiše mrežni dijagram projekta preduzeća Construction Co.

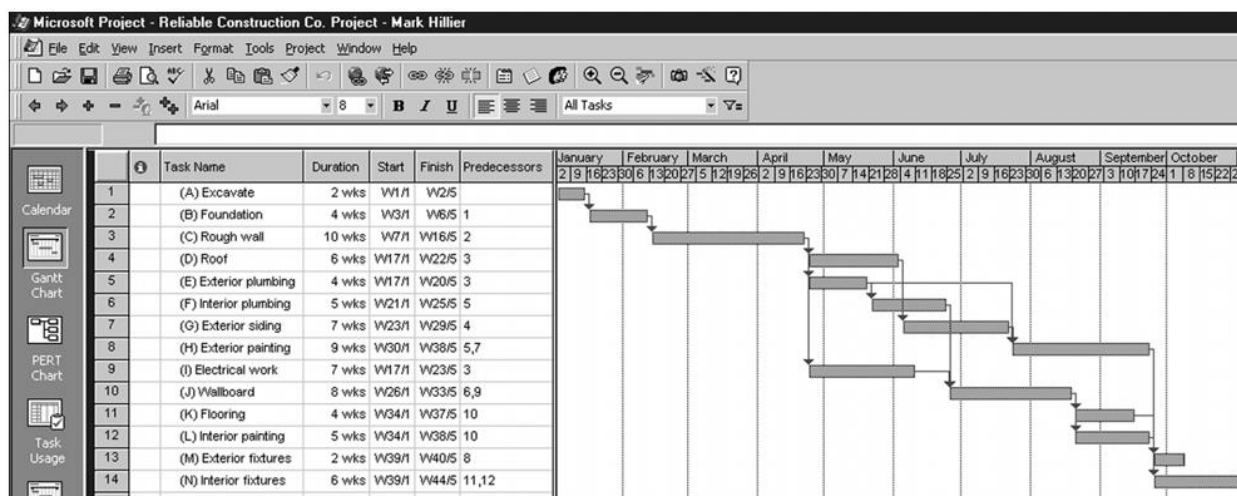


Slika P-1. Mrežni dijagram projekata preduzeća Construction Co.

## Primena Microsoft Project - a

Prvi korak u primeni Microsoft Project-a (kraće MS Project) je unošenje odgovarajućih informacija iz liste aktivnosti (tabela P-1). Da bi se to uradilo potrebno je sa horizontalnog menija izabrati opciju *View* i sa padajućeg menija izabrati opciju *Table*. Iz otvorenog pod-menija, izabrati opciju *Entry* da bi se pozvala prazna tabela u koju je potrebno uneti informacije. Izgled tabele, za projekat Construction Co. je prikazan na slici P-2. Kao što je prikazano na slici ulazni podaci koje je potrebno uneti su: nazivi aktivnosti (Task names), trajanje svake od aktivnosti (Duration), početak (Start) i kraj (Finish) svake od aktivnosti kao i neposredno prethodne aktivnosti za svaku od aktivnosti (Predecessors). Nakon unosa ovih informacija program (MS Project) će automatski prikazati dijagram (sa desne strane) koji predstavlja plan izvršenja projekta.

Podrazumevano vreme trajanja aktivnosti, u MS Project-u je u danima. Da bi se ova opcija promenila potrebno je izabrati opciju *Tools* sa horizontalnog menija, pa zatim *Options* sa padajućeg menija i konačno u opciji *Schedule* promeniti “Duration is entered in”.



Slika P-2. Izgled tabele MS Project-a nakon unesenih aktivnosti za projekat Construction Co. Sa desne strane je Gantt-ova karta koja prikazuje plan izvršenja projekta.

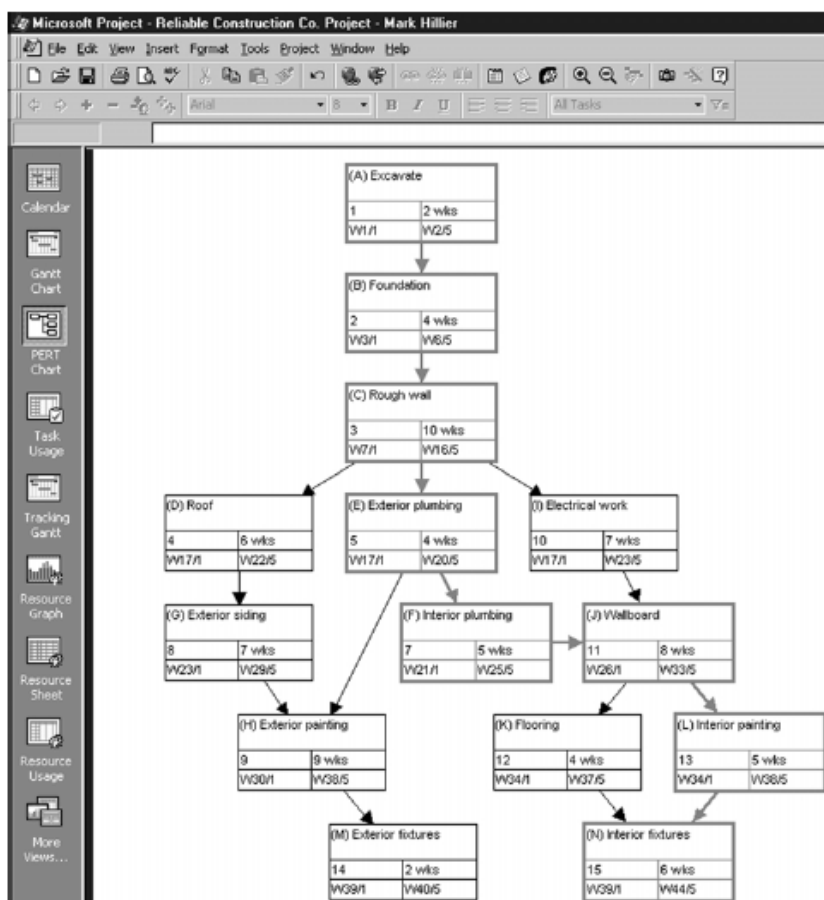
Usvojeni standardni format datuma je tzv. kalendarski prikaz datuma (npr. 1/2/01). Prikaz datuma se može promeniti ako se izabere opcija *Tools* sa horizontalnog menija, pa zatim *Options* sa padajućeg menija i konačno u opciji *View* potrebno je promeniti “Date Format”. Za konkretan slučaj izabrano je da se vreme broji od 0. Prema tome, početno vreme prve aktivnosti je dato kao W1/1, što predstavlja skraćenicu za Nedelja 1 (Week), dan 1 (day). Npr., kako je trajanje prve aktivnosti (Zemljani iskop) 2 nedelje, njeno vreme završetka je dato kao W2/5 (Nedelja 2, dan 5).

Dijagram sa desne strane (slika P-2) predstavlja tzv. **Gantt-ovu kartu** ili Gantogram. Ova vrsta dijagrama se veoma često primenjuje u praksi za prikazivanje plan izvršenja projekta, pošto se na pregledan način prikazuju planirani početci odnosno završetci pojedinih aktivnosti. (Na slici P-2 se pretpostavlja da se početak projekta poklapa sa početkom kalendarske godine.) Strelice pokazuju međuzavisnost između pojedinih aktivnosti. Npr. pošto obe aktivnosti 5 i 7 neposredno prethode aktivnosti 8, strelice iz obe aktivnosti (5 i 7) vode do aktivnosti 8.

Ulazna tabela projekta (slika P-2) se uvek može prikazati izborom opcije *Table: Entry* sa padajućeg menija *View*.

Izbor između različitih prikaza toka izvršenja projekta se vrši jednostavno pomoću menija koji se nalazi sa leve strane ekrana (slika P-2). Usvojeni standardni način

prikazivanja, u MS Project-u, je Gantt-ova karta. Opcija *PERT chart* prikazuje mrežni dijagram projekta. Izborom ove opcije, aktivnosti se u početku poređaju u red jedna ispod druge, ali je pomoću miša moguće, pravougaonike koji predstavljaju aktivnosti, po želji pomerati. Slika P-3 prikazuje mrežni dijagram projekta nakon što su pravougaonici, koji predstavljaju aktivnosti, raspoređeni na ista mesta kao odgovarajuća čvorišta na slici P-1 (osim što ne postoje pravougaonici za početak odnosno završetak projekta). Unutar pravougaonika koji predstavlja aktivnost nalaze sve potrebne informacije vezane za datu aktivnost. Imena aktivnosti se prikazuju u prvome redu, dok se u drugom redu prikazuje broj date aktivnosti kao i njeno trajanje. Poslednji, treći red prikazuje planirani početak odnosno završetak date aktivnosti.



Slika P-3. Mrežni dijagram projekta Construction Co., prikazan koristeći MS Project.

## Kritični put

Prema tome, za projekat Construction Co. dobija se sledeće:

Kritični put: START → A → B → C → E → F → J → L → N → KRAJ

(Procenjeno) vreme potrebno za realizaciju projekta = 44 nedelje.

## Planiranje redosleda izvršenja aktivnosti

Procedura planiranja redosleda izvršenja aktivnosti, kod metode PERT/CPM, počinje postavljanjem pitanja tj.: Kada pojedine aktivnosti mogu da počnu i da se završe (najranije), ako se ne dogode neplanirana kašnjenja? Da se ne dogode neplanirana kašnjenja znači sledeće: (1) *stvarno* trajanje svake od aktivnosti treba da bude jednako njenom *procenjenom* trajanju i (2) svaka aktivnost treba da počne odmah nakon što se sve njene neposredno prethodne aktivnosti završe. Vremena početka i završetka svake od aktivnosti, ako se ne dogode kašnjenja pri realizaciji bilo kog dela projekta, nazivaju se **vreme najranijeg početka** odnosno **vreme najranijeg završetka** aktivnosti. Ova vremena se označavaju na sledeći način:

$NrP$  = vreme najranijeg početka za datu aktivnost,

$NrZ$  = vreme najranijeg završetka za datu aktivnost,

gde je:

$NrZ = NrP + (\text{procenjeno}) \text{ vreme trajanja aktivnosti.}$

Umesto da se izvršavanje pojedinih aktivnosti veže za datume, mnogo je pogodnije računati broj proteklih vremenskih perioda (u slučaju projekta Construction Co. ti vremenski period su nedelje) od početka realizacije projekta.

Prema tome,

Vreme početka realizacije projekta = 0.

Pošto projekat Construction Co. počinje sa aktivnošću A, to je:

Aktivnost A:  $NrP = 0$ ,

$NrZ = 0 + \text{vreme trajanja (2 nedelje)}$

$= 2$ ,

gde je vreme trajanja (u nedeljama) aktivnosti A dato na slici P-1 (broj sa desne strane aktivnosti). Aktivnost B može da počne odmah po završetku aktivnosti A, što znači:

Aktivnost B:  $NrP = NrZ$  aktivnosti A

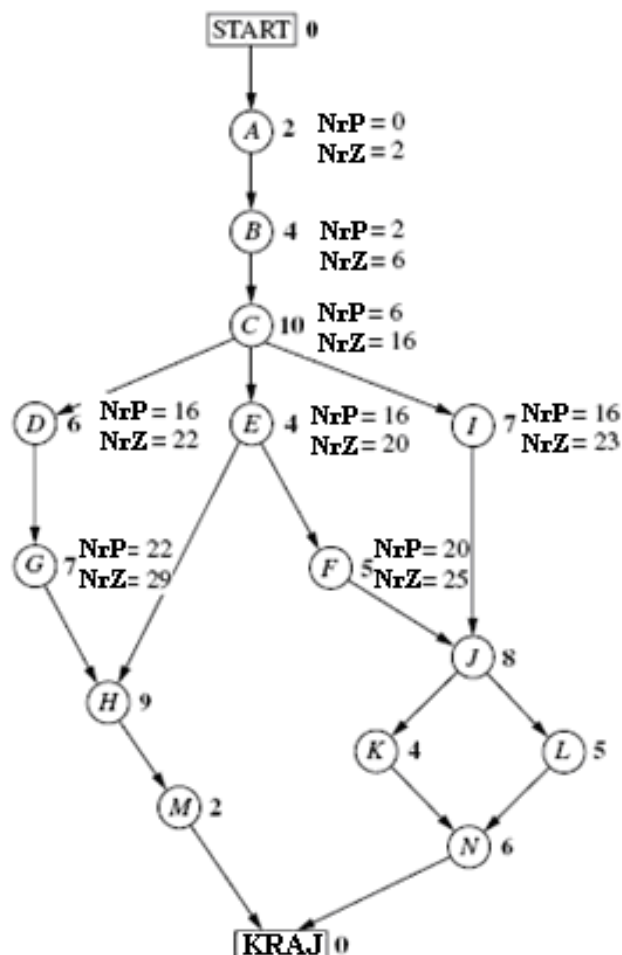
$= 2$

$NrZ = 2 + \text{vreme trajanja (4 nedelje)}$

$= 6$ .

Izračunavanje  $NrP$  za aktivnost B ilustruje prvo pravilo za određivanje  $NrP$  bilo koje aktivnosti koja ima samo jednu neposredno prethodnu aktivnost.

*Ako aktivnost ima samo jedno neposredno prethodnu aktivnost, tada je  $NrP$  date aktivnosti =  $NrZ$  neposredno prethodne aktivnosti.*



Slika P-4. Vremena najranijeg početka (NrP) i vremena najranijeg završetka (NrZ) za koje imaju samo jednu neposredno prethodnu aktivnost.

Neposrednom primenom ovog pravila (zajedno sa izračunavanjem NrZ) dobija se NrP i NrZ za aktivnost C, nakon toga za aktivnosti D, E, I i na kraju za aktivnosti G i F. Na slici P-4 prikazani su NrP i NrZ za svaku od ovih aktivnosti, sa desne strane odgovarajućeg čvorišta. Npr.:

$$\begin{aligned}
 \text{Aktivnost G: } \text{NrP} &= \text{NrZ aktivnosti D} \\
 &= 22, \\
 \text{NrP} &= 22 + \text{vreme trajanja (7 nedelja)} \\
 &= 29,
 \end{aligned}$$

što znači da bi aktivnost G (Postavljanje (spoljašnje) fasade) trebala da počne posle 22 nedelje i završi se posle 29 nedelja od početka realizacije projekta.

Aktivnost H ima dve neposredno prethodne aktivnosti, aktivnost G i E, što znači da početak aktivnosti H mora da čeka dok se obe aktivnosti G i E ne završe. Vreme najranijeg početka aktivnosti H se određuje na sledeći način:

Neposredno prethodne aktivnosti aktivnosti  $H$ :  
NrZ aktivnosti  $G = 29$ .  
NrZ aktivnosti  $E = 20$ .  
Veći NrZ = 29.

Prema tome,  
NrP aktivnosti  $H = \text{Veći NrZ}$   
= 29.

Izračunavanje NrP za aktivnost  $H$  ilustruje uopšteno pravilo za određivanje NrP bilo koje aktivnosti.

**Pravilo određivanja vremena najranijeg početka aktivnosti**

Vreme najranijeg početka bilo koje aktivnosti je jednako najvećem vremenu najranijeg završetaka njenih neposredno prethodnih aktivnosti.

NrP = Najveći NrZ neposredno prethodnih aktivnosti.

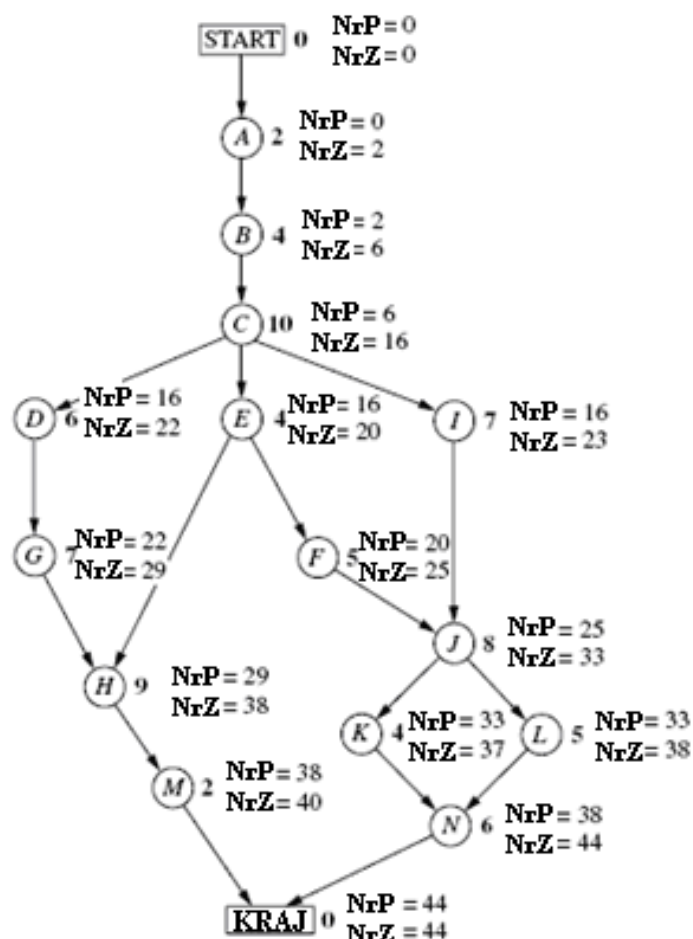
U slučaju da aktivnost ima samo jednu neposredno prethodnu aktivnost, ovo pravilo postaje isto kao i prvo pravilo formulisano nešto ranije. Za primenu ovog pravila broj neposredno prethodnih aktivnosti nije od značaja tj. može biti proizvoljno velik. Primenom gornjeg pravila na ostale aktivnosti na slici P-4, kompletira se skup vrednosti za vremena NrP i NrZ aktivnosti, kao što je to prikazano na slici P-5.

Na slici P-5 su takođe prikazani NrP i NrZ za čvorišta START i KRAJ. Razlog zašto je to urađeno je to što se ova čvorišta tretiraju kao *fiktivne aktivnosti* tj. aktivnosti koje ne zahtevaju vreme (njihovo vreme trajanja je jednako nuli). Za čvorište START očigledno je  $\text{NrP}=0=\text{NrZ}$ . Za čvorište KRAJ, koristi se pravilo određivanja najranijeg početka za određivanje NrP na uobičajen način tj.

Neposredno prethodne aktivnosti čvorišta KRAJ - fiktivne aktivnosti KRAJ:

NrZ aktivnosti  $M = 40$ .  
NrZ aktivnosti  $N = 44$ .  
Veći NrZ = 44.

Prema tome,  
NrP fiktivne aktivnosti KRAJ = Veći NrZ  
= 44.  
NrZ fiktivne aktivnosti KRAJ =  $44 + 0 = 44$ .



Slika P-5. Vremena najranijeg početka (NrP) i vremena najranijeg završetka (NrZ) svih aktivnosti (plus čvorišta START i KRAJ) za projekat Construction Co.

Poslednje izračunavanje pokazuje da projekat Construction Co. bi trebao da bude realizovan u roku od 44 nedelje ako se sve odvija po planu i u skladu sa vremenima početka odnosno završetka aktivnosti, prikazanim na slici P-5.

Ova procedura, koja podrazumeva izračunavanje svih vremena NrP i NrZ aktivnosti počevši od početnih aktivnosti i krećući se napred u vremenu prema krajnjim aktivnostima, naziva se još i prolaz „unapred“ (forward pass) kroz mrežu.

U narednom tekstu biće prikazan deo procedure, planiranja redosleda izvršenja aktivnosti, kojim se određuje koliko kasnije, nego što je prikazano na slici P-5, može pojedina aktivnost da počne odnosno da se završi bez odlaganja planiranog roka završetka projekta.

**Vreme najkasnijeg početka** aktivnosti predstavlja najkasnije moguće vreme kada može početi izvršenje date aktivnosti bez odlaganja planiranog roka završetka projekta (što znači da će vreme završetka fiktivne aktivnosti KRAJ biti jednako njenom vremenu najranijeg završetka), pod pretpostavkom da neće biti naknadnih odlaganja završetka projekta. **Vreme najkasnijeg završetka** se definiše na isti



način kao i vreme najkasnijeg početka, stim što se umesto o početku govori o završetku date aktivnosti. Ova vremena se označavaju na sledeći način:

$NkP$  = vreme najkasnijeg početka za datu aktivnost,

$NkZ$  = vreme najkasnijeg završetka za datu aktivnost,

gde je:

$NkP = NkZ - (\text{procenjeno}) \text{ vreme trajanja aktivnosti.}$

Da bi se odredilo vreme najkasnijeg završetka aktivnosti koristi se sledeće pravilo:

**Pravilo određivanja vremena najkasnijeg završetka aktivnosti**

Vreme najkasnijeg završetka aktivnosti je jednako najmanjem vremenu od vremena najkasnijih početaka aktivnosti koje neposredno slede datu aktivnost.

$NkZ = \text{najmanji } NkP \text{ od aktivnosti koje neposredno slede datu aktivnost.}$

Pošto aktivnosti koje neposredno slede posmatranu aktivnost ne mogu da počnu dok se posmatrana aktivnost ne završi, ovo pravilo kaže da se posmatrana aktivnost mora završiti na vreme da omogući da sve aktivnosti koje je neposredno slede mogu da počnu do njihovog vremena najkasnijeg početka.

Npr. posmatra se aktivnost  $M$  na slici P-1. Aktivnost  $M$ , neposredno sledi samo čvorište (fiktivna aktivnost) KRAJ. Posmatrana fiktivna aktivnost se mora izvršiti do vremena 44 da bi se projekat završio u procenjenom roku tj. u okviru 44 nedelje. Na osnovu toga se fiktivnoj aktivnosti KRAJ dodeljuju vremena najkasnijeg početka odnosno završetka na sledeći način:

Fiktivna aktivnost KRAJ:  $NkZ = \text{njen } NrZ = 44$

$NkP = 44 - 0 = 44.$

Primena pravila određivanja vremena najkasnijeg završetka aktivnosti na aktivnost  $M$ :

Aktivnost  $M$ :  $NkZ = NkP$  za fiktivnu aktivnost KRAJ  
 $= 44,$

$NkP = 44 - \text{vreme trajanja (2 nedelje)}$   
 $= 42.$

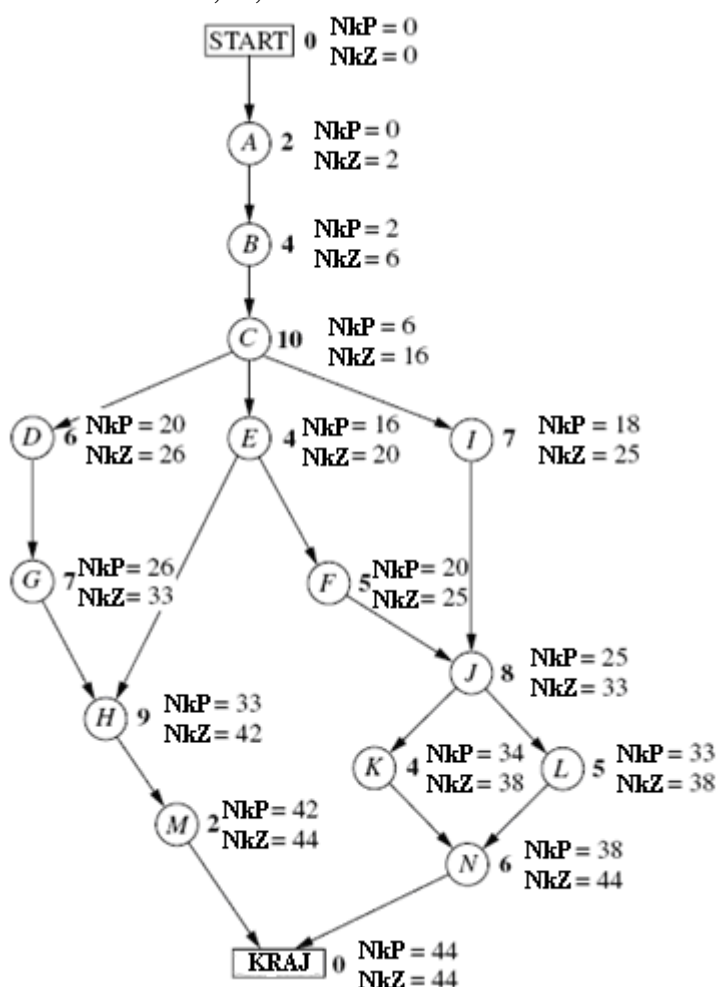
Pošto je aktivnost  $M$  jedna od aktivnosti sa kojima se završava projekat, moguće je automatski, bez primene pravila određivanja vremena najkasnijeg završetka, postaviti da je njeno vreme najkasnijeg završetka jednako vremenu najranijeg završetka fiktivne aktivnosti KRAJ.

Kako aktivnost  $M$  jedina neposredno sledi aktivnost  $H$ , pravilo određivanja vremena najkasnijeg završetka može se primenjuje na aktivnost  $H$  na sledeći način:

$$\begin{aligned}
 \text{Aktivnost } H: \text{NkZ} &= \text{NkP aktivnosti } M \\
 &= 42, \\
 \text{NkP} &= 42 - \text{vreme trajanja (9 nedelja)} \\
 &= 33.
 \end{aligned}$$

Procedura opisana u prethodnom tekstu, koja podrazumeva izračunavanje svih vremena NkP i NkZ aktivnosti počevši od krajnjih aktivnosti i krećući se unazad u vremenu prema početnim aktivnostima, naziva se još i prolaz „unazad“ (backward pass) kroz mrežu.

Na slici P-6 prikazani su rezultati određivanja vremena NkP i NkZ svih aktivnosti. Primera radi prikazaće se određivanje vremena NkP i NkZ za aktivnost C, koju neposredno slede tri aktivnosti D, E, i I.



Slika P-6. Vreme najkasnijeg početka (NkP) i vreme najkasnijeg završetka (NkZ) svih aktivnosti (plus čvorišta START i KRAJ) za projekat Construction Co.

Aktivnosti koje neposredno slede aktivnost C:

|             |           |
|-------------|-----------|
| Aktivnost D | NkP = 20. |
| Aktivnost E | NkP = 16. |
| Aktivnost I | NkP = 18. |
| Najmanji    | NkP = 16. |

Prema tome,

$$\text{NkZ aktivnosti C} = \text{Najmanji NkP (aktivnosti koje neposredno slede)} \\ = 16.$$

U tabeli P-2 prikazani su uporedo vremena NrP i NrZ kao i NkP i NkZ svih aktivnosti projekta Construction Co.

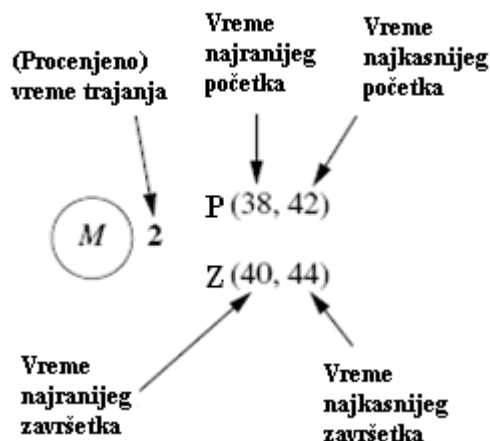
Tabela P-2. Vremena NrP, NrZ, NkP, NkZ aktivnosti projekta Construction Co.

| Aktivnost | Trajanje aktivnosti (nedelja) | <b>Najraniji</b><br>početak kraj ... | <b>Najraniji</b><br>završetak kraj ... | <b>Najkasniji</b><br>početak kraj ... | <b>Najkasniji</b><br>završetak kraj ... |
|-----------|-------------------------------|--------------------------------------|--|---------------------------------------|---|
| A         | 2                             | 0                                    | 2                                      | 0                                     | 2                                       |
| B         | 4                             | 2                                    | 6                                      | 2                                     | 6                                       |
| C         | 10                            | 6                                    | 16                                     | 6                                     | 16                                      |
| D         | 6                             | 16                                   | 22                                     | 20                                    | 26                                      |
| E         | 4                             | 16                                   | 20                                     | 16                                    | 20                                      |
| F         | 5                             | 20                                   | 25                                     | 20                                    | 25                                      |
| G         | 7                             | 22                                   | 29                                     | 26                                    | 33                                      |
| H         | 9                             | 29                                   | 38                                     | 33                                    | 42                                      |
| I         | 7                             | 16                                   | 23                                     | 18                                    | 25                                      |
| J         | 8                             | 25                                   | 33                                     | 25                                    | 33                                      |
| K         | 4                             | 33                                   | 37                                     | 34                                    | 38                                      |
| L         | 5                             | 33                                   | 38                                     | 33                                    | 38                                      |
| M         | 2                             | 38                                   | 40                                     | 42                                    | 44                                      |
| N         | 6                             | 38                                   | 44                                     | 38                                    | 44                                      |

Ako se vremena najkasnijeg početka i završetka za datu aktivnost, prikazana na slici P-6, razlikuju od odgovarajućih najranijih vremena prikazanih na slici P-5, tada posmatrana aktivnost ima odgovarajuću vremensku rezervu. Poslednji deo procedure za planiranje redosleda izvršenja aktivnosti, metode PERT/CPM, je identifikacija vremenskih rezervi i nakon toga korišćenje dobijenih informacija za određivanje *kritičnog puta*.

### Određivanje vremenskih rezervi u planu izvršenja aktivnosti

Da bi se odredile vremenske rezerve, pogodno je kombinovano prikazati najkasnija vremena početka i završetka aktivnosti (prikazana na slici P-6 i u tabeli P-2) i najranija vremena početka i završetka aktivnosti (prikazana na slici P-5 i u tabeli P-2). Na primeru aktivnosti M, biće prikazan način označavanja odgovarajućih vremena, za svaku aktivnost, na mrežnom dijagramu, tj.



(Slova P i Z ispred zagrada označavaju da su u zgradama prikazana vremena početka odnosno završetka aktivnosti).

**Vremenska rezerva** predstavlja razliku između vremena najkasnijeg završetka i vremena najranijeg završetka date aktivnosti. Korišćenjem uvedenih oznaka vremenska rezerva se može izraziti kao:

$$\text{Vremenska rezerva} = \text{NkZ} - \text{NrZ}.$$

(Pošto je  $\text{NkZ} - \text{NrZ} = \text{NkP} - \text{NrP}$ , bilo koja od prikazanih razlika se može koristiti za izračunavanje vremenskih rezervi.)

U tabeli P-3 prikazane su vremenske rezerve za svaku od aktivnosti projekta.

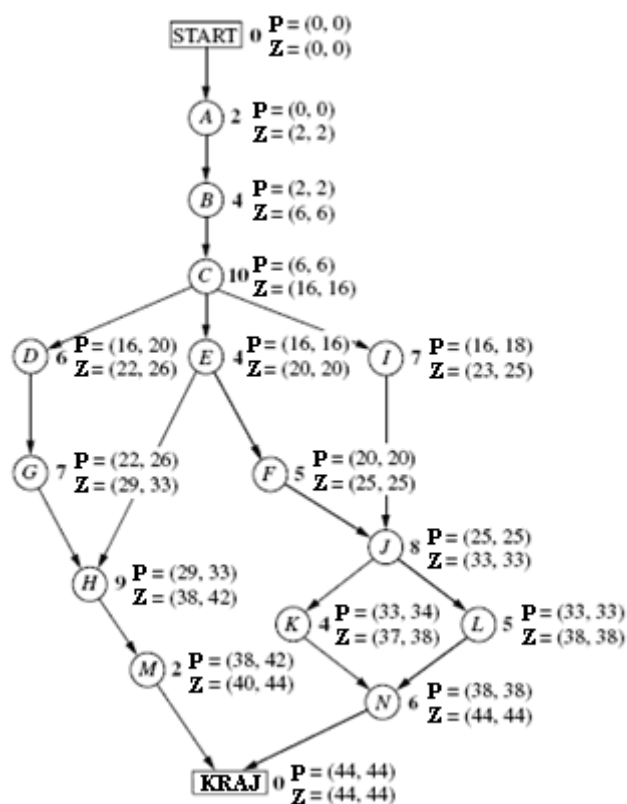
Tabela P-3. Vremenske rezerve za aktivnosti projekta Construction Co.

| Aktivnost | Vremenska rezerva<br>$\text{NkZ} - \text{NrZ}$ | Kritičan put |
|-----------|--|--------------|
| A         | 0  | Da           |
| B         | 0  | Da           |
| C         | 0  | Da           |
| D         | 4  | ne           |
| E         | 0  | Da           |
| F         | 0  | Da           |
| G         | 4  | ne           |
| H         | 4  | ne           |
| I         | 2  | ne           |
| J         | 0  | Da           |
| K         | 1  | ne           |
| L         | 0  | Da           |
| M         | 4  | ne           |
| N         | 0  | Da           |

Potrebno je naglasiti da neke aktivnosti imaju vremensku rezervu nula, što znači da će bilo koje kašnjenje u izvršenju tih aktivnosti odložiti planirani završetak projekta. Na ovaj način metod PERT/CPM identifikuje koje se aktivnosti nalaze na kritičnom putu.

Svaka aktivnost za vremenskom rezervom jednakom nuli se nalazi na kritičnom putu mrežnog dijagrama, što znači da bilo koje kašnjenje koje se dogodi na kritičnom putu dovodi do odlaganja planiranog završetka projekta.

Slika P-7, na gore opisan način prikazuje, vremena najranijih odnosno najkasnijih početaka i završetaka svih aktivnosti projekta, što omogućuje da se na lak način vidi koliku vremensku rezervu ima svaka od aktivnosti.



Slika P-7. Mrežni dijagram projekta prikazuje NrP i NkP (u gornjim zagradama) odnosno NrZ i NkZ (u donjim zagradama) za svaku od aktivnosti projekta Construction Co. Tamnije strelice prikazuju kritičan put izvršenja projekta.

Prema tome, kritičan put je:

START  $\rightarrow$  A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  C  $\rightarrow$  E  $\rightarrow$  F  $\rightarrow$  J  $\rightarrow$  L  $\rightarrow$  N  $\rightarrow$  KRAJ.

Kritičan put je na slici P-7 prikazan tamnijim strelicama.

## Neizvesnost u proceni trajanja aktivnosti

Verovatnoća završetka projekta u roku na neki način predstavlja proveru odnosno osiguranje da je procenjeno vreme trajanja projekta od 44 nedelje, dobijeno metodom PERT/CPM, realno.

Originalna verzija metode PERT, neizvesnost u vremenu trajanja aktivnosti uzima u obzir preko tri različite procene vremena trajanja aktivnosti kako bi se odredila raspodela verovatnoća trajanja aktivnosti.

## Određivanje vremena trajanja aktivnosti po metodi PERT

Tri različita vremena trajanja aktivnosti, koja se trebaju proceniti su:  
Najverovatnije vreme ( $m$ ), Optimističko vreme ( $o$ ), Pesimističko vreme ( $p$ ).

Prema tome, raspon između najmanjeg i najvećeg vremena trajanja aktivnosti grubo iznosi  $6 \cdot \sigma$ . Otud aproksimativna formula za izračunavanje  $\sigma^2$  je:

$$\sigma^2 = \left( \frac{p - o}{6} \right)^2. \quad (1)$$

Na sličan način se dobija i aproksimativna formula za  $\mu$ :

$$\mu = \frac{o + 4 \cdot m + p}{6}. \quad (2)$$

Intuitivno se može zaključiti da će očekivano vreme trajanja aktivnosti  $\mu$  biti u blizini  $m$  ili se poklapati sa  $m$  ako su vrednosti za  $o$  i  $p$  simetrične u odnosu na  $m$ .

MS Project pruža opciju za izračunavanje očekivanog vremena trajanja svake od aktivnosti  $\mu$ , koristeći formulu (2). Izbor tabele: PA\_PERT Entry sa menija View, omogućuje se unošenje tri različita procenjena vremena trajanja svake aktivnosti (najverovatnije vreme trajanja aktivnosti je označeno kao očekivano vreme trajanja). Izborom: PERT Analysis sa menija View, otvara se alat (Toolbar) koji omogućuje vršenje raznih analiza sa ovim procenjenim vremenima trajanja. Izborom opcije "Calculate PERT", preračunava se vreme trajanja aktivnosti ( $\mu$ ) "Duration", prema formuli (2). Sledeća mogućnost je da se prikažu Gantt-ove karte zasnovane na svakoj od tri procene vremena trajanja aktivnosti.

Tri procene vremena trajanja aktivnosti ( $o$ ,  $m$ ,  $p$ ), za projekat Construction Co. su date u tabeli P-4 (kolone 2, 3 i 4).

Tabela P-4. Srednje vreme i disperzija trajanja aktivnosti projekta Construction Co.

| Aktivnost | Optimističko vreme<br>$o$ | Najverovatnije vreme<br>$m$ | Pesimističko vreme<br>$p$ | Srednje vreme<br>$\mu = \frac{o + 4m + p}{6}$ | Disperzija<br>$\sigma^2 = \left(\frac{p - o}{6}\right)^2$ |
|-----------|---------------------------|-----------------------------|---------------------------|---|---|
| A         | 1                         | 2                           | 3                         | 2   | $\frac{1}{9}$   |
| B         | 2                         | $3\frac{1}{2}$              | 8                         | 4   | 1   |
| C         | 6                         | 9                           | 18                        | 10  | 4   |
| D         | 4                         | $5\frac{1}{2}$              | 10                        | 6   | 1   |
| E         | 1                         | $4\frac{1}{2}$              | 5                         | 4   | $\frac{4}{9}$   |
| F         | 4                         | 4                           | 10                        | 5   | 1   |
| G         | 5                         | $6\frac{1}{2}$              | 11                        | 7   | 1   |
| H         | 5                         | 8                           | 17                        | 9   | 4   |
| I         | 3                         | $7\frac{1}{2}$              | 9                         | 7   | 1   |
| J         | 3                         | 9                           | 9                         | 8   | 1   |
| K         | 4                         | 4                           | 4                         | 4   | 0   |
| L         | 1                         | $5\frac{1}{2}$              | 7                         | 5   | 1   |
| M         | 1                         | 2                           | 3                         | 2   | $\frac{1}{9}$   |
| N         | 5                         | $5\frac{1}{2}$              | 9                         | 6   | $\frac{4}{9}$   |

Dve poslednje kolone, u tabeli P-4, prikazuju srednje vreme i disperziju trajanja svake od aktivnosti, izračunate pomoću formula (1) i (2). U ovom slučaju, sve izračunate srednje vrednosti trajanja aktivnosti se poklapaju sa procenjenim vremenima trajanja aktivnosti datim u Tabeli P-1. Prema tome, pošto su srednja vremena trajanja aktivnosti jednaka njihovim procenjenim vremenima trajanja, vreme potrebno za realizaciju projekta će i dalje biti 44 nedelje, 3 nedelje manje od krajnjeg roka. Postavlja se pitanje kolika je verovatnoća da se, pod ovim uslovima, projekat završi do krajnjeg roka.

### Izračunavanje verovatnoće završetka projekta

Procedura izračunavanja  $P(T \leq d)$  se može na relativno lak način realizovati koristeći *Microsoft Excel*. Slika P-10 prikazuje primenu Excel-a za izračunavanje  $P(T \leq d)$  za Construction Co. projekat. U prvoj koloni tabele (B) nalaze se imena (oznake) aktivnosti. U sledeće tri (C, D, E) kolone unose se optimističko vreme ( $o$ ), srednje vreme ( $m$ ) i pesimističko ( $p$ ) vreme trajanja aktivnosti. Dalje, u petoj (F) i šestoj (G) koloni izračunava se srednje vreme trajanja aktivnosti ( $\mu$ ) i disperzija vremena trajanja aktivnosti ( $\sigma^2$ ), na osnovu formula (2) i (1). Nakon toga se definiše srednji kritičan put, tako što se u krajnju desnu kolonu (H) tabele u red u kojem je aktivnost koja se nalazi na srednjem kritičnom putu, unosi \*. U polje K12 se unosi krajnji rok za završetak projekta ( $d$ ). U poljima K7 i K8 nalaze se izračunate vrednosti za srednje vreme trajanja projekta ( $\mu_p$ ) i disperziju vremena

trajanja projekta ( $\sigma_p^2$ ) (sabiraju se ona vremena trajanja aktivnosti odnosno disperzije trajanja aktivnosti koje u svom redu imaju \*). Na kraju se u polju K10 izračunava verovatnoća završetka projekta u planiranom roku  $P(T \leq d)$  (vidi sliku P-10).

|    | A   | B        | C              | D   | E  | F     | G          | H             | I | J                  | K |
|----|---|----------|----------------|-----|----|-------|------------|---------------|---|--------------------|---|
| 1  | Template for PERT Three-Estimate Approach |          |                |     |    |       |            |               |   |                    |   |
| 2  |   |          |                |     |    |       |            |               |   |                    |   |
| 3  |   |          | Time Estimates |     |    |       |            | On Mean       |   |                    |   |
| 4  |   | Activity | o              | m   | p  | $\mu$ | $\sigma^2$ | Critical Path |   |                    |   |
| 5  |   | A        | 1              | 2   | 3  | 2     | 0.111      | *             |   | Mean Critical Path |   |
| 6  |   | B        | 2              | 3.5 | 8  | 4     | 1          | *             |   |                    |   |
| 7  |   | C        | 6              | 9   | 18 | 10    | 4          | *             |   |                    |   |
| 8  |   | D        | 4              | 5.5 | 10 | 6     | 1          |               |   |                    |   |
| 9  |   | E        | 1              | 4.5 | 5  | 4     | 0.444      | *             |   |                    |   |
| 10 |   | F        | 4              | 4   | 10 | 5     | 1          | *             |   |                    |   |
| 11 |   | G        | 5              | 6.5 | 11 | 7     | 1          |               |   |                    |   |
| 12 |   | H        | 5              | 8   | 17 | 9     | 4          |               |   |                    |   |
| 13 |   | I        | 3              | 7.5 | 9  | 7     | 1          |               |   |                    |   |
| 14 |   | J        | 3              | 9   | 9  | 8     | 1          | *             |   |                    |   |
| 15 |   | K        | 4              | 4   | 4  | 4     | 0          |               |   |                    |   |
| 16 |   | L        | 1              | 5.5 | 7  | 5     | 1          | *             |   |                    |   |
| 17 |   | M        | 1              | 2   | 3  | 2     | 0.111      |               |   |                    |   |
| 18 |   | N        | 5              | 5.5 | 9  | 6     | 0.444      | *             |   |                    |   |
| 19 |   |          |                |     |    |       |            |               |   |                    |   |
| 20 |   |          |                |     |    |       |            |               |   |                    |   |
| 21 |   |          | Data           |     |    |       |            |               |   |                    |   |
| 22 |   |          | Results        |     |    |       |            |               |   |                    |   |

|    |                 |                |
|----|-----------------|----------------|
| 5  | =(C5+4*D5+E5)/6 | =((E5-C5)/6)^2 |
| 6  | =(C6+4*D6+E6)/6 | =((E6-C6)/6)^2 |
| 7  | =(C7+4*D7+E7)/6 | =((E7-C7)/6)^2 |
| 8  | =(C8+4*D8+E8)/6 | =((E8-C8)/6)^2 |
| 9  | :               | :              |
| 10 | :               | :              |

|    |                              |
|----|------------------------------|
| 7  | =SUMIF(H5:H18,"*",F5:F18)    |
| 8  | =SUMIF(H5:H18,"*",G5:G18)    |
| 9  |                              |
| 10 | =NORMDIST(K12,K7,SQRT(K8),1) |

Slika P-10. Izračunavanje verovatnoće završetka projekta u predviđenom roku.

## Troškovi smanjenja vremena trajanja projekta

Pošto je potvrđeno da postoje realne šanse da će se projekat završiti u planiranom roku, treba da se ispita koliko je potrebno uložiti dodatnih sredstava da bi se procenjeno vreme potrebno za završetak projekta smanjilo na 40 nedelja (krajnji rok da bi kompanija zaradila bonus od 150.000 NJ za završetak projekta pre postavljenog roka). Prema tome, da bi se to ostvarilo, potrebno je dati odgovor na sledeće pitanje:

Ako se ulažu dodatna sredstva u cilju ubrzanja izvršenja projekta, koji je najjeftiniji način da se dostigne ciljano vreme završetka projekta od 40 nedelja?

Odgovor na postavljeno pitanje daje jedna od procedura metode CPM, bazirana na linearnom programiranju.



## Smanjenje vremena trajanja aktivnosti

U tabeli P-5 prikazana su normalna i usiljena vremena trajanja aktivnosti kao i odgovarajući troškovi.

Tabela P-5. Troškovi smanjenja trajanja aktivnosti projekta Construction Co.

| Aktivnost | Trajanje (nedelja) |          | Troškovi (NJ) |           | Maksimalno skraćenje (nedelja) | Troškovi skraćenja (NJ/ned.) |
|-----------|--------------------|----------|---------------|-----------|--------------------------------|------------------------------|
|           | Normalno           | Usiljeno | Normalni      | Usiljeni  |                                |                              |
| A         | 2                  | 1        | 180.000       | 280.000   | 1                              | 100.000                      |
| B         | 4                  | 2        | 320.000       | 420.000   | 2                              | 50.000                       |
| C         | 10                 | 7        | 620.000       | 860.000   | 3                              | 80.000                       |
| D         | 6                  | 4        | 260.000       | 340.000   | 2                              | 40.000                       |
| E         | 4                  | 3        | 410.000       | 570.000   | 1                              | 160.000                      |
| F         | 5                  | 3        | 180.000       | 260.000   | 2                              | 40.000                       |
| G         | 7                  | 4        | 900.000       | 1.020.000 | 3                              | 40.000                       |
| H         | 9                  | 6        | 200.000       | 380.000   | 3                              | 60.000                       |
| I         | 7                  | 5        | 210.000       | 270.000   | 2                              | 30.000                       |
| J         | 8                  | 6        | 430.000       | 490.000   | 2                              | 30.000                       |
| K         | 4                  | 3        | 160.000       | 200.000   | 1                              | 40.000                       |
| L         | 5                  | 3        | 250.000       | 350.000   | 2                              | 50.000                       |
| M         | 2                  | 1        | 100.000       | 200.000   | 1                              | 100.000                      |
| N         | 6                  | 3        | 330.000       | 510.000   | 3                              | 60.000                       |

## Kojim aktivnostima smanjiti trajanje?

**Problem:** kojim aktivnostima i koliko treba smanjiti trajanje da bi se, na najjeftiniji način, skratilo (procenjeno) vreme trajanja projekta na 40 nedelja?

Jedan od načina da se ovaj problem reši jeste tzv. **analiza graničnih troškova**, koja koristi poslednju kolonu u tabeli P-5 (kao i sliku P-7) za određivanje najjeftinijeg načina za postupno smanjenje trajanja projekta, nedelju po nedelju. Najlakši način da se ova analiza sprovede je formiranje tabele, kao što je tabela P-6, koja u sebi sadrži sve moguće putanje kroz mrežni dijagram projekta, kao i njihove dužine. Sve putanje kroz mrežni dijagram kao i njihove dužine, pri normalnom trajanju aktivnosti, prikazane su u tabeli P-6.

Tabela P-6. Početna tabela za analizu graničnih troškova projekta Construction Co.

| Aktivnost čije se trajanje smanjuje | Troškovi smanjenja trajanja | Dužina putanje |        |          |          |         |         |
|-------------------------------------|-----------------------------|----------------|--------|----------|----------|---------|---------|
|                                     |                             | ABCDGHM        | ABCEHM | ABCEFJKN | ABCEFJLN | ABCIJKN | ABCIJLN |
|                                     |                             | 40             | 31     | 43       | 44       | 41      | 42      |

Pošto je četvrta putanja, prikazana u tabeli P-6, najduža (44 nedelje), jedini način da se skрати vreme trajanja projekta za nedelju dana jeste smanjenje trajanja neke od aktivnosti na datoj putanji za jednu nedelju. Upoređujući troškove skraćanja (NJ/ned.), date u poslednjoj koloni tabele P-5, trajanja aktivnosti na najdužoj putanji uočava se da najmanje troškove skraćanja trajanja za nedelju dana, od 30.000 NJ ima aktivnost *J*. Aktivnost *I* ima iste troškove skraćanja trajanja, ali se ne nalazi na najdužoj putanji. Prema tome, prvi korak u smanjenju vremena trajanja projekta je smanjenje trajanja aktivnosti *J* za jednu nedelju.

Smanjenje trajanja aktivnosti *J* dovodi do smanjenja dužine svake putanje koja u sebi sadrži aktivnost *J* (treća, četvrta, peta i šesta putanja u tabeli P-6) za nedelju dana, kao što je prikazano u drugom redu tabele P-7. Pošto je četvrta putanja i dalje najduža (43 nedelje) isti postupak, nalaženja aktivnosti koja ima najmanje troškove skraćanja vremena trajanja za nedelju dana na datoj putanji, se ponavlja. Ponovo najmanje troškove skraćanja vremena trajanja ima aktivnost *J*, a kako je naznačeno u pretposlednjoj koloni tabele P-5 maksimalno skraćanje trajanja za datu aktivnost je 2 nedelje. Dužine svake od putanja koje sadrže aktivnost *J*, usled njenog ponovnog skraćanja za jednu nedelju, prikazane su u trećem redu tabele P-7.

Posle drugog skraćanja vremena trajanja projekta za nedelju dana, četvrta putanja je i dalje najduža (42 nedelje), ali aktivnost *J* se više ne može skraćivati jer je dostigla svoje *usiljeno* vreme trajanja. Prema tome, za dalje skraćivanje vremena trajanja projekta, potrebno je izabrati novu aktivnost na najdužoj putanji sa sledećim najmanjim troškovima skraćanja trajanja za nedelju dana.

Tabela P-7. Krajnja tabela za analizu graničnih troškova projekta Construction Co.

| Aktivnost čije se trajanje smanjuje | Troškovi smanjenja trajanja (NJ) | Dužina putanje (nedelja)  |               |                 |                 |                |                |
|-------------------------------------|----------------------------------|---|---------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|
|                                     |                                  | <i>ABCDGHM</i>  | <i>ABCEHM</i> | <i>ABCEFJKN</i> | <i>ABCEFJLN</i> | <i>ABCIJKN</i> | <i>ABCIJLN</i> |
|                                     |                                  | 40  | 31            | 43              | 44              | 41             | 42             |
| <i>J</i>                            | 30.000                           | 40  | 31            | 42              | 43              | 40             | 41             |
| <i>J</i>                            | 30.000                           | 40  | 31            | 41              | 42              | 39             | 40             |
| <i>F</i>                            | 40.000                           | 40  | 31            | 40              | 41              | 39             | 40             |
| <i>F</i>                            | 40.000                           | 40  | 31            | 39              | 40              | 39             | 40             |
| $\Sigma$                            | 140.000                          | ukupni troškovi skraćivanja vremena trajanja projekta na 40 nedelja |               |                 |                 |                |                |

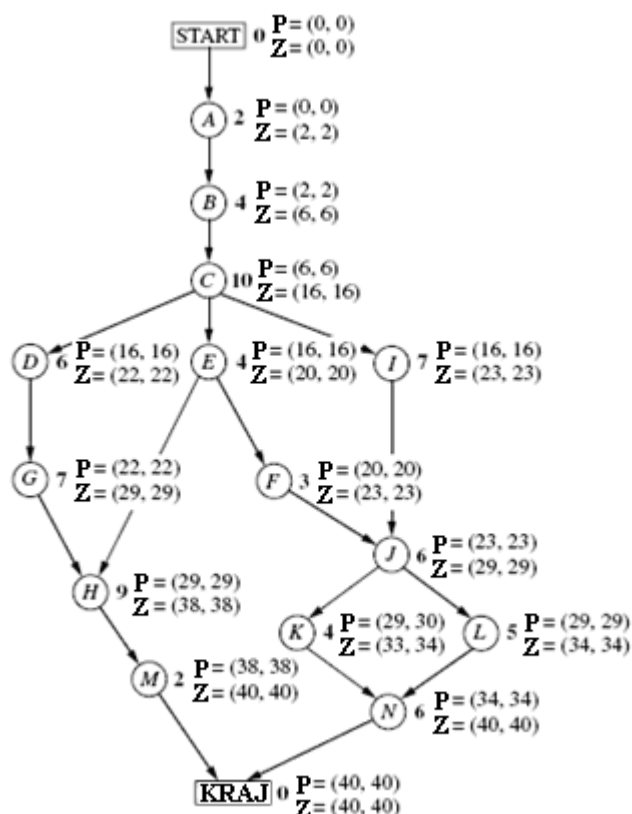
Na osnovu poslednje kolone tabele P-5, od preostalih aktivnosti na najdužoj putanji, najmanje troškove skraćanja vremena trajanja ima aktivnost *F* (40.000 NJ). Pošto se aktivnost *F* skрати za nedelju dana, rezultujuće dužine putanja prikazane su u četvrtom redu tabele P-7. Dužina najduže četvrte putanje je 41 nedelja, što znači da bi se postiglo zahtevano skraćanje vremena trajanja projekta (40 nedelja) potrebno je datu putanju skratiti za još nedelju dana. Kako je maksimalno moguće skraćanje vremena trajanja aktivnosti *F* dve nedelje, to će se ona skratiti za još nedelju dana, čime dostiže svoje *usiljeno* vreme trajanja. Nakon drugog skraćanja

aktivnosti  $F$  za nedelju dana rezultujuće dužine putanja prikazane su u poslednjem redu tabele P-7.

Skraćivanjem vremena trajanja aktivnosti  $J$  i  $F$  na njihovo usiljeno vreme trajanja postignuto je zahtevano vreme trajanja projekta od 40 nedelja, tako da dalje skraćivanje vremena trajanja drugih aktivnosti nije potrebno. Ukupni troškovi skraćivanja vremena trajanja projekta na 40 nedelja iznose 140.000 NJ. Kao što je prikazano u zadnjem redu tabele P-7, tri putanje (prva, četvrta i šesta) su najduže (40 nedelja). Ukoliko bi bilo potrebno dalje skraćivati vreme trajanja projekta morao bi se naći najjeftiniji način da se, za nedelju dana, skrate aktivnosti na sve tri putanje.

Slika P-11 prikazuje mrežni dijagram projekta Construction Co., sa usiljenim vremenom trajanja aktivnosti  $J$  i  $F$  što je dovelo do toga da postoje tri kritična puta kroz mrežni dijagram, dužine 40 nedelja svaki.

Za velike mrežne dijagrame analiza graničnih troškova postaje teško primenljiva jer je teško pronaći i pratiti sve putanje kroz mrežni dijagram. Iz tih razloga umesto analize graničnih troškova metoda CPM koristi *linearno programiranje* za određivanje najjeftinijeg načina za skraćanje vremena trajanja projekta.



Slika P-11. Mrežni dijagram projekta Construction Co., sa usiljenim vremenom trajanja aktivnosti  $J$  i  $F$  (ostale aktivnosti imaju normalno vreme trajanja). Tamnije strelice prikazuju različite kritične puteve u mrežnom dijagramu.

## Primena linearnog programiranja pri donošenju odluka vezanih za skraćivanje vremena trajanja projekta

Problem određivanja najjeftinijeg načina za skraćivanje vremena trajanja projekta može se preformulisati u oblik pogodan za primenu linearnog programiranja (LP) na sledeći način:

**Postavka problema u formi LP:** Neka funkcija  $Z$  predstavlja ukupne troškove smanjenja vremena trajanja aktivnosti. Problem se tada sastoji u minimizaciji funkcije  $Z$ , pri ograničenju da vreme potrebno za izvršenje projekta mora biti manje ili jednako nekom unapred zadatom vremenu

Promenljive čije vrednosti je potrebno optimizirati su:

$x_j$  = smanjenje vremena trajanja aktivnosti  $j$  pri skraćivanju vremena trajanja projekta,  $j = A, B, \dots, N$ .

Korišćenjem podataka iz poslednje kolone tabele P-5, funkcija cilja koju treba minimizovati ima sledeći oblik:

$$Z = 100,000 \cdot x_A + 50,000 \cdot x_B + \dots + 60,000 \cdot x_N.$$

Svaka od 14 promenljivih sa desne strane znaka jednakosti mora biti nenegativna i ne sme da uzme vrednost veću od maksimalno moguće, date u pretposlednjoj koloni tabele P-5.

Ograničenje da vreme potrebno za završetak projekta mora biti manje ili jednako nekom unapred zadatom vremenu (40 nedelja) uvodi se na sledeći način:

$y_{KRAJ}$  = vreme trajanja projekta, tj. vreme dostizanja čvorišta KRAJ u mrežnom dijagramu projekta.

Ograničenje vremena trajanja projekta Construction Co. je:

$$y_{KRAJ} \leq 40.$$

Da bi se u modelu definisale međuzavisnosti aktivnosti, odnosno dodelila odgovarajuća vrednost promenljivoj  $y_{KRAJ}$ , uzimajući u obzir  $x_A, x_B, \dots, x_N$ , potrebno je uvesti sledeće dodatne promenljive u model:

$y_j$  = vreme početka aktivnosti  $j$  (za  $j = B, C, \dots, N$ ), uzimajući u obzir  $x_A, x_B, \dots, x_N$ .

Za aktivnost A ova vrsta promenljive nije potrebna, pošto sa njom počinje projekat i automatski joj se dodeljuje vrednost 0, tj.  $y_A = 0$ . Slično, pošto se čvorište KRAJ tretira kao fiktivna aktivnost (aktivnost čije je trajanje jednako nuli), definicija  $y_j$  za aktivnost KRAJ je u skladu sa definicijom  $y_{KRAJ}$  datom u prethodnom paragrafu.

Vreme početka svake od aktivnosti (uključujući i aktivnost KRAJ) je direktno povezano sa vremenom početka i trajanjem svake od njenih neposredno prethodnih aktivnosti, na sledeći način:

Za svaku aktivnost ( $B, C, \dots, N, \text{KRAJ}$ ) i svaku od njenih neposredno prethodnih aktivnosti važi: Vreme početka aktivnosti  $\geq$  (vreme početka + trajanje) date neposredno prethodne aktivnosti.

Osim toga korišćenjem normalnih vremena trajanja aktivnosti, datih u tabeli P-5, trajanje svake od aktivnosti se definiše sledećom formulom:

Trajanje aktivnosti  $j =$  njeno normalno vreme trajanja  $- x_j$ ,

Radi ilustracije gore navedenih relacija, razmotriće se aktivnost  $F$  mrežnog dijagrama projekta Construction Co. (slika P-11).

Neposredno prethodna aktivnost aktivnosti  $F$ :

Aktivnost  $E$ , čije je trajanje  $= 4 - x_E$ .

Povezanost između ovih aktivnosti se definiše na sledeći način:

$$y_F \geq y_E + 4 - x_E.$$

Prema tome, aktivnost  $F$  ne može da počne dok ne počne i ne završi se aktivnost  $E$  u trajanju od:  $4 - x_E$ .

Povezanost aktivnosti  $J$ , koja ima dve neposredno prethodne aktivnosti, sa njenim neposredno prethodnim aktivnostima se definiše na sledeći način:

Neposredno prethodna aktivnost aktivnosti  $J$ :

Aktivnost  $F$ , čije je trajanje  $= 5 - x_F$ .

Aktivnost  $I$ , čije je trajanje  $= 7 - x_I$ .

Povezanost između ovih aktivnosti se definiše na sledeći način:

$$y_J \geq y_F + 5 - x_F,$$

$$y_J \geq y_I + 7 - x_I.$$

Prethodne dve nejednačine kažu da aktivnost  $J$  ne može da počne dok se obe njene neposredno prethodne aktivnosti ne završe.

Uvođenjem prikazanih relacija za sve aktivnosti kao ograničenja, moguće je u potpunosti definisati model linearnog programiranja, na sledeći način:

$$\text{Minimizovati } Z = 100,000 \cdot x_A + 50,000 \cdot x_B + \dots + 60,000 \cdot x_N.$$

pri datim ograničenjima:

**1. Ograničenja vezana za maksimalno moguće skraćanje trajanja aktivnosti:**

Korišćenjem podataka datih u pretposlednjoj koloni tabele P-5,

$$x_A \leq 1, x_B \leq 2, \dots, x_N \leq 3.$$

**2. Uslovi nenegativnosti:**

$$x_A \geq 0, x_B \geq 0, \dots, x_N \geq 0$$

$$y_B \geq 0, y_C \geq 0, \dots, y_N \geq 0, y_{KRAJ} \geq 0.$$

**3. Ograničenja vezana za početak aktivnosti:**

Za svaku od aktivnosti (osim za aktivnost A koja je početna aktivnost projekta) koja ima jednu neposredno prethodnu aktivnost (aktivnosti B, C, D, E, F, G, I, K, L, M) postavlja se po jedno ograničenje ove vrste, dok se za aktivnosti koje imaju dve neposredno prethodne aktivnosti (aktivnosti H, J, N, KRAJ) postavljaju po dva ograničenja ove vrste.

Jedna neposredno prethodna aktivnost

$$y_B \geq 0 + 2 - x_A$$

$$y_C \geq y_B + 4 - x_B$$

$$y_D \geq y_C + 10 - x_C$$

.....

$$y_M \geq y_H + 9 - x_H$$

Dve neposredno prethodne aktivnosti

$$y_H \geq y_G + 7 - x_G$$

$$y_H \geq y_E + 4 - x_E$$

.....

$$y_{KRAJ} \geq y_M + 2 - x_M$$

$$y_{KRAJ} \geq y_N + 6 - x_N$$

**4. Ograničenje vezano za željeno (zadato) vreme trajanja projekta:**

$$y_{KRAJ} \leq 40.$$

Određivanje najjeftinijeg načina za skraćanje vremena trajanja projekta primenom linearnog programiranja (LP), korišćenjem programa **QSopt**, vrši se na sledeći način:

**1. U prozor „LP Input“ treba uneti sledeće:**

Problem

PERT/CPM

Minimize

$$\text{obj: } 100000x_A + 50000x_B + 80000x_C + 40000x_D + 160000x_E + 40000x_F + 40000x_G + 60000x_H + 30000x_I + 30000x_J + 40000x_K + 50000x_L + 100000x_M + 60000x_N$$

Subject

$$c1: y_B + x_A \geq 2$$

$$y_C + x_B - y_B \geq 4$$

$$y_D + x_C - y_C \geq 10$$

$$y_E + x_C - y_C \geq 10$$

$$y_I + x_C - y_C \geq 10$$

$$y_G + x_D - y_D \geq 6$$

$$y_F + x_E - y_E \geq 4$$

$$y_K + x_J - y_J \geq 8$$

$$y_L + x_J - y_J \geq 8$$

$$y_M + x_H - y_H \geq 9$$

$$y_H + x_G - y_G \geq 7$$

$$y_H + x_E - y_E \geq 4$$

$$y_J + x_I - y_I \geq 7$$

```

yJ+xF-yF>=5
yN+xK-yK>=4
yN+xL-yL>=5
yKRAJ+xM-yM>=2
yKRAJ+xN-yN>=6
Bounds
xA<=1
xB<=2
xC<=3
xD<=2
xE<=1
xF<=2
xG<=3
xH<=3
xI<=2
xJ<=2
xK<=1
xL<=2
xM<=1
xN<=3
yKRAJ<=40
End

```

2. Sa horizontalnog menija izabrati „Solver“ i opciju „Solve“ ili (Ctrl+R) ili izabrati ikonicu „go“, nakon čega će se, u prozoru „*Solution*“ pojaviti se sledeće:

```

PERT/CPM Objective:
140000.00000
Primal Solution Values:
xF = 2.00000
xJ = 2.00000
yB = 2.00000
yC = 6.00000
yD = 16.00000
yE = 16.00000
yI = 16.00000
yG = 22.00000
yF = 20.00000
yK = 30.00000
yJ = 23.00000
yL = 29.00000
yM = 38.00000
yH = 29.00000
yN = 34.00000
yKRAJ = 40.00000

```

Potrebno je napomenuti da oblik nejednakosti  $\geq$ , u ograničenjima vezanim za početak aktivnosti, dozvoljava da aktivnosti ne počnu odmah po završetku neposredno prethodnih aktivnosti. Takva vrsta kašnjenja početka izvršenja aktivnosti je moguća samo za one aktivnosti koje imaju vremensku rezervu. Svako nepotrebno kašnjenje početka aktivnosti na kritičnom putu ne može biti optimalno i uslovljava nove troškove vezane za smanjenje trajanja aktivnosti u cilju postizanja željenog vremena trajanja projekta. Zato, optimalno rešenje postavljenog modela neće imati takvu vrstu kašnjenja početka aktivnosti na kritičnom putu.

Dobijeno rešenje pokazuje da aktivnost *K* ne počinje odmah po završetku njene jedine neposredno prethodne aktivnosti *J*, tj. aktivnost *K* počinje u 30-oj nedelji iako se aktivnost *J* završava u 29-oj nedelji, ali to ne utiče na optimalno rešenje jer aktivnost *K* nije na kritičnom putu. Dobijeno rešenje odgovara mrežnom dijagramu prikazanom na slici P-11 koji je dobijen primenom analize graničnih troškova.

## **Planiranje i kontrola troškova projekta u vremenu**

Za praćenje tekućih troškova koristi se deo metode PERT/CPM, posebno dizajniran za ove svrhe, nazvan PERT/Cost (PERT/Troškovi).

**PERT/Cost** je sistemska procedura dizajnirana da pomogne pri planiranju, određivanju redosleda izvršenja aktivnosti i upravljanju troškovima tj. praćenju tekućih troškova projekta.

Procenjeni troškovi aktivnosti, projekta Construction Co., odnose na normalno vreme trajanja aktivnosti i dati su u četvrtoj koloni tabele P-5. Ovi troškovi takođe su prikazani i u tabeli P-8, koja pored datih troškova – *budžeta projekta* sadrži i procenjena vremena trajanja aktivnosti (takođe data u tabeli P-5 – *Normalno* vreme trajanja). Deljenjem procenjenih troškova, potrebnih za izvršenje kompletne aktivnosti, sa procenjenim (normalnim) vremenom trajanja aktivnosti dobijaju se troškovi izvršenja aktivnosti po jedinici trajanja (nedelja).

*Drugim rečima, budžet projekta se dobija se kada se saberu troškovi izvođenja svih aktivnosti projekta.*

**Pretpostavka:** Uobičajena pretpostavka, kada se koristi procedura PERT/Cost, je da se troškovi izvođenja aktivnosti javljaju sa konstantnim intenzitetom tokom izvođenja (trajanja) aktivnosti. Drugim rečima to znači da su troškovi izvođenja aktivnosti ravnomerno raspoređeni po jedinicama vremena trajanja aktivnosti (nedelja). Procenjeni nedeljni troškovi svake od aktivnosti prikazani su u desnoj koloni tabele P-8.

Kada se procedura PERT/Cost primenjuje kod projekata sa velikim brojem aktivnosti, uobičajeno je da se srodne aktivnosti svrstaju u odgovarajuće grupe (work package). U tom slučaju, dalja analiza budžeta projekta i planiranje realizacije troškova projekta u vremenu, se sprovodi sa formiranim grupama aktivnosti a ne sa pojedinačnim aktivnostima.



Tabela P-8. Budžet projekta Construction Co.

| Aktivnost | Procenjeno vreme trajanja (nedelja) | Procenjeni troškovi (NJ) | Troškovi po nedelji trajanja aktivnosti (NJ/ned.) |
|-----------|-------------------------------------|--------------------------|---|
| A         | 2                                   | 180.000                  | 90.000  |
| B         | 4                                   | 320.000                  | 80.000  |
| C         | 10                                  | 620.000                  | 62.000  |
| D         | 6                                   | 260.000                  | 43.333  |
| E         | 4                                   | 410.000                  | 102.500   |
| F         | 5                                   | 180.000                  | 36.000  |
| G         | 7                                   | 900.000                  | 128.571   |
| H         | 9                                   | 200.000                  | 22.222  |
| I         | 7                                   | 210.000                  | 30.000  |
| J         | 8                                   | 430.000                  | 53.750  |
| K         | 4                                   | 160.000                  | 40.000  |
| L         | 5                                   | 250.000                  | 50.000  |
| M         | 2                                   | 100.000                  | 50.000  |
| N         | 6                                   | 330.000                  | 55.000  |

### Planiranje realizacije troškova projekta u vremenu – praćenje tekućih troškova projekta

Korišćenjem procedure PERT/Cost moguće je odrediti troškove izvršenja projekta za svaku nedelju trajanja projekta. Koristeći desnu kolonu tabele P-8, prvo se određuju nedeljni (tekući) troškovi izvršenja projekta pod pretpostavkom da je vreme početka svake aktivnosti projekta jednako vremenu njenog najranijeg početka. Nakon toga, da bi se odredilo koliko je moguće odložiti plaćanje pojedinih troškova, određuju se nedeljni (tekući) troškovi izvršenja projekta pod pretpostavkom da je vreme početka svake aktivnosti projekta jednako vremenu njenog najkasnijeg početka.

Na slici P-12 prikazana je primena procedure PERT/Cost, korišćenjem Microsoft Excel-a (u donjem delu slike prikazane su formule koje unose u odgovarajuće ćelije Excel tabele). (MS Project može da generiše u osnovi istu vrstu informacija izborom opcije *Table: Cost* sa horizontalnog menija *View* i nakon toga sa horizontalnog menija *Report* opciju *Reports*, pa *Costs* i na kraju *Cash Flow report*.) Slika P-12 prikazuje troškove, u početnim nedeljama, izvršenja projekta Construction Co. bazirane na vremenima najranijeg početka aktivnosti. Kolone B, C i D su preuzete iz tabele P-8 (prve tri kolone). Slika P-13 prikazuje istu Excel tabelu (primer) za period od 17-te do 25-e nedelje. Kako aktivnosti D, E i I imaju vreme najranijeg početka po završenoj 16-oj nedelji (16 nedelja posle početka projekta), sve one počinju u 17-oj nedelji, dok aktivnosti F i G počinu kasnije u prikazanom periodu. Kolone od W do AE prikazuju nedeljne troškove (u NJ) svake od ovih aktivnosti, prikazane u koloni F (slika P-12), tokom trajanja date

aktivnosti (kolona C, slika P-12). Red 22 prikazuje nedeljne troškove izvršenja aktivnosti, iz nedelje u nedelju.

|    | A                      | B        | C         | D         | E                       | F               | G     | H      | I   |
|----|------------------------|----------|-----------|-----------|-------------------------|-----------------|-------|--------|-----|
| 1  | Template for PERT/Cost |          |           |           |                         |                 |       |        |     |
| 2  |                        |          |           |           |                         |                 |       |        |     |
| 3  |                        |          | Estimated |           |                         |                 |       |        |     |
| 4  |                        |          | Duration  | Estimated | Start                   | Cost Per Week   | Week  | Week   | ... |
| 5  |                        | Activity | (weeks)   | Cost      | Time                    | of Its Duration | 1     | 2      |     |
| 6  |                        | A        | 2         | \$180,000 | 0                       | \$90,000        | 90000 | 90000  |     |
| 7  |                        | B        | 4         | \$320,000 | 2                       | \$80,000        | 0     | 0      |     |
| 8  |                        | C        | 10        | \$620,000 | 6                       | \$62,000        | 0     | 0      |     |
| 9  |                        | D        | 6         | \$260,000 | 16                      | \$43,333        | 0     | 0      | ... |
| 10 |                        | E        | 4         | \$410,000 | 16                      | \$102,500       | 0     | 0      |     |
| 11 |                        | F        | 5         | \$180,000 | 20                      | \$36,000        | 0     | 0      |     |
| 12 |                        | G        | 7         | \$900,000 | 22                      | \$128,571       | 0     | 0      |     |
| 13 |                        | H        | 9         | \$200,000 | 29                      | \$22,222        | 0     | 0      | ... |
| 14 |                        | I        | 7         | \$210,000 | 16                      | \$30,000        | 0     | 0      |     |
| 15 |                        | J        | 8         | \$430,000 | 25                      | \$53,750        | 0     | 0      |     |
| 16 |                        | K        | 4         | \$160,000 | 33                      | \$40,000        | 0     | 0      |     |
| 17 |                        | L        | 5         | \$250,000 | 33                      | \$50,000        | 0     | 0      | ... |
| 18 |                        | M        | 2         | \$100,000 | 38                      | \$50,000        | 0     | 0      |     |
| 19 |                        | N        | 6         | \$330,000 | 38                      | \$55,000        | 0     | 0      |     |
| 20 |                        |          |           |           |                         |                 | 0     | 0      |     |
| 21 |                        |          |           |           |                         |                 |       |        |     |
| 22 |                        |          |           |           | Weekly Project Cost     |                 | 90000 | 90000  | ... |
| 23 |                        |          |           |           | Cumulative Project Cost |                 | 90000 | 180000 | ... |
| 24 |                        |          |           |           |                         |                 |       |        |     |
| 25 |                        |          | Data      |           |                         |                 |       |        |     |
| 26 |                        |          | Results   |           |                         |                 |       |        |     |

|    | F      | G                              | H                              | I   |
|----|--------|--------------------------------|--------------------------------|-----|
| 6  | =D6/C6 | =IF(AND(G5>E6,G5<=E6+C6),F6,0) | =IF(AND(H5>E6,H5<=E6+C6),F6,0) |     |
| 7  | =D7/C7 | =IF(AND(G5>E7,G5<=E7+C7),F7,0) | =IF(AND(H5>E7,H5<=E7+C7),F7,0) |     |
| 8  | =D8/C8 | =IF(AND(G5>E8,G5<=E8+C8),F8,0) | =IF(AND(H5>E8,H5<=E8+C8),F8,0) |     |
| 9  | =D9/C9 | =IF(AND(G5>E9,G5<=E9+C9),F9,0) | =IF(AND(H5>E9,H5<=E9+C9),F9,0) | ... |
| 10 | :      | :                              | :                              |     |
| 11 | :      | :                              | :                              |     |
| 21 |        |                                |                                |     |
| 22 |        | =SUM(G6:G20)                   | =SUM(H6:H20)                   | ... |
| 23 |        | =G22                           | =G23+H22                       | ... |

Slika P-12. Primena procedure PERT/Cost, za projekat Construction Co. za vremena najranijeg početka aktivnosti.

Red 23, Excel tabele, (slike P-12 i 13) prikazuje ukupne troškove izvršenja projekta od prve nedelje pa do posmatrane nedelje. Npr. pre 17-te nedelje, aktivnosti A, B i C su u potpunosti završene ali nijedna druga aktivnost nije počela, tako da su ukupni troškovi projekta za prvih 16 nedelja projekta (treća kolona tabele P-8)  $180,000 + 320,000 + 620,000 = 1,120,000$  NJ. Dodavanjem troškova za izvršenje aktivnosti u 17-oj nedelji dobijaju se ukupni troškovi projekta za prvih 17 nedelja izvršenja projekta  $1,120,000 + 175,833 = 1,295,833$  NJ.

Prema tome, slika P-13 (proširena sa ranijim i kasnijim nedeljama) prikazuje koliko je potrebno novca da se pokriju troškovi izvršenja projekta iz nedelje u nedelju (tekući troškovi), kao i ukupne troškove projekta od prve do posmatrane nedelje, pod pretpostavkom izvršenja projekta sa najranijim vremenom početka aktivnosti.

|    | A                      | B        | E     | W       | X       | Y       | Z       | AA      | AB      | AC      | AD      | AE     |
|----|------------------------|----------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| 1  | Template for PERT/Cost |          |       |         |         |         |         |         |         |         |         |        |
| 2  |                        |          |       |         |         |         |         |         |         |         |         |        |
| 3  |                        |          |       |         |         |         |         |         |         |         |         |        |
| 4  |                        |          | Start | Week    | Week    | Week    | Week    | Week    | Week    | Week    | Week    | Week   |
| 5  |                        | Activity | Time  | 17      | 18      | 19      | 20      | 21      | 22      | 23      | 24      | 25     |
| 6  |                        | A        | 0     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      |
| 7  |                        | B        | 2     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      |
| 8  |                        | C        | 6     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      |
| 9  |                        | D        | 16    | 43333.3 | 43333.3 | 43333.3 | 43333.3 | 43333.3 | 43333.3 | 0       | 0       | 0      |
| 10 |                        | E        | 16    | 102500  | 102500  | 102500  | 102500  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      |
| 11 |                        | F        | 20    | 0       | 0       | 0       | 0       | 36000   | 36000   | 36000   | 36000   | 36000  |
| 12 |                        | G        | 22    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 128571  | 128571  | 128571 |
| 13 |                        | H        | 29    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      |
| 14 |                        | I        | 16    | 30000   | 30000   | 30000   | 30000   | 30000   | 30000   | 30000   | 0       | 0      |
| 15 |                        | J        | 25    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      |
| 16 |                        | K        | 33    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      |
| 17 |                        | L        | 33    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      |
| 18 |                        | M        | 38    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      |
| 19 |                        | N        | 38    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0      |
| 21 |                        |          |       |         |         |         |         |         |         |         |         |        |
| 22 | Weekly Project Cost=   |          |       | 175833  | 175833  | 175833  | 175833  | 109333  | 109333  | 194571  | 164571  | 164571 |
| 23 | Cum. Project Cost=     |          |       | 1295833 | 1471667 | 1647500 | 1823333 | 1932667 | 2042000 | 2236571 | 2401143 | 256571 |

Slika P-13. Nastavak Excel tabele sa slike P-12 za nedelje 17 do 25.

Dalje, procedure PERT/Cost na isti način određuje odgovarajuće informacije u slučaju kada je vreme početka svake aktivnosti jednako vremenu njenog najkasnijeg početka. Vremena najkasnijeg početka aktivnosti prvi put su prikazana na slici P-6, ponovo su prikazana u koloni *E* tabele na slici P-14. Ostale kolone tabele se generišu na isti način kao i na slikama P-12 i 13. Npr., kako aktivnost *D* ima vreme najkasnijeg početka po završenoj 20-oj nedelji (nasuprot vremena najranijeg početka po završenoj 16-oj nedelji), njeni nedeljni troškovi izvršenja, u iznosu od 43.333 NJ/nedeljno, počinu u 21-oj nedelji za razliku od prethodnog slučaja (najranije vreme početka) kada počinu u 17-oj nedelji. Slično, aktivnost *G* ima vreme najkasnijeg početka po završenoj 26-oj nedelji, tako da njeni nedeljni troškovi nisu prikazani na slici P-14.

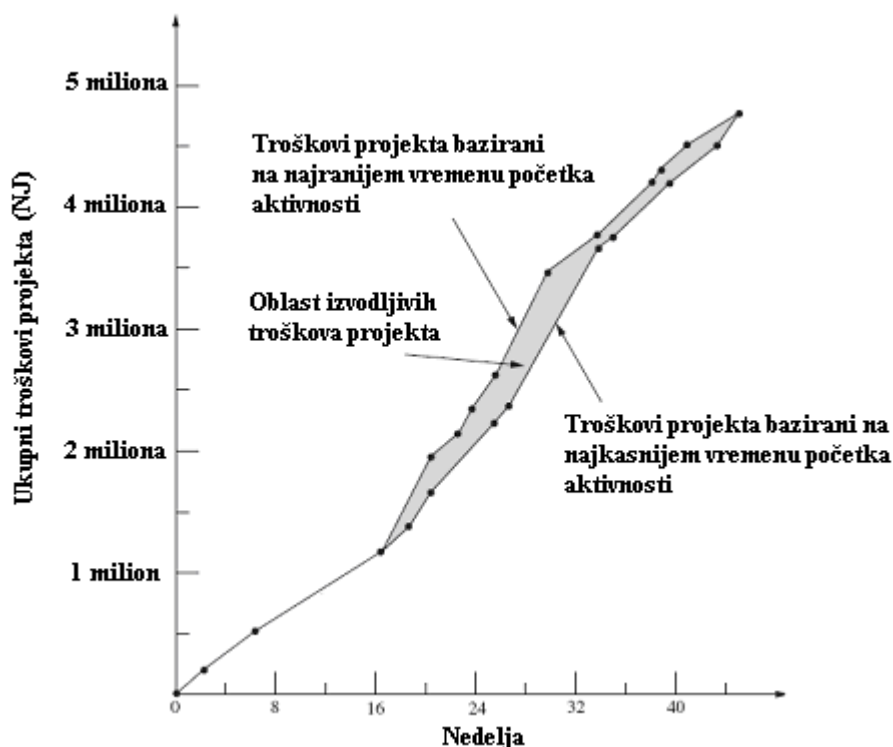
Slika P-14 (proširena sa ranijim i kasnijim nedeljama) prikazuje nedeljne (tekuće) i ukupne troškove izvršenja projekta u slučaju da se odloži svaka od aktivnosti koliko je to moguće a da se pri tome ne odloži planirano vreme završetka projekta (pretpostavljajući da se neplanirana kašnjenja neće dogoditi). Poređenje 23-ćeg reda na slikama P-13 i P-14 pokazuje da se znatna *privremena* ušteda može postići ovim odlaganjem početka aktivnosti, što je veoma dobro ukoliko kompanija ima problema sa nedostatkom novca. Međutim, ovakvo odlaganje početka izvršenja aktivnosti nije preporučljivo koristiti zato što će ona potrošiti postojeću vremensku rezervu koja, u nekim slučajevima, može da se iskoristiti da se spreči odlaganje završetka projekta ako se pri izvršavanju neke od aktivnosti dogode neplanirana kašnjenja.

|    | A                      | B        | E     | W       | X       | Y       | Z       | AA      | AB      | AC      | AD      | AE      |
|----|------------------------|----------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1  | Template for PERT/Cost |          |       |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
| 2  |                        |          |       |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
| 3  |                        |          |       |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
| 4  |                        |          | Start | Week    | Week    | Week    | Week    | Week    | Week    | Week    | Week    | Week    |
| 5  |                        | Activity | Time  | 17      | 18      | 19      | 20      | 21      | 22      | 23      | 24      | 25      |
| 6  |                        | A        | 0     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 7  |                        | B        | 2     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 8  |                        | C        | 6     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 9  |                        | D        | 20    | 0       | 0       | 0       | 0       | 43333.3 | 43333.3 | 43333.3 | 43333.3 | 43333.3 |
| 10 |                        | E        | 16    | 102500  | 102500  | 102500  | 102500  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 11 |                        | F        | 20    | 0       | 0       | 0       | 0       | 36000   | 36000   | 36000   | 36000   | 36000   |
| 12 |                        | G        | 26    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 13 |                        | H        | 33    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 14 |                        | I        | 18    | 0       | 0       | 30000   | 30000   | 30000   | 30000   | 30000   | 30000   | 30000   |
| 15 |                        | J        | 25    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 16 |                        | K        | 34    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 17 |                        | L        | 33    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 18 |                        | M        | 42    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 19 |                        | N        | 38    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 20 |                        |          |       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 21 |                        |          |       |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
| 22 | Weekly Project Cost=   |          |       | 102500  | 102500  | 132500  | 132500  | 109333  | 109333  | 109333  | 109333  | 109333  |
| 23 | Cum. Project Cost=     |          |       | 1222500 | 1325000 | 1457500 | 1590000 | 1699333 | 1808667 | 1918000 | 2027333 | 2136667 |

Slika P-14. Primena procedure PERT/Cost, za projekat Construction Co., u periodu od 17-te do 25-te nedelje, za vremena najkasnijeg početka aktivnosti.

Da bi se bolje vizuelno uporedile vrednosti ukupnih troškova projekta (23-ći red u Excel tabelama na slikama P-13 i 14), pogodno je prikazati vrednosti iz ova dva reda na dijagramu za sve 44 nedelje trajanja projekta, kao što je prikazano na slici P-15. Pošto su vremena najranijih i najkasnijih početaka prve tri aktivnosti A, B i C ista, što obuhvata prvih 16 nedelja, ukupni troškovi projekta su isti za oba slučaja početka aktivnosti u posmatranom periodu. Posle 16-te nedelje, dobijaju se dve odvojene krive troškova koje prikazuju razliku između 23-ćih redova u Excel tabelama na slikama P-13 i P-14. Pošto praćenje bilo koje krive ukupnih troškova, zavisno od početka aktivnosti (najranijeg ili najkasnijeg), dovodi do završetka projekta po isteku 44 nedelje, dve krive troškova se ponovo spajaju u toj (krajnjoj) tački sa ukupnim troškovima projekta od 4.55 miliona NJ. Tačke na svakoj od krivih prikazuju nedelje kada se nedeljni (tekući) troškovi projekta menjaju.

Vremena početaka i troškovi izvršenja aktivnosti na osnovu kojih je nacrtan dijagram na slici P-15 su samo procene onoga što će se stvarno dogoditi. Međutim, slika P-15 daje *najbolju prognozu* ukupnih troškova projekta iz nedelje u nedelju bilo da se prati plan izvršenja aktivnosti prema najranijim ili najkasnijim vremenima početka aktivnosti. Izborom bilo kojeg plana izvršenja aktivnosti, ova najbolja prognoza postaje *budžet* projekta koga se treba, što je moguće striktnije, pridržavati. Budžet projekta u šrafiranoj oblasti, između dve krive troškova, takođe se može ostvariti ako se usvoji plan početka svake od aktivnosti koji je između najranijeg i najkasnijeg vremena početka. *Izvodljivi* budžeti za planiranje završetka projekta u roku od 44 nedelje (bez dodatnog skraćanja trajanja aktivnosti) nalaze se u šrafiranoj oblasti ili na jednoj od krivih troškova.



Slika P-15. Prikaz ukupnih troškova projekta za najranija vremena početaka svih aktivnosti (gornja kriva troškova) kao i za najkasnija vremena početaka svih aktivnosti (donja kriva troškova)

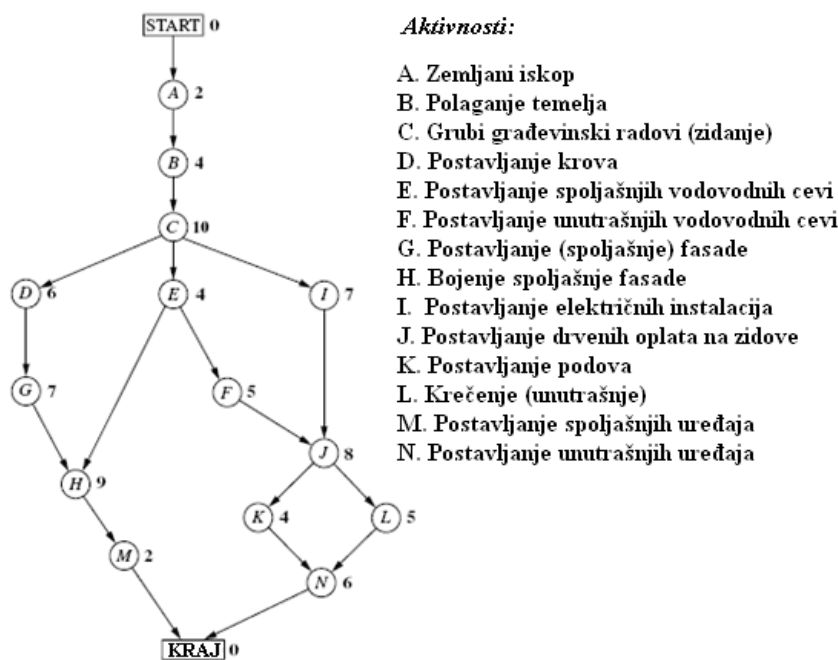
## Određivanje verovatnoće završetka projekta primenom simulacije

Grubu procenu verovatnoće završetka projekta za dati plan (redosled) aktivnosti moguće je odrediti primenom PERT metode koja se zasniva na tri aproksimacije koje omogućuju (pojednostavljaju) izračunavanje ove verovatnoće. Zbog uvedenih aproksimacija, procena verovatnoće završetka projekta je uvek optimistička, što može navesti projektni tim da donese neke pogrešne odluke.

U današnjoj projektantskoj praksi postalo je uobičajeno da se verovatnoća završetka projekta određuje primenom simulacije. Postupak simulacije u ovom slučaju podrazumeva određivanje vremena trajanja aktivnosti preko generisanja slučajnih brojeva na osnovu raspodela vremena trajanja pojedinih aktivnosti projekta. Koristeći mrežni dijagram projekta tj. redosled i međuzavisnost aktivnosti, simulacijom se određuje kad koja aktivnost počinje odnosno kad se završava i konačno kad se završava projekat. Ponavljanjem postupka simulacije hiljadama puta (u jednom eksperimentu), moguće je odrediti verovatnoću završetka projekta sa zadovoljavajućom tačnošću.

Kratko podsećanje vezano za primer, preduzeće Construction Co. je pobedilo na tenderu i postalo glavni izvođač u izgradnji nove fabrike. Između ostalog ugovor sadrži velike penale ukoliko izgradnja ne bude završena u roku od 47 nedelja. U

tom smislu osnovni element za evaluaciju alternativnih planova izgradnje jeste verovatnoća završetka do zadatog roka. U usvojenom izvođačkom projektu postoji 14 velikih aktivnosti čiji je raspored i međuzavisnost prikazana na slici P-16.



Slika P-16. Mrežni dijagram projekta.

Broj pored aktivnosti u mrežnom dijagramu projekta predstavlja očekivano vreme trajanja aktivnosti u nedeljama, ako se aktivnost izvodi na normalan način. Najduža putanja u mrežnom dijagramu, kritičan put, iznosi 44 nedelje. Kako je vreme trajanja projekta jednako vremenu trajanja najdužeg putanje u mrežnom dijagramu zaključuje se da se projekat može završiti za 44 nedelje, 3 nedelje pre roka.

Kako su vremena trajanja aktivnosti pretpostavljena kao očekivane vrednosti određene iskustveno, postoji velika neizvesnost u vezi sa stvarnim trajanjem aktivnosti pa samim tim i sa trajanjem čitavog projekta. Drugim rečima postoji mogućnost da se vreme trajanja projekta značajno razlikuje od 44 nedelje pa čak i da premaši krajnji rok od 47 nedelja.

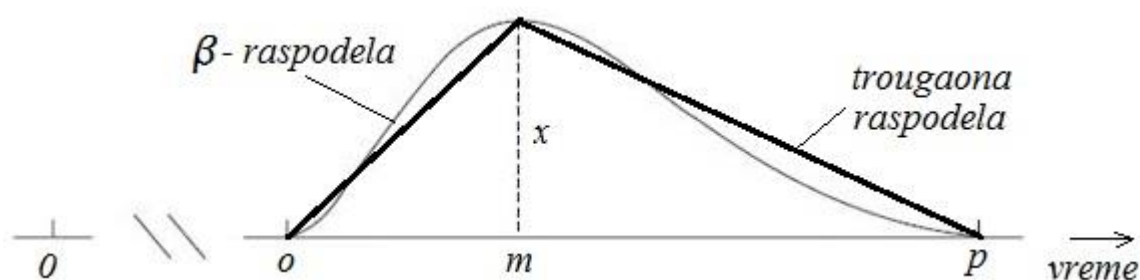
Iz tih razloga se uvodi neizvesnost u vremena trajanja aktivnosti. Trajanje aktivnosti se definiše preko tri vremena i to: optimističkog (*o*), najverovatnijeg (*m*) i pesimističkog (*p*) vremena trajanja (vidi tabelu P-9). Takođe uvodi se pretpostavka da se trajanje svih aktivnosti ponaša po zakonu Beta raspodele. Ovako definisana vremena trajanja aktivnosti uz tri aproksimacije koje uvodi metoda PERT omogućuju da se analitički odredi gruba procena verovatnoće završetka projekta do zadatog roka.

Tabela P-9. Optimistička, najverovatnija i pesimistička vremena trajanja aktivnosti.

| Aktivnost | Optimističko vreme<br>$o$ | Najverovatnije vreme<br>$m$ | Pesimističko vreme<br>$p$ |
|-----------|---------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| A         | 1                         | 2                           | 3                         |
| B         | 2                         | $3\frac{1}{2}$              | 8                         |
| C         | 6                         | 9                           | 18                        |
| D         | 4                         | $5\frac{1}{2}$              | 10                        |
| E         | 1                         | $4\frac{1}{2}$              | 5                         |
| F         | 4                         | 4                           | 10                        |
| G         | 5                         | $6\frac{1}{2}$              | 11                        |
| H         | 5                         | 8                           | 17                        |
| I         | 3                         | $7\frac{1}{2}$              | 9                         |
| J         | 3                         | 9                           | 9                         |
| K         | 4                         | 4                           | 4                         |
| L         | 1                         | $5\frac{1}{2}$              | 7                         |
| M         | 1                         | 2                           | 3                         |
| N         | 5                         | $5\frac{1}{2}$              | 9                         |

Prednosti određivanja verovatnoće završetka projekta primenom simulacije su sledeće: nije potrebno uvoditi aproksimacije kao kod analitičkog određivanja i velika fleksibilnost u izboru raspodele vremena trajanja aktivnosti.

Najčešće se za generisanje vremena trajanja aktivnosti koristi trougaona raspodela. Veza između beta raspodele, trougaone raspodele i optimističkog ( $o$ ), najverovatnijeg ( $m$ ) i pesimističkog ( $p$ ) vremena trajanja aktivnosti data je na slici P-17.



Slika P-17. Raspodele vremena trajanja aktivnosti.

Da bi se dobio izraz za slučajni broj generisan po trougaonoj raspodeli potrebno je primeniti *metodu inverzne transformacije*. Kao prvo potrebno je odrediti gustinu trougaone raspodele. Kako površina ispod krive gustine trougaone raspodele mora biti jednaka 1 (interval između  $o$  i  $p$ ), veličina  $x$  ima sledeću vrednost:

$$\frac{1}{2} \cdot (m - o) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (p - m) \cdot x = 1 \rightarrow x = \frac{2}{p - o},$$

odakle se dobija gustina trougaone raspodele kao:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{2}{p-o} \cdot \frac{t-o}{m-o}, & 0 \leq t \leq m \\ \frac{2}{p-o} \cdot \left(1 - \frac{t-m}{p-m}\right), & m \leq t \leq p \\ 0, & t > p \end{cases}$$

Funkcija trougaone raspodele je sledeća:

$$F(t) = \int_0^t f(t) \cdot dt = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{(t-o)^2}{(p-o) \cdot (m-o)}, & 0 \leq t \leq m \\ 2 \cdot \frac{t-m}{p-o} - \frac{(t-m)^2}{(p-o) \cdot (p-m)}, & m \leq t \leq p \\ 0, & t > p \end{cases}$$

Inverzna funkcija trougaone raspodele, tj. izraz za izračunavanje slučajnog broja generisanog po trougaonoj raspodeli, za  $o < m < p$ , je sledećeg oblika:

$$F^{-1}(r) = t = \begin{cases} o + \sqrt{r \cdot (p-o) \cdot (m-o)}, & 0 \leq r \leq \frac{m-o}{p-o} \\ p - \sqrt{(1-r) \cdot (p-m) \cdot (p-o)}, & \frac{m-o}{p-o} \leq r \leq 1 \end{cases}$$

gde je  $r$  slučajan broj generisan po ravnomernoj raspodeli u intervalu od 0 do 1.

U slučaju da je  $o < m = p$  izraz za izračunavanje slučajnog broja generisanog po trougaonoj raspodeli je sledećeg oblika:

$$F^{-1}(r) = t = o + (m-o) \cdot \sqrt{r}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

U slučaju da je  $o = m < p$  izraz za izračunavanje slučajnog broja generisanog po trougaonoj raspodeli je sledećeg oblika:

$$F^{-1}(r) = t = p - (p-m) \cdot \sqrt{1-r}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Kada je  $o = m = p = \text{const.}$ , slučajan broj je konstanta tj.  $t = \text{const.}$  za  $0 \leq r \leq 1$ .

U zavisnosti od odnosa procenjenih optimističkih, najverovatnijih i pesimističkih vremena pojedinih aktivnosti na gore prikazani način se generišu (izračunavaju) vremena trajanja aktivnosti koja se koriste pri simulaciji izračunavanja verovatnoće



završetka projekta do određenog roka. Praktično, na osnovu gornjih izraza preko procedure `Function RiskTriang(o, m, p, SL)`, izračunavaju se vremena trajanja aktivnosti. (slika P-18)

```
Function RiskTriang(o, m, p, SL)
If ((o <= m) And (m <= p)) Then
    If ((o = m) And (m = p)) Then
        Vreme = m
    End If
    If ((o = m) And (m < p)) Then
        Vreme = p - (p - m) * Sqr(1 - SL)
    End If
    If ((o < m) And (m = p)) Then
        Vreme = o + (m - o) * Sqr(SL)
    End If
    If ((o < m) And (m < p)) Then
        If SL <= (m - o) / (p - o) Then
            Vreme = o + Sqr(SL * (p - o) * (m - o))
        Else
            Vreme = p - Sqr((1 - SL) * (p - m) * (p - o))
        End If
    End If
Else
    Vreme = -1
End If
End Function
```

Slika P-18. Procedura za izračunavanje vremena trajanja aktivnosti.

Na slici P-19 je prikazana Excel tabela za simulaciju vremena trajanja projekta preduzeća Construction Co.

|    | A                            | B        | C           | D              | E   | F  | G                           | H        | I      |
|----|------------------------------|----------|-------------|----------------|-----|----|-----------------------------|----------|--------|
| 1  | Template for PERT Simulation |          |             |                |     |    |                             |          |        |
| 2  |                              |          |             |                |     |    |                             |          |        |
| 3  | Sl. Broj                     |          | Immediate   | Time estimates |     |    | Start                       | Activity | Finish |
| 4  |                              | Activity | Predecessor | o              | m   | p  | Time                        | Time     | Time   |
| 5  | 0.489265                     | A        | -           | 1              | 2   | 3  | 0                           | 1.989    | 1.989  |
| 6  | 0.0682012                    | B        | A           | 2              | 3.5 | 8  | 1.989                       | 2.783    | 4.773  |
| 7  | 0.2394333                    | C        | B           | 6              | 9   | 18 | 4.773                       | 8.936    | 13.709 |
| 8  | 0.9250111                    | D        | C           | 4              | 5.5 | 10 | 13.709                      | 8.577    | 22.286 |
| 9  | 0.3889801                    | E        | C           | 1              | 4.5 | 5  | 13.709                      | 3.334    | 17.042 |
| 10 | 0.548128                     | F        | E           | 4              | 4   | 10 | 17.042                      | 5.967    | 23.009 |
| 11 | 0.7611186                    | G        | D           | 5              | 6.5 | 11 | 22.286                      | 8.460    | 30.746 |
| 12 | 0.4149417                    | H        | E,G         | 5              | 8   | 17 | 30.746                      | 9.051    | 39.797 |
| 13 | 0.6256334                    | I        | C           | 3              | 7.5 | 9  | 13.709                      | 7.110    | 20.819 |
| 14 | 0.6893908                    | J        | F,I         | 3              | 9   | 9  | 23.009                      | 7.982    | 30.991 |
| 15 | 0.9718023                    | K        | J           | 4              | 4   | 4  | 30.991                      | 4.000    | 34.991 |
| 16 | 0.0042296                    | L        | J           | 1              | 5.5 | 7  | 30.991                      | 1.338    | 32.329 |
| 17 | 0.0477643                    | M        | H           | 1              | 2   | 3  | 39.797                      | 1.309    | 41.106 |
| 18 | 0.1127273                    | N        | K,L         | 5              | 5.5 | 9  | 34.991                      | 5.475    | 40.465 |
| 19 |                              |          |             |                |     |    |                             |          |        |
| 20 |                              |          |             |                |     |    | Project Completion =        |          | 41.106 |
| 21 |                              |          |             |                |     |    | Project deadline =          |          | 47     |
| 22 |                              |          |             |                |     |    | Deadline Met (1=Yes, 0=No)? |          | 1      |

|    | G             | H                           | I        |                   |
|----|---------------|-----------------------------|----------|-------------------|
| 5  | 0             | =RiskTriang(D5,E5,F5)       | =G5+H5   |                   |
| 6  | =I5           | =RiskTriang(D6,E6,F6)       | =G6+H6   |                   |
| 7  | =I6           | =RiskTriang(D7,E7,F7)       | =G7+H7   |                   |
| 8  | =I7           | =RiskTriang(D8,E8,F8)       | =G8+H8   |                   |
| 9  | =I7           | =RiskTriang(D9,E9,F9)       | =G9+H9   |                   |
| 10 | =I9           | =RiskTriang(D10,E10,F10)    | =G10+H10 |                   |
| 11 | =I8           | =RiskTriang(D11,E11,F11)    | =G11+H11 |                   |
| 12 | =MAX(B,I11)   | =RiskTriang(D12,E12,F12)    | =G12+H12 |                   |
| 13 | =I7           | =RiskTriang(D13,E13,F13)    | =G13+H13 |                   |
| 14 | =MAX(I10,I13) | =RiskTriang(D14,E14,F14)    | =G14+H14 |                   |
| 15 | =I14          | =RiskTriang(D15,E15,F15)    | =G15+H15 |                   |
| 16 | =I14          | =RiskTriang(D16,E16,F16)    | =G16+H16 |                   |
| 17 | =I12          | =RiskTriang(D17,E17,F17)    | =G17+H17 |                   |
| 18 | =MAX(I15,I16) | =RiskTriang(D18,E18,F18)    | =G18+H18 |                   |
| 19 |               |                             |          |                   |
| 20 |               | Project Completion =        |          | =MAX(I17,I18)     |
| 21 |               | Project Deadline =          |          | 47                |
| 22 |               | Deadline Met (1=yes, 0=no)? |          | =IF(I20<=I21,1,0) |

Slika P-19. Excel tabela za simulaciju vremena trajanja projekta Construction Co.

Formula, `= RiskTriang(o,m,p,SL)`, se ubacuje u svako ulazno polje u koloni H (vreme trajanja aktivnosti), koje predstavlja vreme trajanja aktivnosti izračunato na osnovu vrednosti za *o*, *m*, i *p* (Tabela P4-9). Relacije u ulaznim poljima kolona G (vreme početka aktivnosti) i I (vreme završetka aktivnosti) formiraju se na osnovu redosleda i međuzavisnosti aktivnosti prikazanih na mrežnom dijagramu projekta.

Rezultati simulacionog eksperimenta prikazani su na slici P-20. Simulacija je izvršena 1000 puta.

| L               | M                  | N                             | O | P                                   | Q | R               |
|-----------------|--------------------|-------------------------------|---|-------------------------------------|---|-----------------|
|                 |                    |                               |   |                                     |   |                 |
|                 |                    |                               |   |                                     |   |                 |
|                 |                    |                               |   |                                     |   |                 |
| Broj Simulacije | Project Completion | Deadline Met<br>(1=Yes, 0=No) |   | Srednja vrednost<br>Sr. kv. Od      |   | 46.231<br>3.651 |
| 1               | 44.984             | 1                             |   | Verovatnoca                         |   | 0.578           |
| 2               | 42.528             | 1                             |   |                                     |   |                 |
| 3               | 49.546             | 0                             |   |                                     |   |                 |
| 4               | 52.472             | 0                             |   | Procena greske<br>vremena zavrsenka |   | 0.1154          |
| 5               | 52.250             | 0                             |   |                                     |   |                 |
| 6               | 50.057             | 0                             |   |                                     |   |                 |
| 7               | 45.480             | 1                             |   |                                     |   |                 |
| 8               | 41.520             | 1                             |   |                                     |   |                 |
| 9               | 52.024             | 0                             |   |                                     |   |                 |
| 10              | 43.745             | 1                             |   |                                     |   |                 |
| 11              | 54.291             | 0                             |   |                                     |   |                 |
| 12              | 45.908             | 1                             |   |                                     |   |                 |
| 13              | 50.567             | 0                             |   |                                     |   |                 |
| 14              | 50.988             | 0                             |   |                                     |   |                 |
| 15              | 41.141             | 1                             |   |                                     |   |                 |
| 16              | 45.531             | 1                             |   |                                     |   |                 |
| 17              | 39.464             | 1                             |   |                                     |   |                 |
| 18              | 41.170             | 1                             |   |                                     |   |                 |
| 19              | 51.778             | 0                             |   |                                     |   |                 |
| 20              | 44.761             | 1                             |   |                                     |   |                 |
| 21              | 49.036             | 0                             |   |                                     |   |                 |
| 22              | 49.605             | 0                             |   |                                     |   |                 |
| 23              | 46.304             | 1                             |   |                                     |   |                 |
| 24              | 47.343             | 0                             |   |                                     |   |                 |
| 25              | 44.342             | 0                             |   |                                     |   |                 |
| 26              | 59.742             | 0                             |   |                                     |   |                 |

U gornjem desnom uglu na slici P-20 dati su rezultati simulacionog eksperimenta. U polju *Srednja vrednost* data je srednja vrednost trajanja projekta izračunata na osnovu svih 1000 vrednosti vremena trajanja projekta dobijenih u simulacionom eksperimentu. U polju *Sr.Kv.Od.* dato je srednje kvadratno odstupanje vremena trajanja projekta od njegove srednje vrednosti, takođe izračunato na osnovu svih 1000 vrednosti vremena trajanja projekta dobijenih u simulacionom eksperimentu. Konačno u polju *Verovatnoća* data je verovatnoća završetka projekta do zadatog roka kao odnos onih simulacija gde je ispunjen rok za završetak projekta od 47 nedelja i ukupnog broja izvršenih simulacija u eksperimentu (1000). Dobijena verovatnoća završetka projekta u predviđenom roku je 0,578. Treba primetiti da je dobijena relativno precizna vrednost dosta manja od vrednosti verovatnoće završetka projekta dobijene primenom metode PERT koja iznosi 0,84. Vrednost verovatnoće završetka projekta dobijena simulacijom daje bolju informaciju u kom smeru treba izmeniti plan izvođenja radova da bi se poboljšale šanse za završetak projekta u predviđenom roku.

Kao dodatak informaciji o verovatnoći završetka projekta do predviđenog roka, rukovodilac projekta je takođe zainteresovan raspodelu vremena trajanja projekta. Kako se simulacionim eksperimentom dobilo 1000 vrednosti vremena trajanja projekta moguće je odrediti blisku aproksimaciju raspodele vremena završetka projekta. Primenom  $\chi^2$  - testa verifikovano je da se uzorak dobijen simulacionim eksperimentom, za vreme trajanja projekta, može na zadovoljavajući način opisati Normalnom raspodelom  $N(46,231;3,651)$ . Drugim rečima vreme trajanja projekta u ovom slučaju raspodeljeno je po Normalnoj raspodeli, što odgovara trećoj pretpostavci PERT metode.

Na slici P-21 je izveštaj testiranja uzorka simulacionog eksperimenta  $\chi^2$  - testom, poligon empirijske raspodele kao i gustina dobijene Normalne raspodele.

Na slici P-22 prikazan je dijagram funkcije raspodele vremena trajanja projekta. Raspodela vremena trajanja projekta je Normalna raspodela sa parametrima  $N(46,231;3,651)$ . Pomoću dijagrama na slici P-22 na jednostavan način je moguće odrediti verovatnoće završetka projekta do različitih unapred određenih datuma.

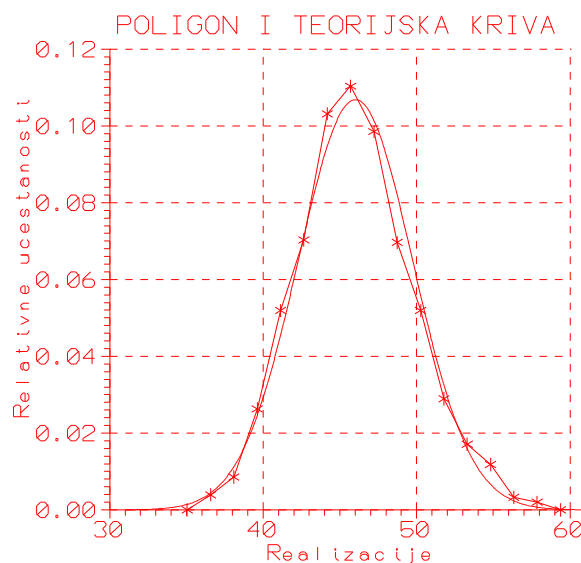
# KARAKTERISTIKE UZORKA:

Obim uzorka ..... N = 1001  
 Minimalni clan ..... Xmin = 35.8110  
 Maximalni clan ..... Xmax = 58.6220  
 Srednja vrednost ..... Xsr = 46.2310  
 Disperzija ..... D[x] = 13.9462  
 Srednje kvadratno odstupanje ...  $\delta[x]$  = 3.6512  
 Broj intervala ..... Ki = 15  
 Duzina intervala ..... h = 1.5207

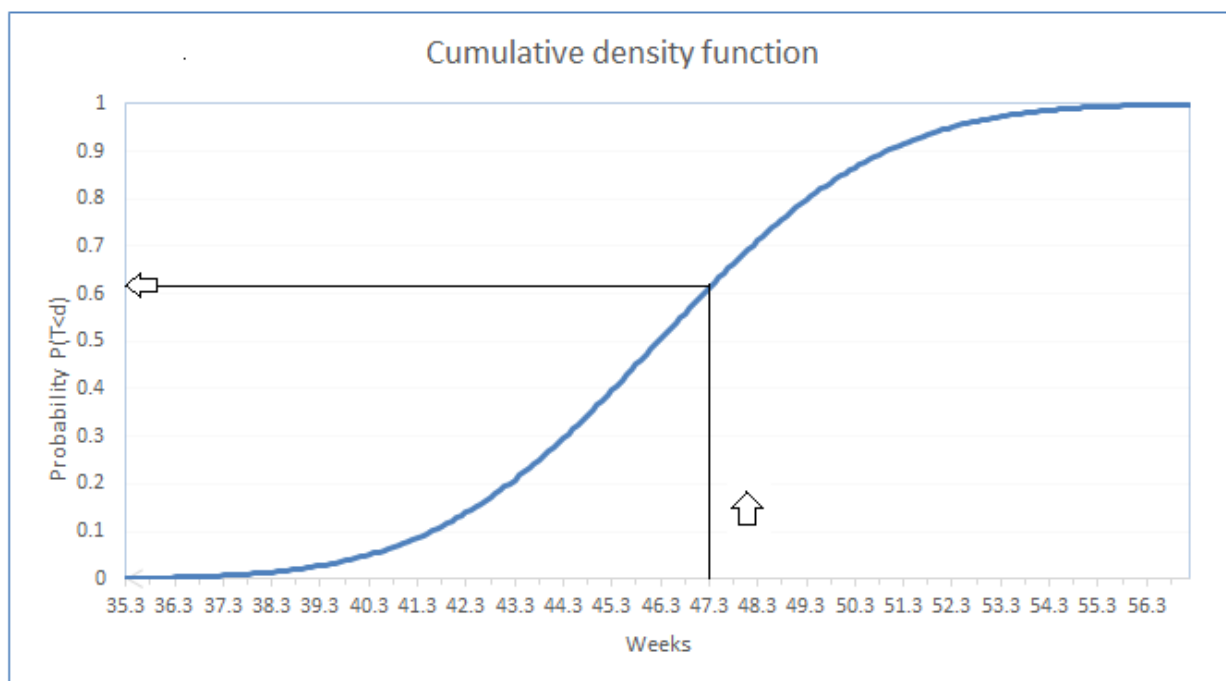
| Intervali         | Ucestanosti | Verovatnoce | HISR   |
|-------------------|-------------|-------------|--------|
| 35.8110 - 37.3317 | 6           | 0.0100      | 1.633  |
| 37.3317 - 38.8525 | 13          | 0.0175      | 1.185  |
| 38.8525 - 40.3732 | 40          | 0.0379      | 0.112  |
| 40.3732 - 41.8939 | 79          | 0.0695      | 1.274  |
| 41.8939 - 43.4147 | 107         | 0.1083      | 0.017  |
| 43.4147 - 44.9354 | 157         | 0.1432      | 1.307  |
| 44.9354 - 46.4561 | 168         | 0.1608      | 0.311  |
| 46.4561 - 47.9769 | 150         | 0.1533      | 0.077  |
| 47.9769 - 49.4976 | 106         | 0.1241      | 2.675  |
| 49.4976 - 51.0183 | 79          | 0.0853      | 0.480  |
| 51.0183 - 52.5391 | 44          | 0.0498      | 0.687  |
| 52.5391 - 54.0598 | 26          | 0.0247      | 0.067  |
| 54.0598 - 55.5805 | 18          | 0.0104      | 5.557  |
| 55.5805 - 57.1013 | 5           | 0.0037      | 0.444  |
| 57.1013 - 58.6220 | 3           | 0.0015      | 1.526  |
|                   | 1001        | 1.0000      | 17.353 |

## IZVESTAJ :

Teorijska vrednost za 12 stepeni slobode i prag znacajnosti  
 $\alpha = 0.1000$  za HI-KVADRAT raspodelu iznosi  $H_{It} = 18.5490$   
 Posto je  $H_{It} > H_{Isr}$  [ $18.5490 > 17.3530$ ] mozemo prihvatiti hipotezu  
 da uzorak ima Normalnu raspodelu sa parametrima  $m = 46.23$  i  $\delta = 3.65$   
 sa pragom znacajnosti  $\alpha = 0.01$ .



Slika P-21. Testiranje uzorka – vreme trajanja projekta –  $\chi^2$  - testom, Normalna raspodela.



Slika P-22. Raspodela vremena trajanja projekta  $N(46,231;3,651)$ .