

Zadatak 01

Generisati šest slučajnih brojeva na osnovu diskretnog empirijskog zakona raspodele verovatnoća:

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 10 & 18 \\ 0.22 & 0.17 & 0.61 \end{pmatrix};$$

za sledeće uniformne slučajne brojeve (r):

0.32 0.17 0.90 0.05 0.97 0.87.

Rešenje:

Kumulativna funkcija diskretne empirijske raspodele ima sledeći oblik:

x	$F(x)$
2	$0 \div 0.22$
10	$0.22 \div 0.39$
18	$0.39 \div 1$

Inverzna funkcija diskretne empirijske raspodele ima sledeći oblik:

r	$x = F^{-1}(r)$
$0 \div 0.22$	2
$0.22 \div 0.39$	10
$0.39 \div 1$	18

Traženi slučajni brojevi su prikazani u sledećoj tabeli:

r	0.32	0.17	0.90	0.05	0.97	0.87
$F^{-1}(r)$	10	2	18	2	18	18

Zadatak 02

Generisati šest slučajnih brojeva na osnovu kontinualnog empirijskog zakona raspodele verovatnoća:

$$X : \begin{pmatrix} 2 \div 4 & 4 \div 8 & 8 \div 10 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix};$$

za sledeće uniformne slučajne brojeve (r):

0.32 0.17 0.90 0.05 0.97 0.87.

Rešenje:

Kumulativna funkcija kontinualne empirijske raspodele ima sledeći oblik:

x	$F(x)$
$2 \div 4$	$0.1 \cdot (x - 2)$
$4 \div 8$	$0.2 + 0.125 \cdot (x - 4)$
$8 \div 10$	$0.7 + 0.15 \cdot (x - 8)$

Inverzna funkcija kontinualne empirijske raspodele ima sledeći oblik:

r	$x = F^{-1}(r)$
$0 \div 0.2$	$\frac{r}{0.1} + 2$
$0.2 \div 0.7$	$\frac{r - 0.2}{0.125} + 4$
$0.7 \div 1$	$\frac{r - 0.7}{0.15} + 8$

Traženi slučajni brojevi su prikazani u sledećoj tabeli:

r	0.32	0.17	0.90	0.05	0.97	0.87
$F^{-1}(r)$	4.96	3.70	9.33	2.50	9.80	9.13

Zadatak 03

Generisati pet slučajnih brojeva prema ravnomernoj raspodeli definisanoj na intervalu od 0 do 10, pomoću sledećih uniformnih slučajnih brojeva (r):

0.690 0.749 0.413 0.887 0.637.

Rešenje:

Funkcija raspodele ravnomerne raspodele $F(x)$ definisane na intervalu $(0 \div 10)$ na osnovu izraza (4) je: ($a=0$, $b=10$)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{10} & 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & x > 10 \end{cases}$$

Izraz na osnovu koga se određuju traženi slučajni brojevi je:

$$r = F(x) = \frac{x}{10} \rightarrow x = F^{-1}(r) = 10 \cdot r.$$

Traženi slučajni brojevi su prikazani u sledećoj tabeli:

r	0.690	0.749	0.413	0.887	0.637
$F^{-1}(r)$	6.90	7.49	4.13	8.87	6.37

Zadatak 04

Generisati pet slučajnih brojeva prema eksponencijalnoj raspodeli sa parametrom $\lambda=0.1$, pomoću sledećih uniformnih slučajnih brojeva (r):

0.690 0.749 0.413 0.887 0.637.

Rešenje:

Funkcija raspodele eksponencijalne raspodele $F(x)$ a parametrom $\lambda=0.1$ na osnovu izraza (8) je:

$$F(x) = 1 - e^{-0.1 \cdot x}.$$

Izraz na osnovu koga se određuju traženi slučajni brojevi je: (izraz (10) za $\lambda=0.1$)

$$x = -\frac{1}{0.1} \cdot \ln(r) \rightarrow x = F^{-1}(r) = -10 \cdot \ln(r).$$

Traženi slučajni brojevi su prikazani u sledećoj tabeli:

r	0.80	0.33	0.69	0.45	0.98
$F^{-1}(r)$	2.33	11.09	3.71	7.99	0.20

Zadatak 05

Odrediti izraz za generisanje slučajnih brojeva na osnovu slučajne promenljive X čija je gustina raspodele data sledećim izrazom:

$$f(x) = a \cdot \left(1 - \frac{a}{2} \cdot x\right) \quad \text{za } 0 < x < \frac{2}{a};$$

i $f(x)=0$ van tog intervala.

Za $a=1$ generisati četiri slučajna broja na osnovu sledećih uniformnih slučajnih brojeva:

0.35 0.96 0.31 0.53.

Rešenje:

Funkcija raspodele slučajne promenljive X se određuje na sledeći način:

$$F(x) = \int_0^x f(x) \cdot dx = \int_0^x a \cdot \left(1 - \frac{a}{2} \cdot x\right) \cdot dx = \left[a \cdot x - \frac{a^2}{4} \cdot x^2 \right]_0^x = -\frac{a^2}{4} \cdot x^2 + a \cdot x.$$

Inverzna vrednost funkcije raspodele slučajne promenljive X određuje se kao:

$$r = F(x) = -\frac{a^2}{4} \cdot x^2 + a \cdot x,$$

$$-\frac{a^2}{4} \cdot x^2 + a \cdot x - r = 0.$$

Rešenja gornje kvadratne jednačine po x su:

$$x_1 = \frac{2}{a} \cdot (1 - \sqrt{r}), \quad x_2 = \frac{2}{a} \cdot (1 + \sqrt{r}).$$

Rešenje x_2 otpada jer daje vrednosti van intervala u kojem je definisana gustina funkcije raspodele, tako da je konačan izraz za generisanje slučajnih brojeva:

$$x = \frac{2}{a} \cdot (1 - \sqrt{r}) = F^{-1}(r),$$

za $a=1$ dobija se:

$$x = F^{-1}(r) = 2 \cdot (1 - \sqrt{r}).$$

Traženi slučajni brojevi su prikazani u sledećoj tabeli:

r	0.35	0.96	0.31	0.53
$F^{-1}(r)$	0.82	0.04	0.89	0.54