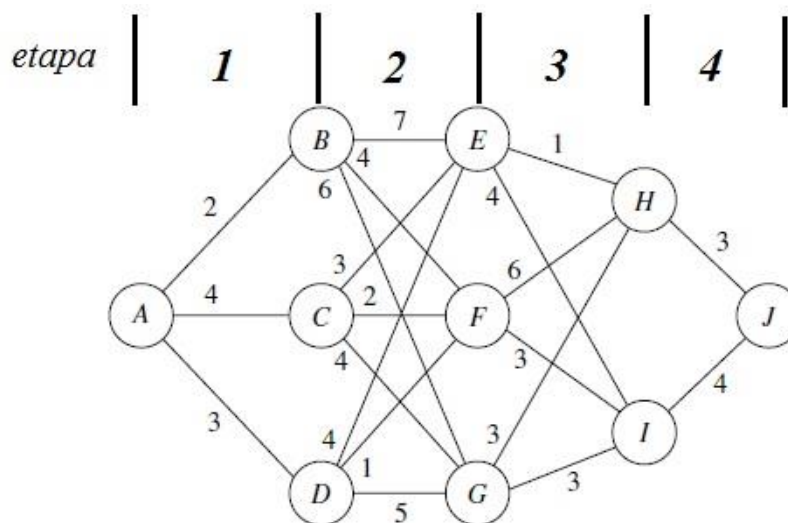


## Zadatak 01

Naći najkraći put od mesta  $A$  do mesta  $J$  na mrežnom dijagramu datom na slici. Brojevi iznad duži označavaju rastojanja između pojedinih mesta.



### Rešenje:

Kao što je u postavci zadatka rečeno, polazni čvor u mrežnom dijagramu je  $A$  dok je krajnji čvor  $J$ . Između polaznog i krajnjeg čvora uočavaju se četiri etape, što znači da se na kraju svake etape dolazi u neko od mesta koje predstavlja početno stanje za sledeću etapu. Doprinos funkciji cilja neke od etapa predstavlja rastojanje između mesta koja su početna odnosno krajnja stanja za datu etapu. U svakoj od etapa je potrebno da se donese odluka, koje će stanje biti na kraju date etape. Kako postoje  $N=4$  etapa to će biti i četiri promenljive odlučivanja  $x_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ). U ovom slučaju promenljive odlučivanja će predstavljati krajnju destinaciju za tekuću etapu. Putanja od mesta  $A$  do mesta  $J$  je sledeća:

$$A \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4, \text{ gde je } x_4 = J.$$

(Očigledno je da je polazno stanje za prvu etapu stanje  $A$ , takođe je jasno da promenljiva odlučivanja u četvrtoj etapi mora da uzme vrednost  $J$ ).

Postupak rešavanja kreće od poslednje, četvrte etape. Početna stanja (mesta) za četvrtu etapu mogu biti  $H$  ili  $I$ ,  $s_4 \in \{H, I\}$  dok je krajnje stanje, promenljiva odlučivanja, određeno konačnom destinacijom  $J$ , tj.  $x_4 = J$ .

Doprinos poslednje četvrte etape funkciji cilja, koji treba minimizirati, određuje se na osnovu rekurentne formule u zavisnosti od početnog stanja  $s_4$  i (poznate) promenljive odlučivanja  $x_4 = J$  i iznosi:

$$f_4(s_4, x_4) = c_{s_4 x_4} + f_5^*(s_5)$$

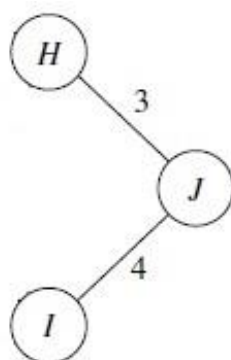
kako je:

$$s_5 \in \{J\} \rightarrow f_5^*(s_5) = 0, \text{ jer je } J \text{ krajnje stanje (mesto), sledi da je:}$$

$$f_4(s_4, x_4) = c_{s_4 x_4} = f_4(s_4, J) = c_{s_4 J}.$$

Pošto iz svakog početnog stanja u četvrtoj etapi  $s_4$  promenljiva odlučivanja može da uzme samo jednu vrednost, slika Z1-1, to je ta vrednost i optimalna  $x_4^* = x_4 = J$ , kao što je i optimalan (minimalan) doprinos funkciji cilja:

$$f_4^*(s_4) = f_4(s_4, x_4^*) = \min_{x_4} \{f_4(s_4, x_4)\}.$$



Slika Z1-1. Četvrta etapa  $n=4$ .

U tabeli Z1-1, za četvrtu etapu, prikazane su vrednosti za: početna stanja  $s_4$ , promenljivu odlučivanja  $x_4$ , doprinos funkciji cilja  $f_4(s_4, x_4)$  kao i optimalni (minimalni) doprinos funkciji cilja  $f_4^*(s_4)$  u zavisnosti od početnog stanja  $s_4$  i optimalna vrednost promenljive odlučivanja  $x_4^*$  u zavisnosti od početnog stanja  $s_4$ .

Tabela Z1-1. Četvrta etapa  $n=4$ .

$s_4 \backslash x_4$	$f_4(s_4, x_4) = c_{s_4 x_4}$	$f_4^*(s_4)$	$x_4^*$
	$J$		
$H$	3	3	$J$
$I$	4	4	$J$

Postupak rešavanja se sada pomera unazad za jednu etapu,  $n=3$ . Početna stanja (mesta) za treću etapu mogu biti  $E, F$  ili  $G$ ,  $s_3 \in \{E, F, G\}$  dok su krajnja stanja, tj. promenljive odlučivanja određene početnim stanjima četvrte etape  $x_3 = s_4 \in \{H, I\}$ .

Doprinos treće i četvrte etape funkciji cilja, koji treba minimizirati, određuje se na osnovu rekurentne formule u zavisnosti od početnog stanja  $s_3$ , doprinosa treće etape funkciji cilja i optimalnog (minimalnog) doprinosa četvrte etape funkciji cilja

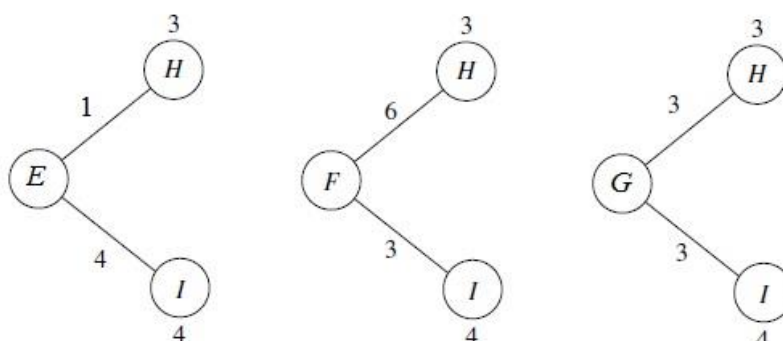
u zavisnosti od promenljivih odlučivanja u trećoj etapi odnosno početnih stanja u četvrtoj etapi kao:

$$f_3(s_3, x_3) = c_{s_3 x_3} + f_4^*(s_4) = c_{s_3 x_3} + f_4^*(x_3).$$

Optimalan (minimalan) doprinos funkciji cilja etapa 3 i 4 dobija se kao:

$$f_3^*(s_3) = f_3(s_3, x_3^*) = \min_{x_3} \{f_3(s_3, x_3)\}.$$

Na slici Z1-2 prikazana su moguća početna i krajnja stanja u trećoj etapi, odgovarajući doprinosi treće etape funkciji cilja u zavisnosti od početnog i krajnjeg stanja, kao i optimalni (minimalni) doprinosi četvrte etape funkciji cilja u zavisnosti od krajnjeg stanja u trećoj etapi (početnog stanja u četvrtoj etapi).



Slika Z1-2. Treća etapa  $n=3$ .

U tabeli Z1-2, za treću etapu, prikazane su vrednosti za: početna stanja  $s_3$ , promenljivu odlučivanja  $x_3$ , doprinos funkciji cilja  $f_3(s_3, x_3)$  kao i optimalni (minimalni) doprinos funkciji cilja  $f_3^*(s_3)$  u zavisnosti od početnog stanja  $s_3$  i optimalna vrednost promenljive odlučivanja  $x_3^*$  u zavisnosti od početnog stanja  $s_3$ .

Tabela Z1-2. Treća etapa  $n=3$ .

$s_3 \backslash x_3$	$f_3(s_3, x_3) = c_{s_3 x_3} + f_4^*(x_3)$		$f_3^*(s_3)$	$x_3^*$
	$H$	$I$		
$E$	4	8	4	$H$
$F$	9	7	7	$I$
$G$	6	7	6	$H$

Rezultati prikazani u tabeli Z1-2 znače da ako se na početku treće etape proces nađe u stanjima (mestima)  $E$  ili  $G$  optimalno (minimalno) je da na kraju treće etape proces pređe u stanje  $H$ , dok ako se nađe u stanju  $F$  optimalno je da pređe u stanje  $I$ .

Kao i u prethodnom slučaju postupak rešavanja se pomera unazad za jednu etapu,  $n=2$ . Početna stanja (mesta) za drugu etapu mogu biti  $B, C$  ili  $D$ ,  $s_2 \in \{B, C, D\}$  dok su krajnja stanja, tj. promenljive odlučivanja određene početnim stanjima treće etape  $x_2 = s_3 \in \{E, F, G\}$ .

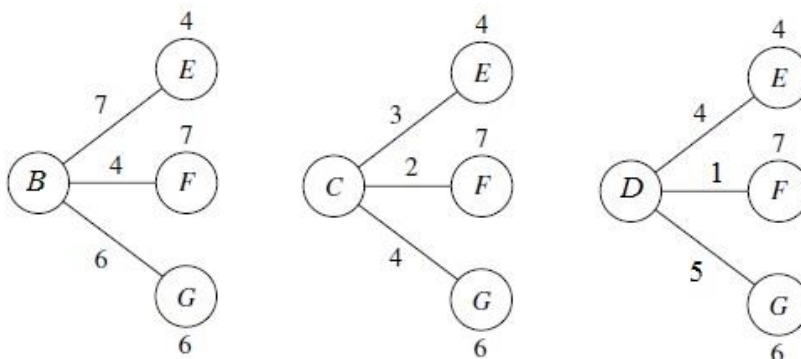
Doprinos druge, treće i četvrte etape funkciji cilja, koji treba minimizirati, određuje se na osnovu rekurentne formule u zavisnosti od početnog stanja  $s_2$ , doprinosa druge etape funkciji cilja i optimalnog (minimalnog) doprinosa treće i četvrte etape funkciji cilja u zavisnosti od promenljivih odlučivanja u drugoj etapi odnosno početnih stanja u trećoj etapi kao:

$$f_2(s_2, x_2) = c_{s_2 x_2} + f_3^*(s_3) = c_{s_2 x_2} + f_3^*(x_2).$$

Optimalan (minimalan) doprinos funkciji cilja etape 2, 3 i 4 dobija se kao:

$$f_2^*(s_2) = f_2(s_2, x_2^*) = \min_{x_2} \{f_2(s_2, x_2)\}.$$

Na slici Z1-3 prikazana su moguća početna i krajnja stanja u drugoj etapi, odgovarajući doprinosi druge etape funkciji cilja u zavisnosti od početnog i krajnjeg stanja, kao i optimalni (minimalni) doprinos treće i četvrte etape funkciji cilja u zavisnosti od krajnjeg stanja u drugoj etapi (početnog stanja u trećoj etapi).



Slika Z1-3. Druga etapa  $n=2$ .

U tabeli Z1-3, za drugu etapu, prikazane su vrednosti za: početna stanja  $s_2$ , promenljivu odlučivanja  $x_2$ , doprinos funkciji cilja  $f_2(s_2, x_2)$  kao i optimalni (minimalni) doprinos funkciji cilja  $f_2^*(s_2)$  u zavisnosti od početnog stanja  $s_2$  i optimalna vrednost promenljive odlučivanja  $x_2^*$  u zavisnosti od početnog stanja  $s_2$ .

Rezultati prikazani u tabeli Z1-3 znače da ako se na početku druge etape proces nađe u stanjima (mestima)  $B$  ili  $D$  optimalno (minimalno) je da na kraju druge etape proces pređe u stanje  $E$  ili u stanje  $F$ , dok ako se nađe u stanju  $C$  optimalno je da pređe u stanje  $E$ .

Tabela Z1-3. Druga etapa  $n=2$ .

$s_2 \backslash x_2$	$f_2(s_2, x_2) = c_{s_2 x_2} + f_3^*(x_2)$			$f_2^*(s_2)$	$x_2^*$
	$E$	$F$	$G$		
$B$	11	11	12	11	$E$ ili $F$
$C$	7	9	10	7	$E$
$D$	8	8	11	8	$E$ ili $F$

Postupak rešavanja se sada pomera unazad na prvu etapu tj.  $n=1$ , tj. poslednju u postupku rešavanja. Početno stanje (mesto) u prvoj etapi je samo jedno ( $A$ ), što znači da je  $s_1=A$ , dok su krajnja stanja, tj. promenljive odlučivanja određene početnim stanjima druge etape  $x_1 = s_2 \in \{B, C, D\}$ .

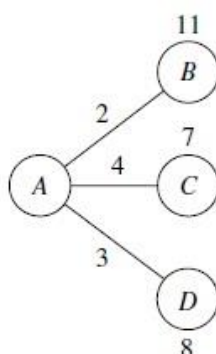
Doprinos od prve do četvrte etape funkciji cilja, koji treba minimizirati, određuje se na osnovu rekurentne formule u zavisnosti od početnog stanja  $s_1$ , doprinosa prve etape funkciji cilja i optimalnog (minimalnog) doprinosa druge, treće i četvrte etape funkciji cilja u zavisnosti od promenljivih odlučivanja u prvoj etapi odnosno početnih stanja u drugoj etapi kao:

$$f_1(s_1, x_1) = c_{s_1 x_1} + f_2^*(s_2) = c_{s_1 x_1} + f_2^*(x_1) \quad s_1 = A.$$

Optimalan (minimalan) doprinos funkciji cilja etapa 1, 2, 3 i 4 dobija se kao:

$$f_1^*(s_1) = f_1(s_1, x_1^*) = \min_{x_1} \{f_1(s_1, x_1)\}.$$

Na slici Z1-4 prikazano je početno stanje i krajnja stanja u prvoj etapi, odgovarajući doprinosi prve etape funkciji cilja u zavisnosti od početnog i krajnjeg stanja, kao i optimalni (minimalni) doprinos druge, treće i četvrte etape funkciji cilja u zavisnosti od krajnjeg stanja u prvoj etapi (početnog stanja u drugoj etapi).

Slika Z1-4. Prva etapa  $n=1$ .

U tabeli Z1-4, za prvu etapu, prikazane su vrednosti za: početno stanje  $s_1$ , promenljivu odlučivanja  $x_1$ , doprinos funkciji cilja  $f_1(s_1, x_1)$  kao i optimalni

(minimalni) doprinos funkciji cilja  $f_1^*(s_1)$  u zavisnosti od početnog stanja  $s_1$  i optimalna vrednost promenljive odlučivanja  $x_1^*$  u zavisnosti od početnog stanja  $s_1$ .

Tabela Z1-4. Prva etapa  $n=1$ .

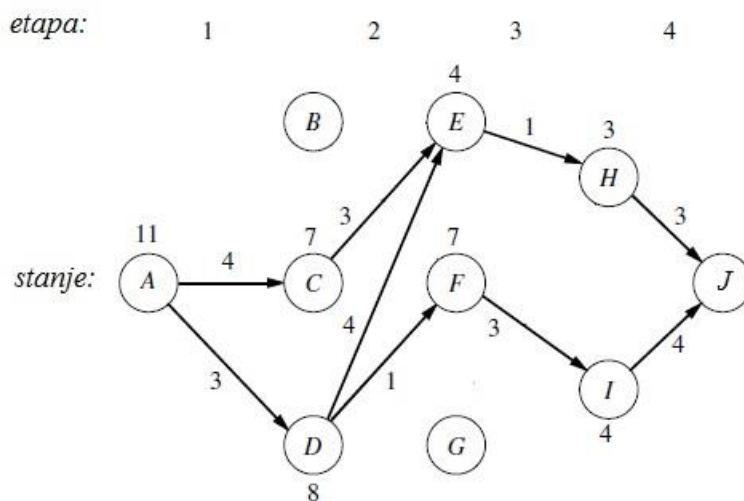
$s_1 \backslash x_1$	$f_1(s_1, x_1) = c_{s_1 x_1} + f_2^*(x_1)$			$f_1^*(s_1)$	$x_1^*$
	$B$	$C$	$D$		
$A$	13	11	11	11	$C$ ili $D$

Rezultat prikazan u tabeli Z1-4 znači da je isto da li će se iz početnog stanja (mesta)  $A$  preći u stanje (mesto)  $C$  ili  $D$ , jer je tada optimalni (minimalni) doprinos svih ( $N=4$ ) etapa funkciji cilja minimalan što je i trebalo odrediti.

Cilj rešavanja ovog zadatka je da se pronade  $f_1^*(s_1)$  odnosno  $f_1^*(A)$  što predstavlja najkraći put od mesta  $A$  do mesta  $J$ , kao i odgovarajuća putanja, tj.

$$A \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow J.$$

Najkraći put od mesta  $A$  do mesta  $J$  iznosi 11 jedinica, dok putanje kojih ima ukupno 3, mogu biti sledeće: (Slika Z1-5)



Slika Z1-5. Najkraće putanje od mesta  $A$  do mesta  $J$ .

#### Putanja #1:

Polazeći iz mesta  $A$  može se krenuti u mesto  $C$  ili  $D$ . Pretpostavka je da se u prvoj etapi krenulo u mesto  $C$  ( $x_1^*=C$ ). Optimalna odluka je da se u drugoj etapi iz mesta  $C$  krene u mesto  $E$  ( $x_2^*=E$ ). U trećoj etapi optimalna odluka je da se iz mesta  $E$  krene u mesto  $H$  ( $x_3^*=H$ ), dok je u četvrtoj etapi optimalna odluka  $x_4^*=J$ .

Putanja #1 je oblika:  $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J$ .

### Putanja #2:

Ukoliko se iz mesta  $A$  umesto u mesto  $C$  krene u mesto  $D$  ( $x_1^*=D$ ). U tom slučaju iz mesta  $D$  u drugoj etapi može se krenuti u mesto  $E$  ili  $F$ . Pretpostavka je da se krenulo u mesto  $E$  ( $x_2^*=E$ ). U trećoj etapi optimalna odluka je da se iz mesta  $E$  krene u mesto  $H$  ( $x_3^*=H$ ), dok je u četvrtoj etapi optimalna odluka  $x_4^*=J$ .

Putanja #2 je oblika:  $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J$ .

### Putanja #3:

Optimalna odluka u prvoj etapi je u ovom slučaju ista kao i u prethodnom slučaju, iz mesta  $A$  se kreće u mesto  $D$  ( $x_1^*=D$ ). Iz mesta  $D$  se za razliku od putanje #2 u drugoj etapi kreće u mesto  $F$  ( $x_2^*=F$ ). U trećoj etapi optimalna odluka je da se iz mesta  $F$  krene u mesto  $I$  ( $x_3^*=I$ ), dok je u četvrtoj etapi optimalna odluka  $x_4^*=J$ .

Putanja #3 je oblika:  $A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J$ .

Svaka od ove tri putanje ima najkraće rastojanje između mesta  $A$  i  $J$  koje je jednako 11 jedinica.

## **Zadatak 02**

Minimalne potrebe za radnom snagom, po sezonama, u jednom građevinskom preduzeću su date u tabeli:

Sezona	Leto	Jesen	Zima	Proleće
Potrebe	220	240	200	255

Broj zaposlenih po sezoni ne može da bude manji od minimalnih potreba za radnom snagom. Svaki radnik zaposlen u preduzeću preko minimalnih potreba za radnom snagom u datoj sezoni košta preduzeće 2000 NJ po sezoni.

Troškovi otpuštanja i zapošljavanja radnika procenjuju se na 200 NJ pomnoženo sa kvadratom razlike broja zaposlenih na početku i na kraju sezone. Decimalni broj radnika je moguć jer postoji određen broj radnika koji rade skraćeno radno vreme.

Odrediti optimalan broj radnika po sezoni tako da troškovi radne snage budu minimalni.

### **Rešenje:**

Logično je da broj zaposlenih ne bude veći nego što su najveće minimalne potrebe za radnom snagom u toku godine, tj. usvaja se da broj radnika u prolećnoj sezoni bude 255. To znači da je potrebno odrediti optimalan broj radnika u ostale tri sezone.

Prevedeno na rečnik dinamičkog programiranja sezone (godišnja doba) predstavljaju etape. Svake godine sezone se ciklično smenjuju istim redosledom i pošto je usvojeno da je broj radnika u prolećnoj sezoni fiksiran to je moguće svaku godinu posmatrati kao jedan zaseban ciklus.

Takođe se usvaja da je: etapa 1 - leto, etapa 2 - jesen, etapa 3 - zima i etapa 4 - proleće. Promenljive odlučivane  $x_n$  ( $n = 1,2,3,4$ ) u ovom slučaju će predstavljati broj zaposlenih radnika po sezoni. Usvojeno je da je  $x_4 = 255$ , broj radnika u etapi 4 - prolećnoj sezoni.

Sa  $r_n$  ( $n = 1,2,3,4$ ) obeležavaće se minimalne potrebe za radnom snagom u datoj sezoni - etapi (tabela u postavci zadatka,  $r_1 = 220$ ,  $r_2 = 240$ ,  $r_3 = 200$ ,  $r_4 = 255$ ). Vrednosti koje broj zaposlenih (promenljiva odlučivanja) može da uzme u zavisnosti od sezone - etape se kreću u granicama:

$$r_n \leq x_n \leq 255, \quad n = 1,2,3,4$$



dok troškovi radne snage preko minimalnih potreba po sezoni iznose:

$$200 \cdot (x_n - x_{n-1})^2 + 2000 \cdot (x_n - r_n)$$

gde je  $x_{n-1}$  broj zaposlenih u prethodnoj sezoni odnosno broj zaposlenih na početku sezone  $n$ . Broj zaposlenih u prethodnoj sezoni je informacija koja definiše trenutno stanje procesa neophodno za donošenje (optimalnih) odluka u narednim etapama. Za etapu  $n$ , početno stanje  $s_n$  se određuje kao:

$$s_n = x_{n-1}.$$

Npr. prethodna sezona za letnju sezonu je prolećna sezona tj. za  $n=1$ ,  $s_1 = x_0 = x_4 = 255$ .

U tabeli Z2-1 prikazane su vrednosti za: minimalne potrebe za radnom snagom  $r_n$ , dozvoljene vrednosti za broj radnika  $x_n$ , moguće vrednosti za broj radnika na početku sezone  $s_n$  i troškovi radne snage preko minimalnih potreba u zavisnosti od sezone.

Tabela Z2-1. Ograničenja za određivanje potrebnog broja radnika po sezoni.

$n$	$r_n$	dozvoljeno $x_n$	moguće $s_n = x_{n-1}$	troškovi
1	220	$220 \leq x_1 \leq 255$	$s_1 = 255$	$200 \cdot (x_1 - 255)^2 + 2000 \cdot (x_1 - 220)$
2	240	$240 \leq x_2 \leq 255$	$220 \leq s_2 \leq 255$	$200 \cdot (x_2 - x_1)^2 + 2000 \cdot (x_2 - 240)$
3	200	$200 \leq x_3 \leq 255$	$240 \leq s_3 \leq 255$	$200 \cdot (x_3 - x_2)^2 + 2000 \cdot (x_3 - 200)$
4	255	$x_4 = 255$	$200 \leq s_4 \leq 255$	$200 \cdot (255 - x_3)^2$

Zadatak pri rešavanju ovog problema jeste izbor promenljivih odlučivanja (broja zaposlenih)  $x_1, x_2, x_3$  (pri  $x_0 = x_4 = 255$ ) tako da se minimizira trošak radne snage:

$$F = \min \sum_{n=1}^4 \left[ 200 \cdot (x_n - x_{n-1})^2 + 2000 \cdot (x_n - r_n) \right]$$

pri ograničenjima:

$$r_n \leq x_n \leq 255, \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Doprinos funkciji cilja etapa  $n, n+1, \dots, 4$ , kako je  $s_n = x_{n-1}$ , iznosi:

$$f_n(s_n, x_n) = 200 \cdot (x_n - s_n)^2 + 2000 \cdot (x_n - r_n) + \min_{r_i \leq x_i \leq 255} \sum_{i=n+1}^4 \left[ 200 \cdot (x_i - x_{i-1})^2 + 2000 \cdot (x_i - r_i) \right]$$

gde je:

$$f_{n+1}^*(x_n) = \min_{r_i \leq x_i \leq 255} \sum_{i=n+1}^4 \left[ 200 \cdot (x_i - x_{i-1})^2 + 2000 \cdot (x_i - r_i) \right]$$

optimalni doprinos etapa  $n+1, \dots, 4$  funkciji cilja.

Izraz za  $f_n(s_n, x_n)$  se može napisati kao:

$$f_n(s_n, x_n) = 200 \cdot (x_n - s_n)^2 + 2000 \cdot (x_n - r_n) + f_{n+1}^*(x_n)$$

odakle je rekurentna formula za izračunavanje optimalnog doprinosa etapa  $n, n+1, \dots, 4$  funkciji cilja oblika:

$$f_n^*(s_n) = \min_{r_n \leq x_n \leq 255} f_n(s_n, x_n), \text{ odnosno}$$

$$f_n^*(s_n) = \min_{r_n \leq x_n \leq 255} \left\{ 200 \cdot (x_n - s_n)^2 + 2000 \cdot (x_n - r_n) + f_{n+1}^*(x_n) \right\},$$

gde je:  $f_5^* = 0$ .

Postupak rešavanja kreće od četvrte etape - sezone tj. proleća.

#### Etapla 4:

Kao što je u prethodnom tekstu objašnjeno, usvojeno je da je optimalna vrednost promenljive odlučivanja (broj zaposlenih radnika) u etapi 4 - prolećnoj sezoni  $x_4^* = 255$ . Početni broj radnika u prolećnoj sezoni (etapa 4)  $s_4$  je jednak broju radnika u zimskoj sezoni (etapa 3)  $200 \leq x_3 \leq 255$  tj.  $s_4 = x_3$ , tako da troškovi radne snage za prolećnu sezonu iznose:

$$f_4(s_4, x_4) = 200 \cdot (x_4 - s_4)^2 + 2000 \cdot (x_4 - r_4) + f_5^*(x_4).$$

Kako je  $f_5^*(x_4) = 0$  i kako je optimalna vrednost promenljive odlučivanja jednaka minimalnim potrebama za radnom u prolećnoj sezoni  $x_4^* = r_4 = 255$ , to se optimalni troškovi radne snage u prolećnoj sezoni odnose samo na troškove eventualnog zapošljavanja novih radnika i iznose: (Tabela Z2-2)

$$f_4^*(s_4) = 200 \cdot (x_4^* - s_4)^2.$$

Tabela Z2-2. Troškovi radne snage (etapa 4 - prolećna sezona).

$s_4$	$f_4^*(s_4)$	$x_4^*$
$200 \leq s_4 \leq 255$	$200 \cdot (255 - s_4)^2$	255

### Etapla 3:

Troškovi radne snage u etapi 3 - zimska sezona iznose:

$$f_3(s_3, x_3) = 200 \cdot (x_3 - s_3)^2 + 2000 \cdot (x_3 - r_3) + f_4^*(x_3),$$

gde je:

- $f_4^*(x_3) = f_4^*(s_4) = 200 \cdot (255 - x_3)^2$  - optimalni doprinos etape 4 funkciji cilja tj. optimalni troškovi radne snage u prolećnoj sezoni,
- $r_3 = 200$  - minimalno potreban broj radnika u zimskoj sezoni (etapa 3), i
- $s_3$  - mogući broj radnika na početku zimske sezone (jednak broju radnika u jesenjoj sezoni  $x_2$ )  $240 \leq s_3 \leq 255$ .

Optimalni troškovi radne snage u zimskoj sezoni (etapa 3) određuju se tako što se minimizira vrednost funkcije  $f_3(s_3, x_3)$  u odnosu na  $x_3$  u dozvoljenim granicama ( $200 \leq x_3 \leq 255$ ) dok se  $s_3$  posmatra kao konstantna ali nepoznata veličina:

$$\begin{aligned} f_3^*(s_3) &= \min_{200 \leq x_3 \leq 255} f_3(s_3, x_3) = \\ &= \min_{200 \leq x_3 \leq 255} \left[ 200 \cdot (x_3 - s_3)^2 + 2000 \cdot (x_3 - 200) + 200 \cdot (255 - x_3)^2 \right] \end{aligned}$$

Nalaženjem parcijalnog izvoda funkcije  $f_3(s_3, x_3)$  po  $x_3$  i njegovim izjednačavanjem sa nulom dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} f_3(s_3, x_3) &= 400 \cdot (x_3 - s_3) + 2000 - 400 \cdot (255 - x_3) \\ &= 400 \cdot (2 \cdot x_3 - s_3 - 250) = 0, \end{aligned}$$

odnosno:

$$x_3^* = \frac{s_3 + 250}{2}.$$

Kako je  $\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} f_3(s_3, x_3) = 800 > 0$  to sledi da je za sve moguće vrednosti  $s_3$  ( $240 \leq$

$s_3 \leq 255$ ),  $x_3$  u dozvoljenim granicama ( $200 \leq x_3 \leq 255$ ) i  $x_3^*$  predstavlja zahtevani minimum. Zamenom  $x_3^*$  u izraz za  $f_3^*(s_3)$  dobija se:

$$\begin{aligned} f_3^*(s_3) &= f_3(s_3, x_3^*) = \\ &= 200 \cdot \left( \frac{s_3 + 250}{2} - s_3 \right)^2 + 2000 \cdot \left( \frac{s_3 + 250}{2} - 200 \right) + 200 \cdot \left( 255 - \frac{s_3 + 250}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Konačan izraz za optimalne troškove radne snage u prolećnoj i zimskoj sezoni kao i optimalan broj radnika u zimskoj sezoni (etapa 3) u zavisnosti od mogućih vrednosti broja radnika na početku zimske sezone dat je u tabeli Z2-3.

Tabela Z2-3. Troškovi radne snage (etapa 3 - zimska sezona).

$s_3$	$f_3^*(s_3)$	$x_3^*$
$240 \leq s_3 \leq 255$	$50 \cdot (250 - s_3)^2 + 50 \cdot (260 - s_3)^2 + 1000 \cdot (s_3 - 150)$	$\frac{s_3 + 250}{2}$

Etapla 2:

Troškovi radne snage u etapi 2 - jesenja sezona iznose:

$$f_2(s_2, x_2) = 200 \cdot (x_2 - s_2)^2 + 2000 \cdot (x_2 - r_2) + f_3^*(x_2),$$

gde je:

- $f_3^*(x_2) = f_3^*(s_3) = 50 \cdot (250 - s_3)^2 + 50 \cdot (260 - s_3)^2 + 1000 \cdot (s_3 - 150)$  - optimalni doprinos etapa 3 i 4 funkciji cilja tj. optimalni troškovi radne snage u zimskoj i prolećnoj sezoni,
- $r_2 = 240$  - minimalno potreban broj radnika u jesenjoj sezoni (etapa 2), i
- $s_2$  - mogući broj radnika na početku jesenje sezone (jednak broju radnika u letnjoj sezoni  $x_1$ )  $220 \leq s_2 \leq 255$ .

Optimalni troškovi radne snage u jesenjoj sezoni (etapa 2) određuju se tako što se minimizira vrednost funkcije  $f_2(s_2, x_2)$  u odnosu na  $x_2$  u dozvoljenim granicama ( $240 \leq x_2 \leq 255$ ) dok se  $s_2$  posmatra kao konstantna ali nepoznata veličina:

$$f_2^*(s_2) = \min_{240 \leq x_2 \leq 255} f_2(s_2, x_2)$$

gde je:

$$f_2(s_2, x_2) = 200 \cdot (x_2 - s_2)^2 + 2000 \cdot (x_2 - r_2) + 50 \cdot (250 - s_3)^2 + 50 \cdot (260 - s_3)^2 + 1000 \cdot (s_3 - 150).$$

Nalaženjem parcijalnog izvoda funkcije  $f_2(s_2, x_2)$  po  $x_2$  i njegovim izjednačavanjem sa nulom dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(s_2, x_2) &= 400 \cdot (x_2 - s_2) + 2000 + 100 \cdot (250 - x_2) + 100 \cdot (260 - x_2) + 1000 \\ &= 200 \cdot (3 \cdot x_2 - 2 \cdot s_2 - 240) = 0, \end{aligned}$$

odnosno:

$$x_2 = \frac{2 \cdot s_2 + 240}{3}.$$

Pošto je  $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f_2(s_2, x_2) = 600 > 0$  to znači da će  $x_2$  biti traženi minimum ako za dozvoljene vrednosti  $s_2$  ( $220 \leq s_2 \leq 255$ ), dobijena vrednost za  $x_2$  bude u dozvoljenim granicama ( $240 \leq x_2 \leq 255$ ).

Ako je vrednost za  $s_2$  u intervalu ( $220 \leq s_2 \leq 240$ ), to će vrednosti za  $x_2$  sračunate preko gornjeg izraza biti manje od 240 što nije dozvoljeno. U slučaju da je  $s_2$  u intervalu ( $220 \leq s_2 \leq 240$ ) tada je optimalna vrednost promenljive odlučivanja u etapi 2 (broj radnika u jesenjoj sezoni)  $x_2^* = 240$ , dok u slučaju da je  $s_2$  u intervalu ( $240 \leq s_2 \leq 255$ ) optimalna vrednost promenljive odlučivanja u etapi 2 se određuje iz izraza:

$$x_2^* = \frac{2 \cdot s_2 + 240}{3}.$$

Zamenom izraza za  $x_2^*$  u izraz za  $f_2^*(s_2)$  dobijaju se izrazi za optimalne troškove radne snage u prolećnoj, zimskoj i jesenjoj sezoni.

Izraz za optimalne troškove radne snage u prolećnoj, zimskoj i jesenjoj sezoni kao i optimalan broj radnika u jesenjoj sezoni (etapa 2) u zavisnosti od mogućih vrednosti broja radnika na početku jesenje sezone dat je u tabeli Z2-4.

Tabela Z2-4. Troškovi radne snage (etapa 2 - jesenja sezona).

$s_2$	$f_2^*(s_2)$	$x_2^*$
$220 \leq s_2 \leq 240$	$200 \cdot (240 - s_2)^2 + 115000$	240
$240 \leq s_2 \leq 255$	$\frac{200}{9} \cdot [(240 - s_2)^2 + (255 - s_2)^2 + (270 - s_2)^2] + 2000 \cdot (s_2 - 195)$	$\frac{2 \cdot s_2 + 240}{3}$

#### Etapa 1:

Troškovi radne snage u etapi 1 - letnja sezona iznose:

$$f_1(s_1, x_1) = 200 \cdot (x_1 - s_1)^2 + 2000 \cdot (x_1 - r_1) + f_2^*(x_1),$$

gde je:

- $f_2^*(x_1) = f_2^*(s_2)$  - optimalni doprinos etapa 2, 3 i 4 funkciji cilja tj. optimalni troškovi radne snage u jesenjoj, zimskoj i prolećnoj sezoni,
- $r_1 = 220$  - minimalno potreban broj radnika u letnjoj sezoni (etapa 1), i

- $s_1$  - mogući broj radnika na početku letnje sezone (jednak broju radnika u prolećnoj sezoni  $x_0 = x_4 = 255$ ), tj.:  $s_1 = x_0 = x_4 = 255$ .

Optimalni troškovi radne snage u letnjoj sezoni (etapa 1) određuju se tako što se minimizira vrednost funkcije  $f_1(s_1, x_1)$  u odnosu na  $x_1$  u dozvoljenim granicama ( $220 \leq x_1 \leq 255$ ) za vrednost  $s_1 = 255$ :

$$f_1^*(s_1) = \min_{210 \leq x_1 \leq 255} f_1(s_1, x_1).$$

Pošto je funkcija  $f_2^*(x_1)$  zavisna od intervala za koji je definisano  $x_1$  odnosno  $s_2$  to će  $f_1(s_1, x_1)$  biti sledećeg oblika:

$$f_1(s_1, x_1) = \begin{cases} 200 \cdot (x_1 - s_1)^2 + 2000 \cdot (x_1 - 220) + \\ + 200 \cdot (240 - x_1)^2 + 115000 & \text{za } 220 \leq x_1 \leq 240 \\ 200 \cdot (x_1 - s_1)^2 + 2000 \cdot (x_1 - 220) + \\ + \frac{200}{9} \cdot [(240 - x_1)^2 + (255 - x_1)^2 + (270 - x_1)^2] + \\ + 2000 \cdot (x_1 - 195) & \text{za } 240 \leq x_1 \leq 255 \end{cases}$$

Prvo će se analizirati slučaj kada je  $x_1$  u intervalu ( $220 \leq x_1 \leq 240$ ). Nalaženjem parcijalnog izvoda funkcije  $f_1(s_1, x_1)$  po  $x_1$  i njegovim izjednačavanjem sa nulom dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s_1, x_1) &= 400 \cdot (x_1 - s_1) + 2000 - 400 \cdot (240 - x_1) \\ &= 400 \cdot (2 \cdot x_1 - s_1 - 235) = 0, \end{aligned}$$

odnosno:

$$x_1 = \frac{s_1 + 235}{2}.$$

Zamenom  $s_1 = 255$  u prethodni izraz dobija se da je  $x_1 = 245$ . Kako dobijena vrednost ne pripada intervalu ( $220 \leq x_1 \leq 240$ ), to se analizom funkcije  $f_1(s_1, x_1)$  zaključuje da ona na posmatranom intervalu ima minimalnu vrednost za  $x_1 = 240$ , tj.  $f_1(255, 240) = 200000$ .

Drugi slučaj koji se analizira je kada je  $x_1$  u intervalu ( $240 \leq x_1 \leq 255$ ). Nalaženjem parcijalnog izvoda funkcije  $f_1(s_1, x_1)$  po  $x_1$  i njegovim izjednačavanjem sa nulom dobija se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s_1, x_1) &= 400 \cdot (x_1 - s_1) + 2000 - \\ &\quad - \frac{400}{9} \cdot [(240 - x_1) + (255 - x_1) + (270 - x_1)] + 2000 \\ &= \frac{400}{3} \cdot (4 \cdot x_1 - 3 \cdot s_1 - 225) = 0,\end{aligned}$$

odnosno:

$$x_1 = \frac{3 \cdot s_1 + 225}{4}.$$

Zamenom  $s_1 = 255$  u prethodni izraz dobija se da je  $x_1 = 247,5$ . Pošto je

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_1(s_1, x_1) = 533,33 > 0, \text{ a dobijena vrednost za } x_1 \text{ je u dozvoljenim granicama}$$

( $240 \leq x_1 \leq 255$ ) to znači da  $x_1 = x_1^* = 247,5$  traženi minimum funkcije  $f_1(s_1, x_1)$  na intervalu ( $240 \leq x_1 \leq 255$ ).

U prvom analiziranom slučaju izračunato je da  $x_1 = 240$  minimizira funkciju  $f_1(s_1, x_1)$  na intervalu ( $220 \leq x_1 \leq 240$ ). Kako  $x_1 = 240$  pripada i intervalu ( $240 \leq x_1 \leq 255$ ), a na tom intervalu je  $x_1 = 247,5$  minimum funkcije  $f_1(s_1, x_1)$ , može se zaključiti da  $x_1 = 247,5$  minimizira funkciju  $f_1(s_1, x_1)$  na celom intervalu ( $220 \leq x_1 \leq 255$ ).

Na kraju je potrebno izračunati  $f_1^*(s_1)$  - optimalni doprinos funkciji cilja svih etapa tj. optimalne troškove radne snage za celu godinu. Zamenom  $s_1 = 255$  i  $x_1 = 247,5$  u izraz za  $f_1(s_1, x_1)$  koji važi na intervalu ( $240 \leq x_1 \leq 255$ ) dobija se:

$$\begin{aligned}f_1^*(255) &= f_1(255; 247,5) = 200 \cdot (255 - 247,5)^2 + 2000 \cdot (247,5 - 220) + \\ &\quad + \frac{200}{9} \cdot [(240 - 247,5)^2 + (255 - 247,5)^2 + (270 - 247,5)^2] + \\ &\quad + 2000 \cdot (247,5 - 195) = \\ &= 185000.\end{aligned}$$

Vrednost optimalnih troškova radne snage za celu godinu kao i optimalan broj radnika u letnjoj sezoni (etapa 1) u zavisnosti od vrednosti broja radnika na početku letnje sezone dat je u tabeli Z2-5.

Tabela Z2-5. Troškovi radne snage (etapa 1 - letnja sezona).

$s_1$	$f_1^*(s_1)$	$x_1^*$
255	185000	247,5

Optimalan broj radnika po sezonama određuje se na sledeći način:

1. Letnja sezona - etapa 1, optimalan broj radnika je:  $x_1^* = 247,5$ .

2. Jesenja sezona - etapa 2, početni broj radnika je jednak broju radnika u letnjoj sezoni tj.  $s_2 = x_1^* = 247,5$ . Optimalan broj radnika se izračunava kao:

$$x_2^* = \frac{2 \cdot 247,5 + 240}{3} \rightarrow x_2^* = 245.$$

3. Zimska sezona - etapa 3, početni broj radnika je jednak broju radnika u jesenjoj sezoni tj.  $s_3 = x_2^* = 245$ . Optimalan broj radnika se izračunava kao:

$$x_3^* = \frac{245 + 250}{2} \rightarrow x_3^* = 247,5.$$

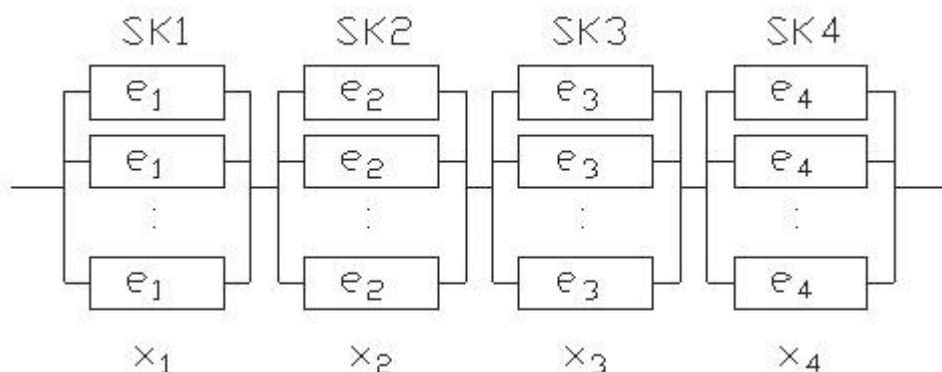
4. Prolećna sezona - etapa 4, Optimalan broj radnika je  $x_4^* = 255$  (pretpostavka pri rešavanju zadatka).

Minimalni troškovi radne snage na godišnjem nivou iznose 185000 NJ.



### **Zadatak 03**

Složeni uređaj (sistem), prikazan na slici, se sastoji četiri redno povezana sklopa (podсистема) SK1, SK2, SK3 i SK4. Sklopovi mogu biti sastavljeni od jednog ili više elemenata istog tipa koji su povezani paralelno. Sklopovi SK1, SK2, SK3 i SK4 su sastavljeni od elemenata  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  i  $e_4$  čija je pouzdanost u posmatranom periodu vremena:  $R_1 = 0,7$ ,  $R_2 = 0,6$ ,  $R_3 = 0,5$  i  $R_4 = 0,9$ , dok cena jednog elementa iznosi:  $c_1 = 3$  NJ,  $c_2 = 2$  NJ,  $c_3 = 1$  NJ i  $c_4 = 4$  NJ respektivno.



Odrediti broj elemenata u svakom od sklopova tako da pouzdanost celog sistema  $R_s$  bude veća ili jednaka od  $R_0 = 0,98$  pod uslovom da troškovi nabavke elemenata budu minimalni.

#### **Rešenje:**

Svaki od sklopova SK1, SK2, SK3 i SK4, u rednoj vezi koja čini sistem, sastoji se od  $x_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) elemenata  $e_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) povezanih paralelnom vezom, čija je pouzdanost  $R_n(x_n)$  jednaka:

$$R_n(x_n) = 1 - [1 - R_n]^{x_n}, n = 1, 2, 3, 4.$$

Kako su sklopovi povezani u sistem redno, to je rezultujuća pouzdanost celog sistema jednaka:

$$R_s = R_1(x_1) \cdot R_2(x_2) \cdot R_3(x_3) \cdot R_4(x_4),$$

i ona mora biti veća ili jednaka 0,98 tj.:

$$R_s \geq R_0 = 0,98.$$

Za rešavanje ovog zadatka može da se koristi metoda dinamičkog programiranja. Osnovni pojmovi biće definisani na sledeći način:

ukupan broj etapa  $N \rightarrow$  broj sklopova u sistemu  $N = 4$ ,

etapa  $n \rightarrow n$ -ti sklop ( $n = 1, 2, 3, 4$ ),

promenljiva odlučivanja  $x_n \rightarrow$  broj elemenata  $e_n$  u sklopu  $n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ).

Rešenje zadatka se sastoji u određivanju vrednosti promenljivih  $x_n$  koje daju minimalnu vrednost funkcije cilja  $F$ :

$$\min F = \sum_{n=1}^4 c_n \cdot x_n ,$$

pri ograničenju:

$$\prod_{n=1}^4 R_n(x_n) \geq R_0 .$$

Obzirom da pouzdanost sistema  $R_s$  mora biti veća ili jednaka od  $R_0 = 0,98$ , jasno je da pouzdanost bilo kog od sklopova SK1, SK2, SK3 i SK4 mora biti veća od 0,98.

Stanje  $s_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) definiše se kao: odnos (količnik) zahtevane pouzdanosti sistema  $R_0$  i proizvoda pouzdanosti sklopova  $n+1, \dots, 4$  u zavisnosti od broja elemenata, odnosno:

$$s_n = \frac{R_0}{\prod_{i=n+1}^4 R_i(x_i)} , n = 1, 2, 3; s_4 = R_0,$$

tj. pouzdanost koju treba da ostvare sklopovi ( $i=1, \dots, n$ ).

Rekurentna relacija za izračunavanje  $s_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) glasi:

$$s_n = \frac{s_{n+1}}{R_{n+1}(x_{n+1})} .$$

Pouzdanost  $n$ -tog sklopa u zavisnosti od broja elemenata  $R_n(x_n)$ , na osnovu napred iznetog, mora da se nalazi u granicama:

$$s_n < R_n(x_n) \leq 1 .$$

Minimalno potreban broj elemenata  $x_n$  u sklopu  $n$  da bi se ostvarila potrebna pouzdanost određuje se na osnovu:

$$x_n(s_n) = [x_n] = \frac{\ln(1-s_n)}{\ln(1-R_n)} , n = 1, 2, 3, 4.$$

Oznaka  $[x_n]$  znači da se dobijena vrednost za  $x_n$  zaokružuje na pri veći ceo broj.

Doprinos  $n$ -te etape funkciji cilja  $F$  određuje se na osnovu izraza:

$$f_n(x_n(s_n)) = c_n \cdot x_n(s_n) + f_{n+1}^*(x_{n+1}(s_{n+1})) ,$$

gde je:

$f_{n+1}^*(x_{n+1}(s_{n+1}))$  – prethodno određen optimalni doprinos etapa  $n+1, \dots, 4$  funkciji cilja  $F$ .

Optimalni doprinos  $n$ -te etape funkciji cilja  $F$  određuje se na osnovu rekurentne relacije:

$$f_n^*(x_n(s_n)) = \min_{\substack{x_n \\ s_n < R_n(x_n) \leq 1}} \left[ c_n \cdot x_n(s_n) + f_{n+1}^*(x_{n+1}(s_{n+1})) \right].$$

Doprinos četvrte etape funkciji cilja  $F$  iznosi:

$$f_4(x_4(s_4)) = c_4 \cdot x_4(s_4),$$

dok je optimalni doprinos funkciji cilja  $F$ :

$$f_4^*(x_4(s_4)) = \min_{\substack{x_4 \\ s_4 < R_4(x_4) \leq 1}} c_4 \cdot x_4(s_4).$$

Rešavanje zadatka počinje od četvrte etape - četvrtog sklopa SK4. Rešavanje zadatka može početi od bilo kog sklopa odnosno promenljive a ne samo od četvrtog sklopa tj. od promenljive  $x_4$ . Izbor bilo koje promenljive za početnu ne utiče na dobijeni krajnji rezultat.

#### Etapa 4:

Minimalno potreban broj elemenata  $x_4$  u sklopu 4 određuje se na osnovu:

$$x_4(s_4) \geq [x_4] = \frac{\ln(1-s_4)}{\ln(1-R_4)} = \frac{\ln(1-0,98)}{\ln(1-0,9)} = 1,699 \rightarrow 2.$$

Koristeći relaciju za  $f_4^*(x_4(s_4))$  i  $s_4 = R_0$ , u tabeli Z3-1, prikazani su dobijeni rezultati za četvrtu etapu. (za potrebe izračunavanja krajnji broj elemenata  $x_4$  je određen proizvoljno)

Tabela Z3-1. Četvrta etapa (sklop 4)  $n=4$ .

$s_4$	$x_4(s_4)$	$R_4(x_4)$	$f_4(x_4(s_4)) = 4 \cdot x_4(s_4)$	$f_4^*(x_4(s_4))$	$x_4^*$
0,98	2	0,99	8	8	<u>2</u>
	3	0,999	12	12	<b>3</b>
	4	0,9999	16	16	4
	5	1,0	20	20	5
	6	1,0	24	24	6

### Etapla 3:

Minimalno potreban broj elemenata  $x_3$  u sklopu 3 određuje se na osnovu:

$$x_3(s_3) \geq [x_3] = \frac{\ln(1-s_3)}{\ln(1-R_3)}.$$

Koristeći rekurentne relacije za  $f_n^*(x_n(s_n))$  i  $s_n$  za  $n = 3$ , u tabeli Z3-2, prikazani su dobijeni rezultati za treću etapu.

Tabela Z3-2. Treća etapa (sklop 3)  $n=3$ .

$s_3 = \frac{s_4}{R_4(x_4)}$	$x_3(s_3)$	$R_3(x_3)$	$f_3(x_3(s_3)) =$ $= 1 \cdot x_3(s_3) + f_4^*(x_4(s_4))$	$f_3^*(x_3(s_3))$	$x_3^*$
0,9899	7	0,9922	15	15	<u>7</u>
0,981	6	0,9844	18	18	<b>6</b>
0,9801	6	0,9844	22	22	6
0,98	6	0,9844	26	26	6
0,98	6	0,9844	30	30	6

### Etapla 2:

Minimalno potreban broj elemenata  $x_2$  u sklopu 2 određuje se na osnovu:

$$x_2(s_2) \geq [x_2] = \frac{\ln(1-s_2)}{\ln(1-R_2)}.$$

Koristeći rekurentne relacije za  $f_n^*(x_n(s_n))$  i  $s_n$  za  $n = 2$ , u tabeli Z3-3, prikazani su dobijeni rezultati za drugu etapu.

Tabela Z3-3. Druga etapa (sklop 2)  $n=2$ .

$s_2 = \frac{s_3}{R_3(x_3)}$	$x_2(s_2)$	$R_2(x_2)$	$f_2(x_2(s_2)) =$ $= 2 \cdot x_2(s_2) + f_3^*(x_3(s_3))$	$f_2^*(x_2(s_2))$	$x_2^*$
0,9877	7	0,9984	29	29	<b><u>7</u></b>
0,9966	7	0,9984	32	32	7
0,9957	6	0,9959	34	34	6
0,9956	6	0,9959	38	38	6
0,9956	6	0,9959	42	42	6

### Etapla 1:

Minimalno potreban broj elemenata  $x_1$  u sklopu 1 određuje se na osnovu:

$$x_1(s_1) \geq [x_1] = \frac{\ln(1-s_1)}{\ln(1-R_1)}.$$

Koristeći rekurentne relacije za  $f_n^*(x_n(s_n))$  i  $s_n$  za  $n = 1$ , u tabeli Z3-4, prikazani su dobijeni rezultati za prvu etapu.

Tabela Z3-4. Prva etapa (sklop 1)  $n=1$ .

$s_1 = \frac{s_2}{R_2(x_2)}$	$x_1(s_1)$	$R_1(x_1)$	$f_1(x_1(s_1)) =$ $= 3 \cdot x_1(s_1) + f_2^*(x_2(s_2))$	$f_1^*(x_1(s_1))$	$x_1^*$
0,9993	7	0,9998	50	50	<u>7</u>
0,9982	6	0,9993	50	50	<b>6</b>
0,9998	8	0,9999	58	58	8
0,9997	7	0,9998	59	59	7
0,9997	7	0,9998	63	63	7

Kao što se vidi iz tabele Z3-4 minimalna vrednost funkcije cilja  $F$  iznosi 50 NJ. Konfiguracija sistema sa zahtevanom pouzdanošću  $R_0 \geq 0,98$  uz minimalne troškove može se ostvariti na dva načina.

#### I način

Krećući od poslednje tabele, Z3-4, bira se da je za prvo varijantno rešenje optimalan broj elemenata u prvom sklopu SK1 -  $x_1^* = 7$ . Vraćajući se unazad, iz tabele Z3-3 određuje se optimalan broj elemenata u drugom sklopu SK2 -  $x_2^* = 7$ . Iz tabele Z3-2 određuje se optimalan broj elemenata u trećem sklopu SK3 -  $x_3^* = 7$ , dok je optimalan broj elemenata u četvrtom sklopu SK4 -  $x_4^* = 2$  (tabela Z3-1). (optimalne vrednosti u tabelama za  $x_n^*$  su podvučene)

Minimalni troškovi u ovom slučaju iznose:

$$\min F = \sum_{n=1}^4 c_n \cdot x_n^* = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 7 + 4 \cdot 2 = 50 \text{ NJ},$$

dok pouzdanost ove konfiguracije sistema iznosi:

$$R_s = R_1(x_1^*) \cdot R_2(x_2^*) \cdot R_3(x_3^*) \cdot R_4(x_4^*) = R_1(7) \cdot R_2(7) \cdot R_3(7) \cdot R_4(2),$$

$$R_s = 0,9998 \cdot 0,9984 \cdot 0,9922 \cdot 0,99 = 0,9805.$$

#### II način

Na isti način kao i u prethodnom slučaju, krećući od poslednje tabele Z3-4, bira se da je za drugo varijantno rešenje optimalan broj elemenata u prvom sklopu SK1 -  $x_1^* = 6$ . Vraćajući se unazad, iz tabele Z3-3 određuje se optimalan broj elemenata u

drugom sklopu SK2 -  $x_2^* = 7$ , iz tabele Z3-2 optimalan broj elemenata u trećem sklopu SK3 -  $x_3^* = 6$ , dok se iz tabele Z3-1 određuje optimalan broj elemenata u četvrtom sklopu SK4 -  $x_4^* = 3$ . (optimalne vrednosti u tabelama za  $x_n^*$  su boldovane)

Minimalni troškovi u ovom slučaju iznose:

$$\min F = \sum_{n=1}^4 c_n \cdot x_n^* = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = 50 \text{ NJ},$$

dok pouzdanost ove konfiguracije sistema iznosi:

$$\begin{aligned} R_s &= R_1(x_1^*) \cdot R_2(x_2^*) \cdot R_3(x_3^*) \cdot R_4(x_4^*) = R_1(6) \cdot R_2(7) \cdot R_3(6) \cdot R_4(3), \\ R_s &= 0,9993 \cdot 0,9984 \cdot 0,9844 \cdot 0,999 = 0,9812. \end{aligned}$$

Kako su cene elemenata u obe konfiguracije sistema iste tj. 50 NJ, usvaja se drugo varijantno rešenje jer ima veću pouzdanost.

## **Zadatak 04**

Za složeni uređaj (sistem), prikazan na slici u prethodnom zadatku, odrediti broj paralelno povezanih elemenata u redno povezanim sklopovima (podsystemima) SK1, SK2, SK3 i SK4, koji obezbeđuju maksimalnu pouzdanost sistema  $R_s$  pod uslovom da se za to može utrošiti najviše  $C_s = 21$  NJ. Sklopovi SK1, SK2, SK3 i SK4 su sastavljeni od elemenata  $e_1, e_2, e_3$  i  $e_4$  čija je pouzdanost u posmatranom periodu vremena:  $R_1 = 0,7, R_2 = 0,6, R_3 = 0,5$  i  $R_4 = 0,9$ , dok cena jednog elementa iznosi:  $c_1 = 3$  NJ,  $c_2 = 2$  NJ,  $c_3 = 1$  NJ i  $c_4 = 4$  NJ respektivno.

### **Rešenje:**

Rešenje ovog problema zahteva donošenje četiri međusobno povezane odluke tj. koliko od 21 NJ utrošiti za nabavku elemenata pojedinih sklopova a da pri tom pouzdanost sistema bude maksimalna. Postojeća četiri sklopa se mogu posmatrati kao četiri etape ( $N = 4$ ) u formulaciji zadatka dinamičkog programiranja (etapa  $n \rightarrow n$ -ti sklop).

Da bi sistem mogao da radi, svaki sklop mora da ima najmanje jedan element  $e_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ). To znači da od ukupne raspoložive količine NJ treba oduzeti onoliko NJ koliko je potrebno za nabavku jednog elementa za svaki od sklopova tj.

$$\Delta C = 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 + 1 \cdot c_4 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 10 \text{ NJ},$$

što daje količinu od:

$$C_0 = C_s - \Delta C = 21 - 10 = 11 \text{ NJ},$$

koja je raspoloživa za nabavku elemenata u cilju povećanja pouzdanosti.

Na osnovu gore iznetog, promenljive odlučivanja  $x_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) u ovom slučaju će predstavljati broj elemenata u sklopu  $n$  umanjen za jedan. Kako se svaki sklopova SK1, SK2, SK3 i SK4 za ovako definisano  $x_n$ , sastoji se od  $x_n+1$  elemenata  $e_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) povezanih paralelnom vezom, to se pouzdanost svakog od sklopova izračunava kao:

$$R_n(x_n) = 1 - [1 - R_n]^{x_n+1}, n = 1, 2, 3, 4.$$

Stanje  $s_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) za datu etapu definiše se kao količina novčanih jedinica raspoloživih za nabavku elemenata za preostale sklopove - etape (uključujući i tekuću etapu) ( $n, \dots, 3$ ). U etapama 2, 3, 4 stanje  $s_n$  se određuje kad se od ukupno raspoložive količine  $C_0 = 11$  NJ oduzme količina NJ dodeljena za nabavku

elemenata u prethodnim etapama. Stanja po etapama su definisana sledećim izrazima:

$$s_1 \leq 11, \quad s_2 \leq s_1 - c_1 \cdot x_1, \quad s_3 \leq s_2 - c_2 \cdot x_2, \quad s_4 \leq s_3 - c_3 \cdot x_3, \quad \text{ili} \\ s_{n+1} \leq s_n - c_n \cdot x_n, \quad n = 2, 3, 4; \quad s_1 \leq 11.$$

Znaci nejednakosti (manje jednako) u izrazima za  $s_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) odnose se na mogućnost da zbog toga što je broj elemenata u sklopu celobrojna vrednost, nije moguće utrošiti celokupnu raspoloživu količinu  $C_0 = 11$  NJ.

Rešenje zadatka se sastoji u određivanju vrednosti promenljivih  $x_n$  koje daju maksimalnu vrednost funkcije cilja  $R_s$ :

$$\max R_s = \prod_{n=1}^4 R_n(x_n),$$

pri ograničenju:

$$\sum_{n=1}^4 c_n \cdot x_n \leq C_0 = 11 \text{ NJ.}$$

Granice u kojima se mogu kretati vrednosti promenljivih odlučivanja  $x_n$  se određuju na sledeći način:

$$0 \leq x_n \leq \left[ \frac{C_0}{c_n} \right]; \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

gde [...] označava celobrojnu vrednost količnika.

Dozvoljene vrednosti za  $x_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) su:

$$0 \leq x_1 \leq \left[ \frac{11}{3} \right] = 3; \quad 0 \leq x_2 \leq \left[ \frac{11}{2} \right] = 5; \quad 0 \leq x_3 \leq \left[ \frac{11}{1} \right] = 11; \quad 0 \leq x_4 \leq \left[ \frac{11}{4} \right] = 2.$$

Procedura rešavanja kreće od poslednje četvrte etape i pomera se unazad etapu po etapu. Kada se procedura rešavanja nalazi u drugoj, trećoj ili četvrtoj etapi tada još nisu poznate količine NJ dodeljene prethodnim etapama zbog čega se mora razmotriti svako moguće stanje koje može da se realizuje u etapama 2, 3 i 4. Drugim rečima moraju da se uzmu u obzir stanja  $s_n = 0, 1, \dots, 11$  ( $n = 2, 3, 4$ ).

Etapu 4:

Za četvrtu etapu (sklop), doprinos funkciji cilja, se obrađuje na sledeći način:

$$f_4(s_4, x_4) = R_4(x_4) \cdot f_5^*(s_5).$$



Kako je  $f_5^*(s_5) = 0$ , to je:

$$f_4(s_4, x_4) = R_4(x_4) = 1 - [1 - R_4]^{x_n+1}.$$

Optimalni doprinos četvrte etape funkciji cilja je:

$$f_4^*(s_4) = \max_{0 \leq x_4 \leq 2} R_4(x_4).$$

Koristeći rekurentnu relaciju za  $f_4^*(s_4)$ , u tabeli Z4-1, prikazani su dobijeni rezultati za četvrtu etapu.

Tabela Z4-1. Četvrta etapa (sklop 4)  $n=4$ ,  $c_4 = 4$ .

$s_4$	$x_4$	$f_4(s_4, x_4) = R_4(x_4)$	$f_4^*(s_4)$	$x_4^*$
0	0	0,9	0,9	<u>0</u>
1	0	0,9	0,9	0
2	0	0,9	0,9	0
3	0	0,9	0,9	0
4	1	0,99	0,99	1
5	1	0,99	0,99	1
6	1	0,99	0,99	1
7	1	0,99	0,99	1
8	2	0,999	0,999	2
9	2	0,999	0,999	2
10	2	0,999	0,999	2
11	2	0,999	0,999	2

### Etapa 3:

Za treću etapu (sklop), doprinos funkciji cilja, se odrađuje na sledeći način:

$$f_3(s_3, x_3) = R_3(x_3) \cdot f_4^*(s_4),$$

odnosno:

$$f_3(s_3, x_3) = R_3(x_3) \cdot f_4^*(s_3 - c_3 \cdot x_3).$$

Optimalni doprinos treće etape funkciji cilja je:

$$f_3^*(s_3) = \max_{0 \leq x_3 \leq 11} [R_3(x_3) \cdot f_4^*(s_3 - c_3 \cdot x_3)].$$

Koristeći rekurentnu relaciju za  $f_3^*(s_3)$ , u tabeli Z4-2, prikazani su dobijeni rezultati za treću etapu.

Tabela Z4-2. Treća etapa (sklop 3)  $n=3$ .

$c_3 = 1$	$f_3(s_3, x_3) = R_3(x_3) \cdot f_4^*(s_3 - c_3 \cdot x_3)$												$f_3^*(s_3)$	$x_3^*$
$c_3 \cdot x_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
$s_3 \backslash x_3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
0	0,4500												0,4500	0
1	0,4500	0,6750											0,6750	1
2	0,4500	0,6750	0,7875										0,7875	2
3	0,4500	0,6750	0,7875	0,8438									0,8438	3
4	0,4950	0,6750	0,7875	0,8438	0,8719								0,8719	4
5	0,4950	0,7425	0,7875	0,8438	0,8719	0,8859							0,8859	5
6	0,4950	0,7425	0,8663	0,8438	0,8719	0,8859	0,8930						0,8930	6
7	0,4950	0,7425	0,8663	0,9281	0,8719	0,8859	0,8930	0,8965					0,9281	3
8	0,4995	0,7425	0,8663	0,9281	0,9591	0,8859	0,8930	0,8965	0,8982				0,9591	4
9	0,4995	0,7493	0,8663	0,9281	0,9591	0,9745	0,8930	0,8965	0,8982	0,8991			0,9745	5
10	0,4995	0,7493	0,8741	0,9281	0,9591	0,9745	0,9823	0,8965	0,8982	0,8991	0,8996		0,9823	6
11	0,4995	0,7493	0,8741	0,9366	0,9591	0,9745	0,9823	0,9861	0,8982	0,8991	0,8996	0,8998	0,9861	7

Etapa 2:

Rekurentna relacija za izračunavanje doprinosa druge etape (sklop 2) funkciji cilja, je sledećeg oblika:

$$f_2(s_2, x_2) = R_2(x_2) \cdot f_3^*(s_3), \text{ tj. } f_2(s_2, x_2) = R_2(x_2) \cdot f_3^*(s_2 - c_2 \cdot x_2).$$

Optimalni doprinos druge etape funkciji cilja je: (Tabela Z4-3)

$$f_2^*(s_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq 5} [R_2(x_2) \cdot f_3^*(s_2 - c_2 \cdot x_2)].$$

Tabela Z4-3. Druga etapa (sklop 2)  $n=2$ .

$c_2 = 2$	$f_2(s_2, x_2) = R_2(x_2) \cdot f_3^*(s_2 - c_2 \cdot x_2)$						$f_2^*(s_2)$	$x_2^*$
$c_2 \cdot x_2$	0	2	4	6	8	10		
$s_2 \backslash x_2$	0	1	2	3	4	5		
0	0,2700						0,2700	0
1	0,4050						0,4050	0
2	0,4725	0,3780					0,4725	0
3	0,5063	0,5670					0,5670	1
4	0,5231	0,6615	0,4212				0,6615	1
5	0,5316	0,7088	0,6318				0,7088	1
6	0,5358	0,7324	0,7371	0,4385			0,7371	2
7	0,5569	0,7442	0,7898	0,6577			0,7898	2
8	0,5754	0,7501	0,8161	0,7673	0,4454		0,8161	2
9	0,5847	0,7796	0,8292	0,8222	0,6681		0,8292	2
10	0,5894	0,8056	0,8358	0,8496	0,7794	0,4482	0,8496	3
11	0,5917	0,8186	0,8687	0,8633	0,8351	0,6722	0,8687	2

### Etapa 1:

Za prvu etapu (sklop 1), doprinos funkciji cilja određuje se preko rekurentne relacije oblika:

$$f_1(s_1, x_1) = R_1(x_1) \cdot f_2^*(s_2), \text{ tj. } f_1(s_1, x_1) = R_1(x_1) \cdot f_2^*(s_1 - c_1 \cdot x_1).$$

Optimalni doprinos prve etape funkciji cilja je: (Tabela Z4-4)

$$f_1^*(s_1) = \max_{0 \leq x_1 \leq 3} [R_1(x_1) \cdot f_2^*(s_1 - c_1 \cdot x_1)].$$

Tabela Z4-4. Prva etapa (sklop 1)  $n=1$ .

$c_1 = 3$	$f_1(s_1, x_1) = R_1(x_1) \cdot f_2^*(s_1 - c_1 \cdot x_1)$				$f_1^*(s_1)$	$x_1^*$
$c_1 \cdot x_1$	0	3	6	9		
$x_1$	0	1	2	3		
$s_1$						
11	0,6081	0,7426	0,6896	0,4687	0,7426	1

Na osnovu rezultata iz tabele Z4-4 maksimalna vrednost funkcije cilja, tj. maksimalna pouzdanost sistema pri postavljenim ograničenjima iznosi  $R_s=0,7426$ . Broj elemenata u pojedinim sklopovima određuje se iz tabela Z3-1÷4 krećući se unazad tj. počevši od prve etape - sklopa.

Optimalna vrednost promenljive odlučivanja u prvoj etapi, za  $s_1 = C_0=11$  NJ, iznosi  $x_1^* = 1$  (tabela Z4-4), što znači da je broj elemenata u sklopu SK1 jednak 2. Pouzdanost prvog sklopa iznosi:  $R_1(x_1^*) = 0,91$ .

Za vrednost  $s_2 = s_1 - c_1 \cdot x_1^* = 11 - 3 \cdot 1 = 8$ , tabela Z4-3 - etapa 2, optimalna vrednost promenljive odlučivanja iznosi  $x_2^* = 2$ . Broj elemenata drugog sklopa SK2 iznosi 3, dok je pouzdanost sklopa SK2  $R_2(x_2^*) = 0,936$ .

Za vrednost  $s_3 = s_2 - c_2 \cdot x_2^* = 8 - 2 \cdot 2 = 4$ , tabela Z4-2 - etapa 3, optimalna vrednost promenljive odlučivanja iznosi  $x_3^* = 4$ . Broj elemenata trećeg sklopa SK3 iznosi 5, dok je pouzdanost sklopa SK3  $R_3(x_3^*) = 0,9688$ .

U četvrtoj etapi vrednost promenljive stanja iznosi  $s_4 = s_3 - c_3 \cdot x_3^* = 4 - 1 \cdot 4 = 0$ , na osnovu čega se, iz tabele Z4-1 za etapu 4, dobija da je optimalna vrednost

promenljive odlučivanja  $x_4^* = 0$ . Broj elemenata četvrtog sklopa SK4 iznosi 1, dok je pouzdanost sklopa SK4  $R_4(x_4^*) = 0,9$ .

Maksimalna pouzdanost sistema iznosi:

$$R_s = R_1(x_1^*) \cdot R_2(x_2^*) \cdot R_3(x_3^*) \cdot R_4(x_4^*) = R_1(1) \cdot R_2(2) \cdot R_3(4) \cdot R_4(0),$$
$$R_s = 0,91 \cdot 0,936 \cdot 0,9688 \cdot 0,9 = 0,7426.$$

Iznos troškova sa kojima se ostvaruje maksimalna pouzdanost je:

$$C_s = \sum_{n=1}^4 c_n \cdot x_n^* = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 0 = 11 \text{ NJ},$$

što je jednako raspoloživoj količini od  $C_0$  NJ.

## **Zadatak 05**

U okviru jednog preduzeća potrebno je po pogonima rasporediti jednorodni resurs u količini od  $S = 5$  jedinica. Karakteristika resursa je da se on može dodeljivati samo u celobrojnim jedinicama. Posmatrani resurs treba rasporediti na tri pogona tako da se dobije maksimalna dobit za preduzeće u celini. Očekivana dobit u pojedinim pogonima u zavisnosti od količine dodeljenog resursa data je u tabeli.

- a) Formirati matematički model problema,
- b) Odrediti optimalni plan raspodele resursa.

Resurs [jed.]	Ostvarena dobit, $c_n$ [NJ]		
	Pogon ( $n$ )		
	1	2	3
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130

### **Rešenje:**

Rešenje ovog problema zahteva donošenje tri međusobno povezane odluke tj. koliko jedinica resursa da se dodeli svakom od tri pogona. Iako redosled pogona nije određen, postojeća tri pogona se mogu posmatrati kao tri etape u formulaciji zadatka dinamičkog programiranja.

Promenljive odlučivanja  $x_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) u ovom slučaju će predstavljati broj jedinica resursa koji se dodeljuje u odgovarajućoj etapi odnosno odgovarajućem pogonu.

Stanje  $s_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) za datu etapu definiše se kao broj jedinica resursa koji je raspoloživ za raspodelu na preostale etape - pogone ( $n, \dots, 3$ ). U prvoj etapi, kada su sva tri pogona u igri za raspodelu resursa,  $s_1 = S = 5$ . U etapama 2 ili 3 (pogoni 2 ili 3) stanje  $s_n$  se dobija kada se od  $S = 5$  oduzme broj jedinica resursa dodeljen prethodnim etapama (pogonima). Stanja po etapama definisana su sledećim izrazima:

$$s_1 = 5, \quad s_2 = s_1 - x_1, \quad s_3 = s_2 - x_2.$$

a) Da bi se zadatak matematički formulisao potrebno je  $c_n(x_n)$  - doprinos  $n$ -te etape funkciji cilja, definisati kao ostvarenu dobit ako se u etapi (pogonu)  $n$  dodeli broj od  $x_n$  jedinica resursa (tabela u postavci zadatka). Raspoložive vrednosti za  $x_n$  su celi brojevi u intervalu od 0 do 5. Tada je cilj da se  $x_1, x_2, x_3$  izaberu tako da se maksimizira funkcija cilja, tj.:

$$\max F = c_1(x_1) + c_2(x_2) + c_3(x_3),$$

pri ograničenju:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5,$$

gde su  $x_1, x_2, x_3$  celobrojne nenegativne veličine.

b) Procedura rešavanja kreće od poslednje treće etape i pomera se unazad etapu po etapu. Kada se procedura rešavanja nalazi u drugoj ili trećoj etapi tada još nisu poznate količine resursa dodeljene prethodnim etapama zbog čega se mora razmotriti svako moguće stanje koje može da se realizuje u etapama 2 i 3. Drugim rečima moraju da se uzmu u obzir stanja  $s_n = 0, 1, 2, 3, 4$  i  $5$  ( $n = 2, 3$ ).

Za treću etapu (pogon), optimalan doprinos funkciji cilja, se odrađuje na sledeći način:

$$f_3(s_3, x_3) = c_3(x_3) + f_4^*(s_3 - x_3), \quad f_4^*(s_3 - x_3) = 0,$$

$$f_3^*(s_3) = f_3(s_3, x_3^*) = \max_{x_3=0,1,\dots,s_3} c_3(x_3) = c_3(x_3^*), \quad x_3^* = s_3.$$

Drugim rečima, ako su za treću etapu (pogon) ostale raspoložive  $s_3$  jedinice resursa to se maksimum  $c_3(x_3)$  automatski dobija dodeljivanjem svih  $s_3$  jedinica trećem pogonu tj.  $x_3^* = s_3$  i  $f_3^*(s_3) = c_3(s_3)$ , tabela Z5-1. (Vrednosti za  $c_3$  se nalaze u krajnjoj desnoj koloni u tabeli u postavci zadatka)

U tabeli Z5-1, za treću etapu, prikazane su vrednosti za: početna stanja  $s_3$ , promenljivu odlučivanja  $x_3$ , doprinos funkciji cilja  $f_3(s_3, x_3)$  kao i optimalni (maksimalni) doprinos funkciji cilja  $f_3^*(s_3)$  u zavisnosti od početnog stanja  $s_3$  i optimalna vrednost promenljive odlučivanja  $x_3^*$  u zavisnosti od početnog stanja  $s_3$ .

Tabela Z5-1. Treća etapa (pogon 3)  $n=3$ .

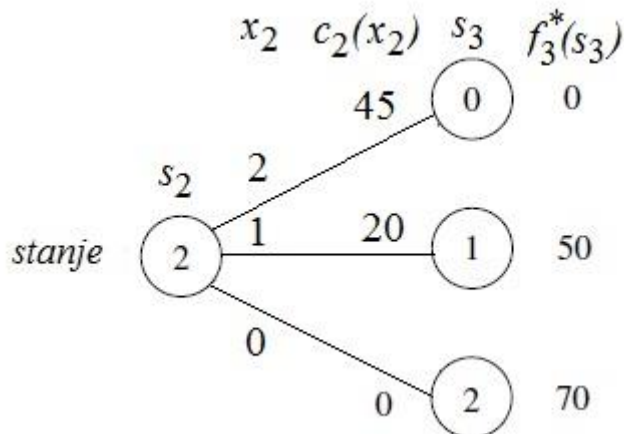
$s_3 \backslash x_3$	$f_3(s_3, x_3) = c_3(x_3)$	$f_3^*(s_3)$	$x_3^*$
	$x_3 = s_3$		
0	0	0	0
1	50	50	1
2	70	70	2
3	80	80	3
4	100	100	4
5	130	130	5

Procedura rešavanja se sada pomera za jednu etapu u nazad, tj. na pogon 2. Za drugu etapu (pogon), optimalan doprinos funkciji cilja, odrađuje se na sledeći način:

$$f_2(s_2, x_2) = c_2(x_2) + f_3^*(s_2 - x_2),$$

$$f_2^*(s_2) = f_2(s_2, x_2^*) = \max_{x_2=0,1,\dots,s_2} \left[ c_2(x_2) + f_3^*(s_2 - x_2) \right], \quad s_3 = s_2 - x_2.$$

Kao što se vidi iz prethodnog izraza promenljiva odlučivanja može da uzme vrednosti od 0 do  $s_2$ , gde  $s_2$  predstavlja raspoloživu količinu jedinica resursa za etape 2 i 3. Sam postupak izračunavanja biće prikazana za vrednost  $s_2=2$ . (slika Z5-1)



Slika Z5-1. Druga etapa ( $s_2=2$ ).

Ukoliko se pogonu 2 ne dodeli ni jedna jedinica resursa ( $x_2=0$ ), to znači da će sva raspoloživa količina resursa biti dodeljena trećem pogonu  $s_3 = s_2 - x_2 = 2 - 0 = 2$ . Ako se pogonu 2 dodeli jedna jedinica resursa  $x_2=1$ , to će raspoloživa količina resursa za treći pogon biti  $s_3 = 1$ , odnosno za  $x_2=2$   $s_3 = 0$ . Odgovarajuće vrednosti za  $c_2(x_2)$  date su u drugoj koloni sa desne strane u tabeli pri postavci zadatka, dok su vrednosti za  $f_3^*(s_3)$  date u tabeli Z5-1 (druga kolona sa desne strane).

Zamenom  $s_2=2$  u prvu od gornjih formula dobija se:

$$f_2(2, x_2) = c_2(x_2) + f_3^*(2 - x_2),$$

$$x_2=0; \quad f_2(2,0) = c_2(0) + f_3^*(2) = 0 + 70 = 70,$$

$$x_2=1; \quad f_2(2,1) = c_2(1) + f_3^*(1) = 20 + 50 = 70,$$

$$x_2=2; \quad f_2(2,2) = c_2(2) + f_3^*(0) = 45 + 0 = 45.$$

Kako ostvarenu dobit treba maksimizirati, to su optimalne vrednosti promenljive odlučivanja  $x_2^* = 0$  ili 1 sa optimalnim (maksimalnim) doprinosom funkciji cilja  $f_2^*(s_2 = 2) = 70$ .

Procedura izračunavanja za ostale moguće vrednosti za  $s_2$  je slična prikazanoj za  $s_2=2$  a rezultati su dati u tabeli Z5-2.

Tabela Z5-2. Druga etapa (pogon 2)  $n=2$ .

$s_2 \backslash x_2$	$f_2(s_2, x_2) = c_2(x_2) + f_3^*(s_2 - x_2)$						$f_2^*(s_2)$	$x_2^*$
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1	50	20					50	0
2	70	70	45				70	0 ili 1
3	80	90	95	75			95	2
4	100	100	115	125	110		125	3
5	130	120	125	145	160	150	160	4

Procedura rešavanja se pomera u nazad na prvu etapu, tj. na pogon 1. Za prvu etapu (pogon), optimalan doprinos funkciji cilja, odrađuje se na sledeći način:

$$f_1(s_1, x_1) = c_1(x_1) + f_2^*(s_1 - x_1), \quad s_1 = 5,$$

$$f_1^*(s_1) = f_1(s_1, x_1^*) = \max_{x_1=0,1,\dots,5} \left[ c_1(x_1) + f_2^*(s_1 - x_1) \right] \quad s_2 = s_1 - x_1.$$

Promenljiva odlučivanja u prvoj etapi može da uzme vrednosti od 0 do  $s_1$ . Kako se radi o prvoj etapi (pogonu) na raspolaganju za raspodelu, za sva tri pogona, je ukupna količina resursa od  $s_1 = 5$  jedinica. Npr. ako se prvom pogonu dodeli količina od  $x_1=2$  jedinica resursa, to će za raspodelu na pogone 2 i 3 ostati  $s_2 = s_1 - x_1 = 5 - 2 = 3$  jedinice resursa, itd.



Odgovarajuće vrednosti za  $c_1(x_1)$  date su u drugoj koloni u tabeli pri postavci zadatka, dok su vrednosti za  $f_2^*(s_2)$  date u tabeli Z5-2 (druga kolona sa desne strane).

Zamenom  $s_1=5$  u prvu od gornjih formula dobija se:

$$f_1(5, x_1) = c_1(x_1) + f_2^*(5 - x_1),$$

$$x_1=0; \quad f_1(5,0) = c_1(0) + f_2^*(5) = 0 + 160 = 160,$$

$$x_1=1; \quad f_1(5,1) = c_1(1) + f_2^*(4) = 45 + 125 = 170,$$

$$x_1=2; \quad f_1(5,2) = c_1(2) + f_2^*(3) = 70 + 95 = 165,$$

$$x_1=3; \quad f_1(5,3) = c_1(3) + f_2^*(2) = 90 + 70 = 160,$$

$$x_1=4; \quad f_1(5,4) = c_1(4) + f_2^*(1) = 105 + 50 = 155,$$

$$x_1=5; \quad f_1(5,5) = c_1(5) + f_2^*(0) = 120 + 0 = 120.$$

Dobijeni rezultati prokazani su u tabeli Z5-3.

Tabela Z5-3. Prva etapa (pogon 1)  $n=1$ .

$s_1 \backslash x_1$	$f_1(s_1, x_1) = c_1(x_1) + f_2^*(s_1 - x_1)$						$f_1^*(s_1)$	$x_1^*$
	0	1	2	3	4	5		
5	160	170	165	160	155	120	170	1

Na osnovu rezultata u tabeli Z5-3 zaključuje se da je ukupna maksimalna dobit  $f_1^*(s_1) = 170$  NJ, dok je raspodela resursa po pogonima sledeća:

- u prvi pogon se raspoređuje količina od  $x_1^* = 1$  jedinica resursa, što daje doprinos funkciji cilja od  $c_1(x_1^*) = 45$  NJ. Količina resursa koja ostaje da se rasporedi na pogone 2 i 3 je  $s_2 = s_1 - x_1^* = 5 - 1 = 4$  jedinice.
- drugom pogonu se na osnovu  $s_2 = 4$  dodeljuje količina od  $x_2^* = 3$  jedinice resursa, što daje doprinos funkciji cilja od  $c_2(x_2^*) = 75$  NJ. Količina resursa koja ostaje da se dodeli pogonu 3 je  $s_3 = s_2 - x_2^* = 4 - 3 = 1$  jedinica.
- trećem pogonu se automatski dodeljuje preostala količina resursa tj.  $x_3^* = s_3 = 1$  što daje doprinos funkciji cilja od  $c_3(x_3^*) = 50$  NJ.

Maksimalna vrednost funkcije cilja, tj. maksimalna ukupna dobit, iznosi:

$$F = c_1(x_1^* = 1) + c_2(x_2^* = 3) + c_3(x_3^* = 1) = 45 + 75 + 50 = 170 \text{ NJ.}$$

## **Zadatak 06**

U toku tri smene potrebno je proizvesti  $S = 12$  jedinica nekog proizvoda. Ako se u  $n$ -toj smeni proizvodi  $x_n$  jedinica proizvoda, troškovi proizvodnje iznose  $C_n \cdot x_n^2$  NJ. Potrebno je odrediti takav plan proizvodnje da ukupni troškovi proizvodnje budu minimalni. U toku jedne smene moguće je proizvesti maksimalno 6 jedinica proizvoda.

a) formirati matematički model problema,

b) za brojne vrednosti  $C_1=20$ ,  $C_2=34$  i  $C_3=42$  naći optimalni plan proizvodnje.

### **Rešenje:**

Rešenje ovog problema zahteva donošenje tri međusobno povezane odluke tj. koliko jedinica proizvoda proizvoditi u svakoj smeni. Smene se mogu posmatrati kao tri etape u formulaciji zadatka dinamičkog programiranja.

Promenljive odlučivanja  $x_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) predstavljaju broj jedinica proizvoda koji se proizvodi u odgovarajućoj smeni.

Stanje  $s_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) za datu etapu definiše se kao broj jedinica proizvoda koji je preostao da se proizvede u narednim etapama - smenama ( $n, \dots, 3$ ). U prvoj etapi, kada se razmatraju sve tri smene,  $s_1 = S = 12$ . Za etape - smene 2 ili 3 stanje  $s_n$  se određuje kada se od  $S = 12$  oduzme broj jedinica proizvoda proizveden u prethodnim etapama - smenama  $x_n$  ( $n = 1, 2$ ). Stanja po etapama definisana su sledećim izrazima:

$$s_1 = 12, \quad s_2 = s_1 - x_1, \quad s_3 = s_2 - x_2; \quad 0 \leq x_n \leq 6, n = 1, 2.$$

a) Kako  $C_n \cdot x_n^2$  ( $n = 1, 2, 3$ ) predstavljaju troškove proizvodnje  $x_n$  proizvoda u datoj smeni i kako su raspoložive vrednosti za  $x_n$  celi brojevi u intervalu od 0 do 6, tada je cilj da se  $x_1, x_2, x_3$  izaberu tako da se minimizira funkcija cilja, tj.:

$$\min F = C_1 \cdot x_1^2 + C_2 \cdot x_2^2 + C_3 \cdot x_3^2,$$

pri ograničenjima:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$

$$0 \leq x_n \leq 6, \quad n = 1, 2, 3.$$

gde su  $x_1, x_2, x_3$  celobrojne nenegativne veličine.

b) Procedura rešavanja kreće od poslednje treće etape i pomera se unazad etapu po etapu. Kada se procedura rešavanja nalazi u drugoj ili trećoj etapi tada još nije poznato koliko je jedinica proizvoda proizvedeno u prethodnim etapama - smenama zbog čega se mora razmotriti svako moguće stanje koje može da se realizuje u etapama 2 i 3. U drugoj etapi moraju da se uzmu u obzir stanja  $s_2 = 6, 7, 8, \dots, 12$ , dok se za treću etapu - smenu trebaju razmatrati stanja  $s_3 = 0, 1, 2, \dots, 6$  zbog ograničenja  $0 \leq x_n \leq 6$ .

Za treću etapu - smenu, optimalan doprinos funkciji cilja, se odrađuje na sledeći način:

$$f_3(s_3, x_3) = C_3 \cdot x_3^2 + f_4^*(s_3 - x_3), \quad f_4^*(s_3 - x_3) = 0,$$

$$f_3^*(s_3) = f_3(s_3, x_3^*) = \min_{x_3=0,1,\dots,s_3 \leq 6} C_3 \cdot x_3^2, \quad x_3^* = s_3, \quad C_3 = 42.$$

Drugim rečima, ako je preostalo da se u trećoj etapi - smeni proizvede  $s_3$  jedinice proizvoda to se minimum  $C_3 \cdot x_3^2$  automatski dobija dodeljivanjem da se svih  $s_3$  jedinica proizvoda proizvodi u trećoj smeni tj.  $x_3^* = s_3$  i  $f_3^*(s_3) = C_3 \cdot x_3^2$ , tabela Z6-1, vodeći računa o ograničenju  $0 \leq x_3 \leq 6$ .

U tabeli Z6-1, za treću etapu, prikazane su vrednosti za: početna stanja  $s_3$ , promenljivu odlučivanja  $x_3$ , doprinos funkciji cilja  $f_3(s_3, x_3)$  kao i optimalni (minimalni) doprinos funkciji cilja  $f_3^*(s_3)$  u zavisnosti od početnog stanja  $s_3$  i optimalna vrednost promenljive odlučivanja  $x_3^*$  u zavisnosti od početnog stanja  $s_3$ .

Tabela Z6-1. Treća etapa (smena 3)  $n=3$ .

$s_3 \backslash x_3$	$f_3(s_3, x_3) = 42 \cdot x_3^2$	$f_3^*(s_3)$	$x_3^*$
	$x_3 = s_3$		
0	0	0	0
1	42	42	1
2	168	168	2
3	378	378	3
4	672	672	4
5	1050	1050	5
6	1512	1512	6
7÷12	÷	÷	÷

Procedura rešavanja se sada pomera za jednu etapu u nazad, tj. na smenu 2. Za drugu etapu - smenu, optimalan doprinos funkciji cilja, odrađuje se na sledeći način:

$$f_2(s_2, x_2) = C_2 \cdot x_2^2 + f_3^*(s_2 - x_2),$$

$$f_2^*(s_2) = f_2(s_2, x_2^*) = \min_{x_2=0,1,\dots,6} [C_2 \cdot x_2^2 + f_3^*(s_2 - x_2)],$$

$$s_3 = s_2 - x_2, \quad C_2 = 34.$$

Kao što se vidi iz prethodnog izraza promenljiva odlučivanja  $x_2$  može da uzme vrednosti 0, 1, ..., 5, 6, dok  $s_2$  može da uzme vrednosti od 6 do 12, jer je moguće da se u prvoj smeni ne proizvede ni jedna jedinica proizvoda, tj. da je  $x_1^* = 0$ . Drugim rečima, u prvoj smeni nije moguće proizvesti više od 6 jedinica proizvoda (na osnovu uslova), te samim time nije moguće da preostali broj jedinica u drugoj smeni ( $s_2$ ) bude manji od 6.

U tabeli Z6-2, za drugu etapu, prikazane su vrednosti za: dopustiva početna stanja  $s_2$ , promenljivu odlučivanja  $x_2$ , doprinos funkciji cilja  $f_2(s_2, x_2)$  kao i optimalni (minimalni) doprinos funkciji cilja  $f_2^*(s_2)$  u zavisnosti od početnog stanja  $s_2$  i promenljive odlučivanja  $x_2$  kao i optimalna vrednost promenljive odlučivanja  $x_2^*$  u zavisnosti od početnog stanja  $s_2$ .

Tabela Z6-2. Druga etapu (pogon 2)  $n=2$ .

$s_2 \backslash x_2$	$f_2(s_2, x_2) = C_2 \cdot x_2^2 + f_3^*(s_2 - x_2)$							$f_2^*(s_2)$	$x_2^*$
	0	1	2	3	4	5	6		
6	1512	1084	808	684	712	892	1224	684	3
7		1546	1186	978	922	1018	1266	922	4
8			1648	1356	1216	1228	1392	1216	4
9				1818	1594	1522	1602	1522	5
10					2056	1900	1896	1896	6
11						2362	2274	2274	6
12							2736	2736	6

Procedura rešavanja se pomera u nazad na prvu etapu, tj. na smenu 1. Za prvu etapu - smenu, optimalan doprinos funkciji cilja, odrađuje se na sledeći način:

$$f_1(s_1, x_1) = C_1 \cdot x_1^2 + f_2^*(s_1 - x_1), \quad s_1 = 12,$$

$$f_1^*(s_1) = f_1(s_1, x_1^*) = \min_{x_1=0,1,\dots,6} [C_1 \cdot x_1^2 + f_2^*(s_1 - x_1)],$$

$$s_2 = s_1 - x_1, \quad C_1 = 20.$$

Promenljiva odlučivanja  $x_1$  u prvoj etapi može da uzme vrednosti od 0 do 6. Kako se radi o prvoj etapi - smeni, to u sve tri smene treba proizvesti ukupnu količinu od  $s_1 = 12$  jedinica proizvoda. Npr. ako se prvoj smeni proizvede količina od  $x_1=2$  jedinice proizvoda, to će za proizvodnju u smenama 2 i 3 ostati  $s_2 = s_1 - x_1 = 12 - 2 = 10$  jedinica proizvoda, itd.

U tabeli Z6-3, za prvu etapu, prikazane su vrednosti za: promenljivu odlučivanja  $x_1$ , doprinos funkciji cilja  $f_1(s_1, x_1)$  kao i optimalni (minimalni) doprinos funkciji cilja  $f_1^*(s_1)$  u zavisnosti od početnog stanja  $s_1$  i promenljive odlučivanja  $x_1$  kao i optimalna vrednost promenljive odlučivanja  $x_1^*$  u zavisnosti od početnog stanja  $s_1$ .

Tabela Z6-3. Prva etapa (smena 1)  $n=1$ .

$s_1 \backslash x_1$	$f_1(s_1, x_1) = 20 \cdot x_1^2 + f_2^*(s_1 - x_1)$							$f_1^*(s_1)$	$x_1^*$
	0	1	2	3	4	5	6		
12	2736	2294	1976	1702	1536	1422	1404	1404	6

Na osnovu rezultata u tabeli Z6-3 zaključuje su ukupni minimalni troškovi proizvodnje  $f_1^*(s_1) = 1404$  NJ, dok je proizvodnja jedinica proizvoda raspodeljena po smenama na sledeći način:

- u prvoj smeni optimalno je da se proizvodi količina od  $x_1^* = 6$  jedinica proizvoda, što daje doprinos funkciji cilja od  $20 \cdot (x_1^* = 6)^2 = 720$  NJ. Broj jedinica proizvoda koji ostaje da se proizvede u smenama 2 i 3 je  $s_2 = s_1 - x_1^* = 12 - 6 = 6$ .
- na osnovu  $s_2 = 6$  optimalna količina proizvoda koju treba proizvesti u drugoj smeni je  $x_2^* = 3$  jedinice proizvoda, što daje doprinos funkciji cilja od  $34 \cdot (x_2^* = 3)^2 = 306$  NJ. Broj jedinica proizvoda koji ostaje da se proizvede u trećoj smeni je  $s_3 = s_2 - x_2^* = 6 - 3 = 3$ .
- u trećoj smeni treba proizvesti preostalu količinu jedinica proizvoda tj.  $x_3^* = s_3 = 3$ , što daje doprinos funkciji cilja od  $42 \cdot (x_3^* = 3)^2 = 378$  NJ.

Minimalna vrednost funkcije cilja, tj. minimalni troškovi proizvodnje iznose:

$$F = 20 \cdot 6^2 + 34 \cdot 3^2 + 42 \cdot 3^2 = 720 + 306 + 378 = 1404 \text{ NJ.}$$

### **Zadatak 07** ("Radni primer" zadatka LP)

Preduzeće PP (u jednoj radionici – fabrici), proizvodi dva proizvoda A i B. Potrebne količine materijala, rada i skladišnih površina, kao i profit po komadu proizvedenog proizvoda, svakog od dva proizvoda, dati su u sledećoj tabeli:

	Jedinica mere	Proizvod	
		A	B
Vreme proizvodnje	kom./čas	60	30
Materijal	kg/kom.	2,5	1,5
Površina skladišta	m <sup>2</sup> /kom.	0,4	0,5
Dobit	NJ/kom.	13	11

- Rad se obavlja u jednoj smeni, sa radnim vremenom od 7 časova, tj. 420 minuta.
- Za ukupnu dnevnu proizvodnju na raspolaganju su ukupno 787,5 kg materijala.
- Ukupna raspoloživa površina skladišta sirovina je 160 m<sup>2</sup>.

Preduzeće želi da proizvodi ova dva proizvoda u pojedinačnim količinama koje obezbeđuju maksimalnu dobit izraženu u NJ – novčanim jedinicama.

#### **Rešenje:**

Jedan od mogućih načina rešavanja manjih zadataka linearnog (ili nelinearnog) programiranja, kao što je ovaj, je pomoću dinamičkog programiranja. Matematički model problema je:

$$\max F = 13 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2$$

pri ograničenjima

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 420,$$

$$2,5 \cdot x_1 + 1,5 \cdot x_2 \leq 787,5$$

$$0,4 \cdot x_1 + 0,5 \cdot x_2 \leq 160$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Ovaj problem je analogan problemu raspodele ograničene količine resursa na aktivnosti, stim što je u ovom slučaju potrebno raspodeliti tri resursa (materijal, vreme, površina) na dve aktivnosti (proizvodnja dve vrste proizvoda).

Rešenje ovog problema, primenom dinamičkog programiranja, zahteva donošenje dve međusobno povezane odluke tj. rešavanje problema se sastoji od dve etape (aktivnosti):

- etapa (aktivnost) 1: proizvodnja proizvoda tipa A,
- etapa (aktivnost) 2: proizvodnja proizvoda tipa B.

Odgovarajuće promenljive odlučivanja  $x_n$  ( $n = 1, 2$ ) predstavljaju broj jedinica proizvoda odgovarajućeg tipa, koji treba proizvesti:

- $x_1$  - broj proizvoda tipa A,
- $x_2$  - broj proizvoda tipa B.

Kako desne strane u jednačinama ograničenja predstavljaju dostupnu količinu pojedinog resursa ( $R_1^* = 420$  min.,  $R_2^* = 787,5$  kg,  $R_3^* = 160$  m<sup>2</sup>), to se stanje  $s_n$  na početku  $n$ -te etape može definisati kao vektor. Vektor stanja resursa za etapu  $s_n$  ( $n = 1, 2$ ) je oblika:

$$s_n = (R_1, R_2, R_3),$$

gde su:  $R_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) - raspoložive količine  $i$ -tog resursa dostupne za raspodelu na preostale etape uključujući i tekuću etapu  $n$ .

U prvoj etapi, kada se razmatra celokupna proizvodnja, vektor stanja je oblika:  
 $s_1 = (420, 787,5, 160)$ .

Za etapu 2 (aktivnost 2 - proizvodnja proizvoda tipa B), vektor stanja se dobija kada se od vektora stanja (raspoloživih resursa) za prvu etapu oduzme količina resursa potrebna za proizvodnju proizvoda tipa A (aktivnost 1). Vektor stanja za drugu etapu je:

$$s_2 = (420 - x_1, 787,5 - 2,5 \cdot x_1, 160 - 0,4 \cdot x_1).$$

Procedura rešavanja kreće od poslednje druge etape i pomera se unazad. Kada se procedura rešavanja nalazi u drugoj etapi tada još nije poznata količina svakog od resursa potrošena za proizvodnju  $x_1$  komada proizvoda tipa A. Zbog toga se na početku druge etape mora pretpostaviti da su sve realno moguće količine svakog od resursa  $R_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) raspoložive za proizvodnju proizvoda tipa B (aktivnost 2) tj.  $0 \leq R_1 \leq R_1^*, 0 \leq R_2 \leq R_2^*, 0 \leq R_3 \leq R_3^*$ .

## Etapa 2

Doprinos druge etape funkciji cilja  $F$ , ako je početno stanje resursa  $R_1, R_2, R_3$  i ako je broj proizvedenih proizvoda tipa B (promenljiva odlučivanja)  $x_2$ , iznosi:

$$f_2(R_1; R_2; R_3; x_2) = 11 \cdot x_2,$$

dok se optimalni doprinos druge etape funkciji cilja  $F$  određuje na osnovu:

$$f_2^*(R_1; R_2; R_3) = \max_{\substack{2 \cdot x_2 \leq R_1 \\ 1,5 \cdot x_2 \leq R_2 \\ 0,5 \cdot x_2 \leq R_3 \\ x_2 \geq 0}} 11 \cdot x_2.$$

Optimalna vrednost promenljive odlučivanja  $x_2^*$  u drugoj etapi mora biti najveća od vrednosti  $x_2$  koja istovremeno zadovoljava nejednakosti:  $2 \cdot x_2 \leq R_1$ ,  $1,5 \cdot x_2 \leq R_2$ ,  $0,5 \cdot x_2 \leq R_3$  i  $x_2 \geq 0$ . Ta vrednost je najmanja od  $R_1 / 2$ ,  $2 \cdot R_2 / 3$  i  $2 \cdot R_3$ . U tabeli Z7-1, za drugu etapu, prikazane su: početne vrednosti vektora stanja resursa  $s_2$ , optimalni (maksimalni) doprinos funkciji cilja  $f_2^*(R_1, R_2, R_3)$  u zavisnosti od vrednosti vektora stanja resursa  $s_2$  i optimalna vrednost promenljive odlučivanja  $x_2^*$  u zavisnosti od početne vrednosti vektora stanja resursa  $s_2$ .

Tabela Z7-1. Druga etapa (proizvod tipa B)  $n=2$ .

$s_2$	$f_2^*(R_1; R_2; R_3)$	$x_2^*$
$R_1, R_2, R_3$	$11 \cdot \min \left\{ \frac{R_1}{2}; \frac{2 \cdot R_2}{3}; 2 \cdot R_3 \right\}$	$\min \left\{ \frac{R_1}{2}; \frac{2 \cdot R_2}{3}; 2 \cdot R_3 \right\}$

### Etapa 1

Doprinos prve etape funkciji cilja  $F$ , ako je početno stanje resursa  $R_1 = 420$ ,  $R_2 = 787,5$  i  $R_3 = 160$  i ako je broj proizvedenih proizvoda tipa A (promenljiva odlučivanja)  $x_1$ , iznosi:

$$f_1(420; 787,5; 160; x_1) = 13 \cdot x_1 + f_2^*(420 - x_1; 787,5 - 2,5 \cdot x_1; 160 - 0,4 \cdot x_1),$$

gde je:

$$f_2^*(420 - x_1; 787,5 - 2,5 \cdot x_1; 160 - 0,4 \cdot x_1) = \max_{\substack{2 \cdot x_2 \leq 420 - x_1 \\ 1,5 \cdot x_2 \leq 787,5 - 2,5 \cdot x_1 \\ 0,5 \cdot x_2 \leq 160 - 0,4 \cdot x_1 \\ x_2 \geq 0}} 11 \cdot x_2.$$

optimalni doprinos druge etape funkciji cilja  $F$ .

Optimalni doprinos prve etape funkciji cilja (rekurentna relacija) je oblika:

$$f_1^*(420; 787,5; 160) = \max_{\substack{x_1 \leq 420 \\ 2,5 \cdot x_1 \leq 787,5 \\ 0,4 \cdot x_1 \leq 160 \\ x_1 \geq 0}} \left\{ 13 \cdot x_1 + f_2^*(420 - x_1; 787,5 - 2,5 \cdot x_1; 160 - 0,4 \cdot x_1) \right\}.$$



Na osnovu  $x_1 \leq 420$ ,  $x_1 \leq 787,5$ ,  $x_1 \leq 160$  i  $x_1 \geq 0$  zaključuje se da se  $x_1$  mora nalaziti u intervalu  $0 \leq x_1 \leq 315$ .

Zamenom optimalnog rešenja iz etape 2 (tabela Z7-1) u prethodni izraz dobija se:

$$f_1^*(420; 787,5; 160) = \max_{0 \leq x_1 \leq 315} \left\{ 13 \cdot x_1 + 11 \cdot \min \left\{ \frac{420 - x_1}{2}; \frac{2 \cdot (787,5 - 2,5 \cdot x_1)}{3}; 2 \cdot (160 - 0,4 \cdot x_1) \right\} \right\}$$

odnosno:

$$f_1^*(420; 787,5; 160) = \max_{0 \leq x_1 \leq 315} \left\{ 13 \cdot x_1 + 11 \cdot \min \left\{ 210 - \frac{x_1}{2}; 525 - \frac{5 \cdot x_1}{3}; 320 - \frac{4 \cdot x_1}{5} \right\} \right\}$$

U intervalu dopuštenih vrednosti za  $x_1$  važi:

$$\min \left\{ 210 - \frac{x_1}{2}; 525 - \frac{5 \cdot x_1}{3}; 320 - \frac{4 \cdot x_1}{5} \right\} = \begin{cases} 210 - \frac{x_1}{2}; & 0 \leq x_1 \leq 270 \\ 525 - \frac{5 \cdot x_1}{3}; & 270 \leq x_1 \leq 315 \end{cases}$$

odakle je:

$$\begin{aligned} 13 \cdot x_1 + 11 \cdot \min \left\{ 210 - \frac{x_1}{2}; 525 - \frac{5 \cdot x_1}{3}; 320 - \frac{4 \cdot x_1}{5} \right\} &= \\ &= \begin{cases} 2310 + \frac{15}{2} \cdot x_1; & 0 \leq x_1 \leq 270 \\ 5775 - \frac{16}{3} \cdot x_1; & 270 \leq x_1 \leq 315 \end{cases} \end{aligned}$$

Pošto oba izraza:

$$\max_{0 \leq x_1 \leq 270} \left\{ 2310 + \frac{15}{2} \cdot x_1 \right\} \text{ i } \max_{270 \leq x_1 \leq 315} \left\{ 5775 - \frac{16}{3} \cdot x_1 \right\}$$

dostižu svoj maksimum za  $x_1 = 270$ , sledi da je  $x_1^* = 270$  i da je maksimalna vrednost iznosi 4335.

U tabeli Z7-2, za prvu etapu, prikazane su: početne vrednosti vektora stanja resursa  $s_1$ , optimalni (maksimalni) doprinos funkciji cilja  $f_1^*(R_1, R_2, R_3)$  u zavisnosti od vrednosti vektora stanja resursa  $s_1$  i optimalna vrednost promenljive odlučivanja  $x_1^*$  u zavisnosti od početne vrednosti vektora stanja resursa  $s_1$ .

Tabela Z7-2. Prva etapa (proizvod tipa A)  $n=1$ .

$s_1$	$f_1^*(R_1; R_2; R_3)$	$x_1^*$
420; 787,5; 160	4335	270

Kako je optimalna vrednost promenljive odlučivanja za prvu etapu  $x_1^* = 270$ , što znači da je optimalno da se proizvodi 270 komada proizvoda tipa A, to je vektor početnog stanja resursa za drugu etapu (količina resursa preostala za proizvodnju proizvoda tipa B) oblika:

$$\begin{aligned} s_2 &= (420 - x_1^*; 787,5 - 2,5 \cdot x_1^*; 160 - 0,4 \cdot x_1^*) = \\ &= (420 - 270; 787,5 - 2,5 \cdot 270; 160 - 0,4 \cdot 270) \\ s_2 &= (R_1 = 150; R_2 = 112,5; R_3 = 52). \end{aligned}$$

Zamenom vektora početnog stanja resursa u izraz za  $x_2^*$  (tabela Z7-1) dobija se:

$$\begin{aligned} x_2^* &= \min \left\{ \frac{R_1}{2}; \frac{2 \cdot R_2}{3}; 2 \cdot R_3 \right\} = \min \left\{ \frac{150}{2}; \frac{2 \cdot 112,5}{3}; 2 \cdot 52 \right\} = \min \{75; 75; 104\} \\ x_2^* &= 75. \end{aligned}$$

Na osnovu gore iznetog sledi da je optimalno da se proizvodi  $x_1^* = 270$  komada proizvoda tipa A i  $x_2^* = 75$  komada proizvoda tipa B i pri tome će se ostvariti maksimalna dobit od 4335 NJ ( $f_1^*(R_1; R_2; R_3)$ , tabela Z7-2).

Količine resursa koje su iskorišćene za ostvarivanje optimalne proizvodnje su:

- resurs  $R_1$  - raspoloživo vreme za izradu [min.]:  

$$x_1^* + 2 \cdot x_2^* = 270 + 2 \cdot 75 = 420,$$
- resurs  $R_2$  - raspoloživa količina materijala za proizvodnju [kg]:  

$$2,5 \cdot x_1^* + 1,5 \cdot x_2^* = 2,5 \cdot 270 + 1,5 \cdot 75 = 787,5,$$
- resurs  $R_3$  - raspoloživa površina skladišnog prostora [m<sup>2</sup>]:  

$$0,4 \cdot x_1^* + 0,5 \cdot x_2^* = 0,4 \cdot 270 + 0,5 \cdot 75 = 145,5.$$

Celokupne raspoložive količine resursa  $R_1$  i  $R_2$  su iskorišćene za ostvarivanje optimalne proizvodnje, dok resurs  $R_3$  nije u potpunosti iskorišćen tj. ostalo je neiskorišćeno  $160 - 145,5 = 14,5$  m<sup>2</sup> skladišnog prostora.

## **Zadatak 08**

Ambiciozni mladi statističar veruje da je razvio sistem pomoću koga može da jednu određenu kockarsku igru dobije sa verovatnoćom  $2/3$ . U slučaju da dobije igru na svaki uloženi žeton dobije još jedan, dok u slučaju gubitka igre gubi ulog. Odrediti maksimalnu verovatnoću kao i optimalnu strategiju da posle tri odigrane igre ambiciozni mladi statističar ima minimum 5 žetona ako je na početku imao 3.

### **Rešenje:**

Pod pretpostavkom da je verovatnoća dobijanja igre tačno određena, primenom dinamičkog programiranja je moguće odrediti optimalnu strategiju (niz odluka) u smislu koliko žetona uložiti (ili ne uložiti) u svakom od tri odigravanja igre. Odluka koliko žetona uložiti pri svakom odigravanju igre mora da uzme u obzir rezultate ranije odigranih igara.

Definisanje pojmova:

etapa  $n \rightarrow n$ -to odigravanje igre ( $n = 1, 2, 3$ ),

$x_n \rightarrow$  broj žetona koji se ulaže u etapi  $n$  tj.  $n$ -tom odigravanju igre (promenljiva odlučivanja),

stanje  $s_n \rightarrow$  raspoloživ broj žetona na početku etape  $n$ , tj. maksimalan broj žetona koji se može uložiti u  $n$ -tom odigravanju igre.

Funkcija cilja u ovom slučaju je sledeća: verovatnoća završetka tri odigravanja igre sa najmanje 5 žetona. Ovako definisanu funkciju cilja treba maksimizirati kroz svaku od tri etape. U tom smislu  $f_n(s_n, x_n)$  se definiše kao:

$f_n(s_n, x_n)$  – verovatnoća završetka tri odigravanja igre sa najmanje 5 žetona, ako je na početku  $n$ -tog odigravanje igre (etape) raspoloživo  $s_n$  žetona (stanje) i ako se u  $n$ -toj igri uloži  $x_n$  žetona (promenljiva odlučivanja), uzimajući u obzir prethodno određene optimalne vrednosti promenljivih odlučivanja u narednim etapama.

Optimalna odluka u datom odigravanju igre dobija se kao:

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n=0,1,\dots,s_n} \{f_n(s_n, x_n)\}.$$

Izraz  $f_n(s_n, x_n)$  treba da uzme u obzir i činjenicu da je moguće na kraju tri odigravanja igre imati 5 žetona iako se izgubi u nekom od odigravanja igre. Ako se u  $n$ -tom odigravanju igre izgubi tada će raspoloživ broj žetona (početno stanje) za sledeće  $(n+1)$ -vo odigravanje igre biti  $s_n - x_n$ , a verovatnoća završetka sva tri

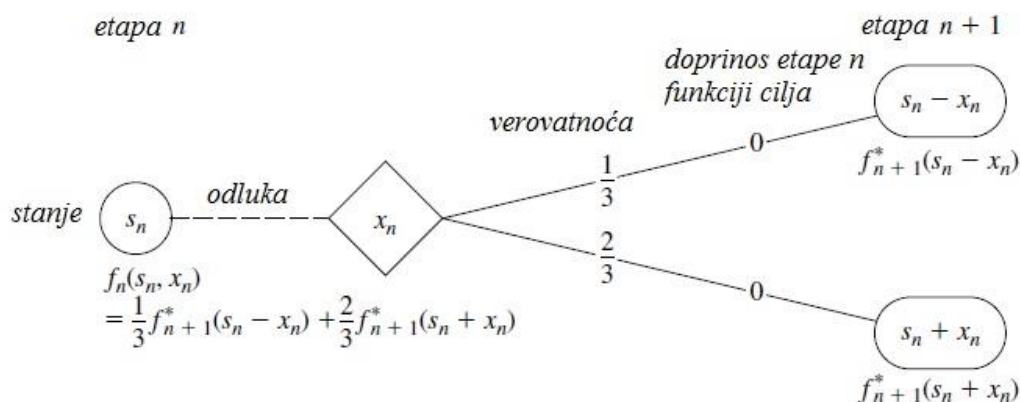
odigravanja sa najmanje 5 žetona za  $(n+1)$ -vo odigravanje  $f_{n+1}^*(s_n - x_n)$ . U slučaju da se dobije, raspoloživ broj žetona će biti  $s_n + x_n$  a odgovarajuća verovatnoća  $f_{n+1}^*(s_n + x_n)$ . Kako je verovatnoća da se u jednom odigravanju igra dobije  $2/3$  to je:

$$f_n(s_n, x_n) = \frac{1}{3} \cdot f_{n+1}^*(s_n - x_n) + \frac{2}{3} \cdot f_{n+1}^*(s_n + x_n),$$

gde je:

$$f_4^*(s_4) = \begin{cases} 0, & s_4 < 5 \\ 1, & s_4 \geq 5 \end{cases}$$

Kao što se vidi iz izraza za  $f_n(s_n, x_n)$  u ovom slučaju ne postoji direktan doprinos pojedine etape (igre) funkciji cilja  $C_n$ , kome bi se dodavao optimalni uticaj narednih etapa, tj. postoji samo uticaj (veza) između susednih etapa. Veza između susednih etapa prikazana je na slici Z8-1.



Slika Z8-1. Struktura i veza između etapa.

Konačno rekurentna formula, u ovom slučaju, je oblika:

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n=0,1,\dots,s_n} \left\{ \frac{1}{3} \cdot f_{n+1}^*(s_n - x_n) + \frac{2}{3} \cdot f_{n+1}^*(s_n + x_n) \right\},$$

gde je  $n=1, 2, 3$  a  $f_4^*(s_4)$  definisano prethodnim izrazom.

Procedura rešavanja kreće od treće (poslednje) etape. Rekurentna formula za treću etapu ima sledeći oblik:

$$f_3^*(s_3) = \max_{x_3=0,1,\dots,s_3} \left\{ \frac{1}{3} \cdot f_4^*(s_3 - x_3) + \frac{2}{3} \cdot f_4^*(s_3 + x_3) \right\}.$$

Rezultati dobijeni primenom prethodnog izraza prikazani su u tabeli Z8-1.

Tabela Z8-1. Treća etapa ( $n=3$ ).

$s_3$	$f_3^*(s_3)$	$x_3^*$
0	0	÷
1	0	÷
2	0	÷
3	2/3	2 ∨ 3
4	2/3	1,2,3 ∨ 4
≥5	1	0 (ili ≤ $s_3 - 5$ )

Procedura rešavanja se sada pomera za jednu etapu u nazad, tj. na etapu 2. Rezultati izračunavanja za drugu etapu prokazani su u tabeli Z8-2.

Tabela Z8-2. Druga etapa  $n=2$ .

$s_2 \backslash x_2$	$f_2(s_2, x_2) = \frac{1}{3} \cdot f_3^*(s_2 - x_2) + \frac{2}{3} \cdot f_3^*(s_2 + x_2)$					$f_2^*(s_2)$	$x_2^*$
	0	1	2	3	4		
0	0					0	÷
1	0	0				0	÷
2	0	4/9	4/9			4/9	1 ili 2
3	2/3	4/9	2/3	2/3		2/3	0, 2 ili 3
4	2/3	8/9	2/3	2/3	2/3	8/9	1
≥5	1					1	0 (ili ≤ $s_2 - 5$ )

Procedura rešavanja se pomera u nazad na prvu etapu. Rezultati izračunavanja za prvu etapu prokazani su u tabeli Z8-3.

Tabela Z8-3. Prva etapa  $n=1$ .

$s_1 \backslash x_1$	$f_1(s_1, x_1) = \frac{1}{3} \cdot f_2^*(s_1 - x_1) + \frac{2}{3} \cdot f_2^*(s_1 + x_1)$				$f_1^*(s_1)$	$x_1^*$
	0	1	2	3		
3	2/3	20/27	2/3	2/3	20/27	1

Na kraju, maksimalna verovatnoća da će posle tri odigrane igre ambiciozni mladi statističar imati minimum 5 žetona je  $20/27 \approx 0,74$ .

Strategija, koliko žetona u kojoj igri treba uložiti u zavisnosti od rezultata prethodnih igara je sledeća:

$$x_1^* = 1 \left\{ \begin{array}{ll} \text{dobitak,} & x_2^* = 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{dobitak,} \quad x_3^* = 0 \\ \text{gubitak,} \quad x_3^* = 2 \vee 3 \end{array} \right. \right. \\ \left. \text{gubitak,} \quad x_2^* = 1 \vee 2 \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{dobitak,} \quad x_3^* = \left\{ \begin{array}{l} 2 \vee 3 \text{ za } x_2^* = 1 \\ 1, 2, 3 \vee 4 \text{ za } x_2^* = 2 \end{array} \right. \\ \text{gubitak,} \quad \text{broj žetona} < 5 \end{array} \right.$$