

## Kvadratno programiranje - Primeri

### Zadatak 01

Odrediti maksimum funkcije cilja:

$$f(x_1, x_2) = 15 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2,$$

pri ograničenju:

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 30.$$

### Rešenje:

Funkcija cilja je data u formi zadatka kvadratnog programiranja gde je broj promenljivih jednak dva ( $n = 2$ ) i broj ograničenja jednak jedan ( $m = 1$ ).

$$f(x_1, x_2) = 15 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 - (-4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1^2 + 4 \cdot x_2^2),$$

$$f(x_1, x_2) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 - [(q_{12} + q_{21}) \cdot x_1 \cdot x_2 + q_{11} \cdot x_1^2 + q_{22} \cdot x_2^2],$$

pri ograničenjima:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \leq b_1,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

gde je:

vektor promenljivih  $\mathbf{x}$ :  $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]$ ,

vektor  $\mathbf{c}$ :  $\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2] = [15 \quad 30]$ ,

matrica ograničenja  $A$ :  $A = [a_{12} \quad a_{22}] = [1 \quad 2]$ ,

vektor kolona konstanti  $\mathbf{b}$ :  $\mathbf{b} = [b_1] = [30]$ ,

matrica  $Q$ , kvadratne forme je sledećeg oblika:

$$q_{11} = 2, \quad q_{22} = 4,$$

$$q_{12} + q_{21} = -4, \quad \rightarrow q_{12} = q_{21},$$

$$2 \cdot q_{12} = -4, \quad \rightarrow q_{12} = -2, \quad q_{21} = -2,$$

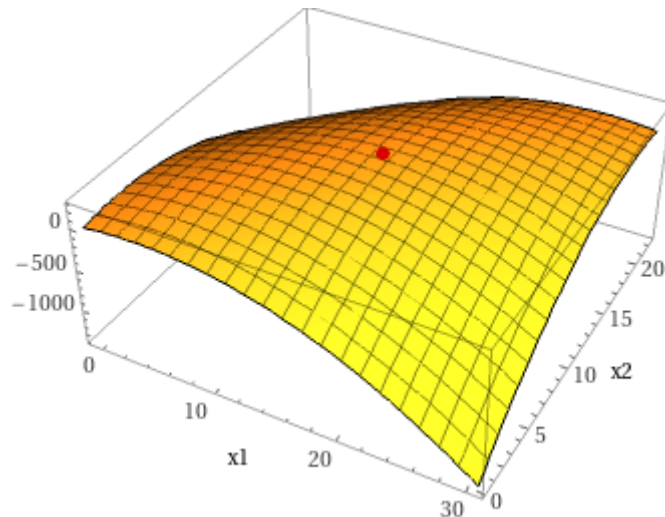
$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Oblik kvadratne forme se određuje kao:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot Q \cdot \mathbf{x}^T &= [x_1 \quad x_2] \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \quad -2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \cdot x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_2^2 = 2 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_2^2 \end{aligned}$$

$$= 2[(x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2) + x_2^2] = 2[(x_1 - x_2)^2 + x_2^2] > 0.$$

Kvadratna forma  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T$  je pozitivno definitna. Kako je u funkciji cilja znak „-“ ispred kvadratne forme to je funkcija cilja, strogo konkavna funkcija na celoj oblasti definisanosti tj. funkcija cilja ima (globalni) maksimum u tački  $x_1 = 15$ ,  $x_2 = 45/4$ . (slika Z1-1)



Slika Z1-1. Dijagram funkcije:  $f(x_1, x_2) = 15 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2$

KKT uslovi:

$$\mathbf{c}^T - 2 \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T - \mathbf{A}^T \cdot \boldsymbol{\lambda}^T + \mathbf{y} = 0,$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^T - \mathbf{b} + \mathbf{v} = 0,$$

$$\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{y} \geq 0, \boldsymbol{\lambda} \geq 0, \mathbf{v} \geq 0,$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

gde je:

– vektor kolona dopunskih promenljivih  $\mathbf{y}$ :  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ,

– vektor kolona dopunskih promenljivih  $\mathbf{v}$ :  $\mathbf{v} = [v_1]$ .

– vektor brojeva  $\boldsymbol{\lambda}$ :  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1]$ .

$$\begin{bmatrix} 15 \\ 30 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot [\lambda_1] + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - [30] + [v_1] = 0,$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + [\lambda_1] \cdot [v_1] = 0.$$

⇓

$$\begin{bmatrix} 15 \\ 30 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \\ -2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 2 \cdot \lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2 \cdot x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \cdot v_1 \end{bmatrix} = 0.$$

⇓

$$15 - 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - \lambda_1 + y_1 = 0,$$

$$30 + 4 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 - 2 \cdot \lambda_1 + y_2 = 0,$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 - 30 + v_1 = 0,$$

$$x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \lambda_1 \cdot v_1 = 0,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, v_1 \geq 0.$$

Prethodni sistem ograničenja (KKT uslovi) napisan u formi ograničenja linearnog programiranja je oblika:

$$4 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + \lambda_1 - y_1 = 15,$$

$$-4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 2 \cdot \lambda_1 - y_2 = 30,$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + v_1 = 30,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, v_1 \geq 0,$$

$$x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \lambda_1 \cdot v_1 = 0.$$

Da bi se dobilo dopustivo početno bazisno rešenje potrebno je uveti veštačke promenljive u prve dve jednačine ograničenja:

$$4 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + \lambda_1 - y_1 + z_1 = 15,$$

$$-4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 2 \cdot \lambda_1 - y_2 + z_2 = 30,$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + v_1 = 30,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, v_1 \geq 0,$$

$$x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \lambda_1 \cdot v_1 = 0.$$

Početni zadatak kvadratnog programiranja se svodi na sledeći zadatak linearnog programiranja:

$$\min Z = z_1 + z_2,$$

$$4 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + \lambda_1 - y_1 + z_1 = 15,$$

$$-4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 2 \cdot \lambda_1 - y_2 + z_2 = 30,$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + v_1 = 30,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, v_1 \geq 0,$$

i komplementarno ograničenje:

$$x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \lambda_1 \cdot v_1 = 0.$$

Početno dopustivo bazisno rešenje je oblika:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \lambda_1 = 0, y_1 = 0, y_2 = 0, z_1 = 15, z_2 = 30, v_1 = 30.$$

Pri formiranju početne simplex tabele potrebno je funkciju cilja izraziti u pogodnom obliku:

1.  $\min Z = z_1 + z_2 \Rightarrow \max (-Z) = -z_1 - z_2,$
2. Iz prve i druge jednačine ograničenja potrebno je izraziti  $z_1$  i  $z_2$  i zameniti ih u funkciju cilja:  
 $-z_1 = 4 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + \lambda_1 - y_1 - 15, -z_2 = -4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 2 \cdot \lambda_1 - y_2 - 30,$  tj.  
 $\max (-Z) = 4 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + \lambda_1 - y_1 - 15 - 4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 2 \cdot \lambda_1 - y_2 - 30$   
 $= 4 \cdot x_2 + 3 \cdot \lambda_1 - y_1 - y_2 - 45.$

Funkcija cilja i ograničenja napisana u formi pogodnoj za primenu simplex tabele su oblika:

$$\begin{array}{llllll} (0) & -Z & -4 \cdot x_2 - 3 \cdot \lambda_1 + y_1 + y_2 & & = & -45 \\ (1) & & 4 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + \lambda_1 - y_1 & + z_1 & = & 15 \\ (2) & & -4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 2 \cdot \lambda_1 & - y_2 & + z_2 & = 30 \\ (3) & & x_1 + 2 \cdot x_2 & + v_1 & = & 30 \end{array}$$

Konačno, početna simplex tabela je oblika (Tabela Z1-1):

Tabela Z1-1. Početna simplex tabela.

Baza	Br. Jedn.	koeficijenti									Desna strana
		Z	$x_1$	$x_2$	$\lambda_1$	$y_1$	$y_2$	$v_1$	$z_1$	$z_2$	
	0	-1	0	-4	-3	1	1	0	0	0	-45
$z_1$	1	0	4	-4	1	-1	0	0	1	0	15
$z_2$	2	0	-4	8	2	0	-1	0	0	1	30
$v_1$	3	0	1	2	0	0	0	1	0	0	30

I iteracija:

Kandidati za promenljive koje ulaze u bazu (Tabela Z1-1) su promenljive sa negativnim koeficijentom u redu (0) tj.  $x_2$  i  $\lambda_1$ . Promenljiva  $\lambda_1$  ne može ući u bazu, jer je njena komplementarna promenljiva  $v_1$  već u bazi, što znači da promenljiva  $x_2$  ulazi u bazu.

Promenljiva koja napušta bazu je sledeća:

$$\min \left\{ \frac{30}{8}; \frac{30}{2} \right\} = \min \{3.75; 15\} \rightarrow \text{promenljiva } z_2 \text{ napušta bazu,}$$

( $z_1$  se ne uzima u obzir jer je koeficijent u vodećoj koloni  $-4$ ).

– novi vodeći red:

$$\begin{array}{r} [0 \quad -4 \quad 8 \quad 2 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 30] : 8 \\ \hline [0 \quad -1/2 \quad 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad -1/8 \quad 0 \quad 0 \quad 1/8 \quad 15/4] \rightarrow \text{novi vodeći red} \end{array}$$

– novi red 0:

$$\begin{array}{r} [-1 \quad 0 \quad -4 \quad -3 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -45] \\ [0 \quad -1/2 \quad 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad -1/8 \quad 0 \quad 0 \quad 1/8 \quad 15/4] \times 4 + \quad \leftarrow \\ \hline [-1 \quad -2 \quad 0 \quad -2 \quad 1 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2 \quad -30] \rightarrow \text{novi red 0} \end{array}$$

– novi red 1:

$$\begin{array}{r} [0 \quad 4 \quad -4 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 15] \\ [0 \quad -1/2 \quad 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad -1/8 \quad 0 \quad 0 \quad 1/8 \quad 15/4] \times 4 + \quad \leftarrow \\ \hline [0 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad -1 \quad -1/2 \quad 0 \quad 1 \quad 1/2 \quad 30] \rightarrow \text{novi red 1} \end{array}$$

– novi red 3:

$$\begin{array}{r} [0 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 30] \\ [0 \quad -1/2 \quad 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad -1/8 \quad 0 \quad 0 \quad 1/8 \quad 15/4] \times (-2) + \quad \leftarrow \\ \hline [0 \quad 2 \quad 0 \quad -1/2 \quad 0 \quad 1/4 \quad 1 \quad 0 \quad -1/4 \quad 45/2] \rightarrow \text{novi red 3} \end{array}$$

U tabeli Z1-2 prikazane su vrednosti promenljivih nakon I iteracije.

Tabela Z1-2. Kraj I iteracije.

Baza	Br. Jedn.	koeficijenti									Desna strana
		Z	$x_1$	$x_2$	$\lambda_1$	$y_1$	$y_2$	$v_1$	$z_1$	$z_2$	
	0	-1	-2	0	-2	1	1/2	0	0	1/2	-30
$z_1$	1	0	2	0	2	-1	-1/2	0	1	1/2	30
$x_2$	2	0	-1/2	1	1/4	0	-1/8	0	0	1/8	15/4
$v_1$	3	0	2	0	-1/2	0	1/4	1	0	-1/4	45/2

## II iteracija:

Kandidati za promenljive koje ulaze u bazu (Tabela Z1-2) su promenljive sa negativnim koeficijentom u redu (0) tj.  $x_1$  i  $\lambda_1$ . Pošto je komplementarna promenljiva  $v_1$  promenljivoj  $\lambda_1$  već u bazi to  $\lambda_1$  ne može biti kandidat za ulazak u bazu, tj. promenljiva  $x_1$  ulazi u bazu.

Promenljiva koja napušta bazu je sledeća:

$$\min \left\{ \frac{30}{2}; \frac{45/2}{2} \right\} = \min \{15; 11.25\} \rightarrow \text{promenljiva } v_1 \text{ napušta bazu.}$$

– novi vodeći red:

$$\begin{array}{l} [0 \quad 2 \quad 0 \quad -1/2 \quad 0 \quad 1/4 \quad 1 \quad 0 \quad -1/4 \quad 45/2] : 2 \\ \hline [0 \quad 1 \quad 0 \quad -1/4 \quad 0 \quad 1/8 \quad 1/2 \quad 0 \quad -1/8 \quad 45/4] \end{array} \rightarrow \text{novi vodeći red}$$

– novi red 0:

$$\begin{array}{l} [-1 \quad -2 \quad 0 \quad -2 \quad 1 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2 \quad -30] \\ [0 \quad 1 \quad 0 \quad -1/4 \quad 0 \quad 1/8 \quad 1/2 \quad 0 \quad -1/8 \quad 45/4] \times 2 + \quad \leftarrow \\ \hline [-1 \quad 0 \quad 0 \quad -5/2 \quad 1 \quad 3/4 \quad 1 \quad 0 \quad 1/4 \quad -15/2] \end{array} \rightarrow \text{novi red 0}$$

– novi red 1:

$$\begin{array}{l} [0 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad -1 \quad -1/2 \quad 0 \quad 1 \quad 1/2 \quad -30] \\ [0 \quad 1 \quad 0 \quad -1/4 \quad 0 \quad 1/8 \quad 1/2 \quad 0 \quad -1/8 \quad 45/4] \times (-2) + \quad \leftarrow \\ \hline [0 \quad 0 \quad 0 \quad 5/2 \quad -1 \quad -3/4 \quad -1 \quad 1 \quad 3/4 \quad 15/2] \end{array} \rightarrow \text{novi red 1}$$

– novi red 2:

$$\begin{array}{l} [0 \quad -1/2 \quad 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad -1/8 \quad 0 \quad 0 \quad 1/8 \quad 15/4] \\ [0 \quad 1 \quad 0 \quad -1/4 \quad 0 \quad 1/8 \quad 1/2 \quad 0 \quad -1/8 \quad 45/4] \times (-1/2) + \quad \leftarrow \\ \hline [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1/8 \quad 0 \quad -1/16 \quad 1/4 \quad 0 \quad 1/16 \quad 75/8] \end{array} \rightarrow \text{novi red 1}$$

U tabeli Z1-3 prikazane su vrednosti promenljivih nakon II iteracije.

Tabela Z1-3. Kraj II iteracije.

Baza	Br. Jedn.	koeficijenti									Desna strana
		Z	$x_1$	$x_2$	$\lambda_1$	$y_1$	$y_2$	$v_1$	$z_1$	$z_2$	
	0	-1	0	0	-5/2	1	3/4	1	0	1/4	-15/2
$z_1$	1	0	0	0	5/2	-1	-3/4	-1	1	3/4	15/2
$x_2$	2	0	0	1	1/8	0	-1/16	1/4	0	1/16	75/8
$x_1$	3	0	1	0	-1/4	0	1/8	1/2	0	-1/8	45/4

### III iteracija:

Promenljiva koja ulazi u bazu (Tabela Z1-3) je  $\lambda_1$  jer je jedino njen koeficijent u redu (0) negativan, takođe njena komplementarna promenljiva  $v_1$  više nije u bazi pa je i komplementarno ograničenje zadovoljeno.

Promenljiva koja napušta bazu je sledeća:

$$\min \left\{ \frac{15}{2}, \frac{75}{8} \right\} = \min \{5; 75\} \rightarrow \text{promenljiva } z_1 \text{ napušta bazu.}$$

– novi vodeći red:

$$\begin{array}{r} [0 \ 0 \ 0 \ 5/2 \ -1 \ -3/4 \ -1 \ 1 \ 3/4 \ 15/2] \times 2/5 \\ \hline [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -2/5 \ -3/10 \ -2/5 \ 2/5 \ 3/10 \ 3] \rightarrow \text{novi vodeći red} \end{array}$$

– novi red 0:

$$\begin{array}{r} [-1 \ 0 \ 0 \ -5/2 \ 1 \ 3/4 \ 1 \ 0 \ 1/4 \ -15/2] \\ [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -2/5 \ -3/10 \ -2/5 \ 2/5 \ 3/10 \ 3] \times 5/2 + \quad \leftarrow \\ \hline [-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0] \rightarrow \text{novi red 0} \end{array}$$

– novi red 2:

$$\begin{array}{r} [0 \ 0 \ 1 \ 1/8 \ 0 \ -1/16 \ 1/4 \ 0 \ 1/16 \ 75/8] \\ [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -2/5 \ -3/10 \ -2/5 \ 2/5 \ 3/10 \ 3] \times (-1/8) + \quad \leftarrow \\ \hline [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1/20 \ -1/40 \ 3/10 \ -1/20 \ 1/40 \ 9] \rightarrow \text{novi red 2} \end{array}$$

– novi red 3:

$$\begin{array}{r} [0 \ 1 \ 0 \ -1/4 \ 0 \ 1/8 \ 1/2 \ 0 \ -1/8 \ 45/4] \\ [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -2/5 \ -3/10 \ -2/5 \ 2/5 \ 3/10 \ 3] \times (1/4) + \quad \leftarrow \\ \hline [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1/10 \ 1/20 \ 2/5 \ 1/10 \ -1/20 \ 12] \rightarrow \text{novi red 3} \end{array}$$

U tabeli Z1-4 prikazane su vrednosti promenljivih nakon III iteracije.

Tabela Z1-4. Kraj III iteracije.

Baza	Br. Jedn.	koeficijenti									Desna strana
		Z	$x_1$	$x_2$	$\lambda_1$	$y_1$	$y_2$	$v_1$	$z_1$	$z_2$	
	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$\lambda_1$	1	0	0	0	1	-2/5	-3/10	-2/5	2/5	3/10	3
$x_2$	2	0	0	1	0	1/20	-1/40	3/10	-1/20	1/40	9
$x_1$	3	0	1	0	0	-1/10	1/20	2/5	1/10	-1/20	12

Pošto su veštačke promenljive svedene na nulu (nisu više u bazi), vrednost funkcije cilja je jednaka nuli i koeficijenti u redu (0) uz promenljive su svi pozitivni ili jednaki nuli, to je dobijeno optimalno rešenje svedenog zadatka linearnog programiranja. Optimalne vrednosti su:

$$x_1 = 12, x_2 = 9 \text{ i } \lambda_1 = 3.$$

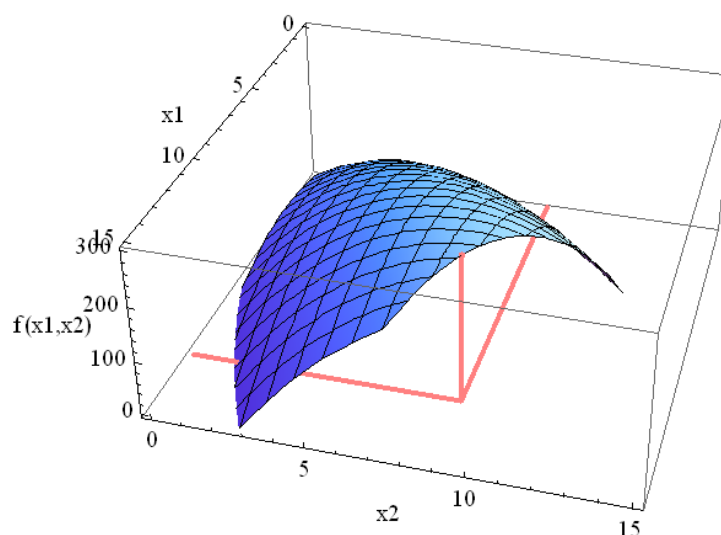
Rešenje polaznog zadatka kvadratnog programiranja je: (slika Z1-2)

$$x_1 = 12, x_2 = 9.$$

Maksimum funkcije cilja, pri ograničenju  $x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 30$  iznosi: (slika Z1-2)

$$f(x_1, x_2) = 15 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2,$$

$$f(12, 9) = 15 \cdot 12 + 30 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \cdot 9 - 2 \cdot 12^2 - 4 \cdot 9^2 = 270,$$



Slika Z1-2. Optimalno rešenje  $x_1 = 12, x_2 = 9, f(12, 9) = 270$ .