

Kvadratno programiranje

Problem kvadratnog programiranja razlikuje se od problema linearnog programiranja samo po tome što funkcija cilja uključuje i članove oblika x_j^2 i $x_i \cdot x_j$ ($i \neq j$). Ovu vrstu problema NP karakteriše kvadratna forma funkcije cilja $f(x)$. *1

Kvadratna forma

Kvadratnom formom n promenljivih x_1, x_2, \dots, x_n naziva se funkcija od n promenljivih oblika: *2

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} \cdot x_i \cdot x_j.$$

Ako se sa $Q = [q_{ij}]_{n \times n}$ označi kvadratna matrica dimenzije n i sa $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ n – dimenzioni vektor, kvadratna forma se u matričnom obliku može zapisati kao:

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{x} \cdot Q \cdot \mathbf{x}^T, \text{ tj. } (\mathbf{x}^T - \text{transponovano } \mathbf{x}) \\ [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \cdot \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n q_{i1} \cdot x_i & \sum_{i=1}^n q_{i2} \cdot x_i & \dots & \sum_{i=1}^n q_{in} \cdot x_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \cdot \sum_{i=1}^n q_{i1} \cdot x_i & x_2 \cdot \sum_{i=1}^n q_{i2} \cdot x_i & \dots & x_n \cdot \sum_{i=1}^n q_{in} \cdot x_i \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} \cdot x_i \cdot x_j. \end{aligned} \quad *3$$

Koeficijent u matrici Q uz članove $x_i \cdot x_j$ je jednak $q_{ij} + q_{ji}$.

Kvadratna forma $z = \mathbf{x} \cdot Q \cdot \mathbf{x}^T$ je **pozitivno definitna** ukoliko za bilo koji vektor $\mathbf{x} \neq 0$ važi $\mathbf{x} \cdot Q \cdot \mathbf{x}^T > 0$. Ukoliko važi $\mathbf{x} \cdot Q \cdot \mathbf{x}^T \geq 0$ kvadratna forma je **pozitivno semidefinitna**. *4

Kvadratna forma $z = \mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T$ je **negativno definitna** ukoliko za bilo koji vektor $\mathbf{x} \neq 0$ važi $\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T < 0$. Ukoliko važi $\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T \leq 0$ kvadratna forma je **negativno semidefinitna**. *5

Kvadratna forma $z = \mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T$ je **nedefinitna** ukoliko za neki vektor \mathbf{x}' pozitivno (semi)definitna a za neki drugi vektor \mathbf{x}'' negativno (semi)definitna. *6

Primer:

Data je kvadratna forma $z = \mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T = x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$. Odrediti vektor \mathbf{x} i matricu \mathbf{Q} kao i oblik kvadratne forme.

Kvadratna forma ima dve promenljive $n = 2$ tj.:

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2], \quad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Elementi na glavnoj dijagonali matrice \mathbf{Q} su koeficijenti uz čisto kvadratne članove:

$$q_{11} = 1, \quad q_{22} = 1.$$

Koeficijenti uz mešovite članove $x_i \cdot x_j$ moraju da zadovolje sledeći uslov:

$$q_{ij} + q_{ji},$$

odnosno u ovom slučaju:

$$q_{12} + q_{21} = 2.$$

Pošto nema ograničenja za elemente matrice \mathbf{Q} vrednosti, koje koeficijent q_{12} i q_{21} mogu uzeti, ima beskonačno mnogo. U slučaju da je matrica \mathbf{Q} simetrična tada je:

$$q_{ij} = q_{ji} = q_{ij},$$

što daje:

$$q_{12} + q_{21} = 2 \rightarrow 2 \cdot q_{12} = 2 \rightarrow q_{12} = 1, \text{ odnosno: } q_{12} = 1 \text{ i } q_{21} = 1.$$

Matrica \mathbf{Q} je oblika:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Konačno:

$$\begin{aligned} [x_1 \quad x_2] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= [x_1 + x_2 \quad x_1 + x_2] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \cdot (x_1 + x_2) + x_2 \cdot (x_1 + x_2) = \\ &= x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \rightarrow x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2. \end{aligned}$$

Data kvadratna forma je pozitivno definitna jer je za svako $\mathbf{x} \neq 0$ $\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T > 0$, tj.

$$x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 > 0.$$

Pozitivno semidefinitna kvadratna forma $\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T \geq 0$ sa simetričnom matricom \mathbf{Q} je konveksna funkcija na celoj oblasti definisanosti.

Pozitivno definitna kvadratna forma $\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T > 0$ sa simetričnom matricom \mathbf{Q} je strogo konveksna funkcija na celoj oblasti definisanosti.

Negativno semidefinitna kvadratna forma $\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T \leq 0$ sa simetričnom matricom \mathbf{Q} je konkavna funkcija na celoj oblasti definisanosti.

Negativno definitna kvadratna forma $\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T < 0$ sa simetričnom matricom \mathbf{Q} je strogo konkavna funkcija na celoj oblasti definisanosti.

Zadatak kvadratnog programiranja se definiše kao: (matrični zapis) *7

$$\max f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^T - \mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T,$$

pri ograničenjima:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^T \leq \mathbf{b}, \text{ i } x_j \geq 0, (j=1, 2, \dots, n),$$

gde je:

- \mathbf{c} – vektor konstanti dimenzije n ,
- \mathbf{A} – matrica ograničenja dimenzije $(m \times n)$,
- \mathbf{x} – vektor promenljivih dimenzije n ,
- \mathbf{Q} – simetrična matrica dimenzije $(n \times n)$,
- \mathbf{b} – vektor kolona konstanti dimenzije m .

U razvijenom obliku, postavka zadatka kvadratnog programiranja je sledeća: *8

$$\max f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_{jk} \cdot x_k \cdot x_j,$$

pri ograničenjima:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &\leq b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &\leq b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &\leq b_m \text{ i} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n &\geq 0. \end{aligned}$$

Da bi funkcija cilja $f(\mathbf{x})$ imala maksimum to funkcija cilja mora da bude (strogo)konkavna tj. kvadratna forma mora da bude pozitivno semidefinitna $\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T \geq 0$ ili pozitivno definitna $\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T > 0$ (zbog znaka „-“ u funkciji cilja), dok je $c \cdot \mathbf{x}^T$ i konveksna i konkavna funkcija.

Postoji više metoda za rešavanje zadatka kvadratnog programiranja. Jedna od najviše primenjivanih je tzv. Modifikovana simplex metoda. Osnova ove metode je da se postave KKT uslovi i da se ti uslovi izraze na način pogodan za primenu linearnog programiranja.

KKT uslovi za kvadratno programiranje *9

$$1. \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0, \quad \text{za } \mathbf{x}=\mathbf{x}^*, j=1,2, \dots, n.$$

$$c_j - 2 \cdot \sum_{k=1}^n q_{jk} \cdot x_k - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot a_{ij} \leq 0.$$

Koeficijent 2 ispred sume u gornjem izrazu je iz sledećih razloga:

- kada je $k = j$ traži se izvod od x_j^2 što je $2 \cdot x_j$,
- kada je $k \neq j$ koeficijent mešovitoeg člana $x_k \cdot x_j$ u kvadratnoj formi je jednak $q_{jk} + q_{kj}$ gde je $q_{jk} = q_{kj}$ (simetrična matrica).

$$2. x_j^* \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) = 0 \quad \text{za } \mathbf{x}=\mathbf{x}^*, j=1,2, \dots, n.$$

$$x_j^* \cdot \left(c_j - 2 \cdot \sum_{k=1}^n q_{jk} \cdot x_k - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot a_{ij} \right) = 0.$$

$$3. g_i(\mathbf{x}^*) - b_i \leq 0 \quad \text{za } i=1,2, \dots, m.$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j^* - b_i \leq 0.$$

$$4. \lambda_i \cdot [g_i(\mathbf{x}^*) - b_i] = 0 \quad \text{za } i=1,2, \dots, m.$$

$$\lambda_i \cdot \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j^* - b_i \right] = 0.$$

$$5. x_j^* \geq 0 \quad \text{za } j=1,2, \dots, n.$$

$$6. \lambda_i \geq 0 \quad \text{za } i=1,2, \dots, m.$$

Uslov za primenu simplex metode je da ograničenja budu u obliku jednačina. Iz tog razloga u uslove 1 i 3 se uvode nenegativne dopunske promenljive y_j ($j = 1, 2, \dots, n$) i v_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Uslovi 1 i 3 sada imaju sledeći oblik: *10

$$1. c_j - 2 \cdot \sum_{k=1}^n q_{jk} \cdot x_k - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot a_{ij} + y_j = 0, \quad y_j \geq 0, \quad j=1,2, \dots, n.$$

$$3. \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j^* - b_i + v_i = 0, \quad v_i \geq 0, \quad i=1,2, \dots, m.$$

Uvođenjem dopunskih promenljivih y_j ($j = 1, 2, \dots, n$) u uslove 1, uslovi 2 se mogu napisati tako da se zahteva x_j ili $y_j = 0$ tj.:

$$2. x_j \cdot y_j = 0, \quad j=1,2, \dots, n.$$

Takođe, uvođenjem dopunskih promenljivih v_i ($i = 1, 2, \dots, m$) u uslove 3, uslovi 4 se mogu napisati tako da se zahteva λ_i ili $v_i = 0$ tj.:

$$4. \lambda_i \cdot v_i = 0, \quad i=1,2, \dots, m.$$

Svaki par promenljivih (x_j, y_j) i (λ_i, v_i) predstavlja tzv. komplementarne promenljive, zato što samo jedna od dve promenljive može biti različita od nule. Pošto sve promenljive x_j , y_j , λ_i i v_i moraju biti nenegativne to se uslovi 2 i 4 mogu izraziti kao jedan i to:

$$\sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot v_i = 0.$$

Prethodni izraz se naziva *komplementarno ograničenje*. *11

Pogodna forma KKT uslova kvadratnog programiranja za primenu modifikovane simplex metode je sledeća: *12

$$c_j - 2 \cdot \sum_{k=1}^n q_{jk} \cdot x_k - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot a_{ij} + y_j = 0, \quad j=1,2, \dots, n.$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j^* - b_i + v_i = 0, \quad i=1,2, \dots, m.$$

$$x_j \geq 0, \quad y_j \geq 0, \quad j=1,2, \dots, n.$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad v_i \geq 0, \quad i=1,2, \dots, m.$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot v_i = 0.$$

Prethodni sistem ograničenja, osim komplementarnog uslova, predstavlja ograničenja linearnog programiranja.

Za bilo koji zadatak kvadratnog programiranja odgovarajući KKT uslovi se mogu svesti na sistem ograničenja koji sadrži ograničenja linearnog programiranja plus jedno komplementarno ograničenje.

Ova ograničenja u matricnoj formi su oblika: *13

$$\mathbf{c}^T - 2 \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T - \mathbf{A}^T \cdot \boldsymbol{\lambda}^T + \mathbf{y} = 0,$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^T - \mathbf{b} + \mathbf{v} = 0,$$

$$\mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{y} \geq 0, \quad \boldsymbol{\lambda} \geq 0, \quad \mathbf{v} \geq 0,$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

gde su \mathbf{y} , \mathbf{b} i \mathbf{v} vektori kolone, \mathbf{c} , \mathbf{x} i $\boldsymbol{\lambda}$ - vektori (red), \mathbf{A} i \mathbf{Q} matrice.

U postavci zadatka kvadratnog programiranja pošlo se od pretpostavke da se traži maksimum funkcije cilja tj. da je funkcija cilja konkavna a kako su ograničenja data u obliku linearnih funkcija, i predstavljaju konveksan skup, posledica Teoreme #1 (KKT uslovi) je sledeća:

Posledica. Vektor \mathbf{x} je optimalno rešenje zadatka kvadratnog programiranja ako i samo ako postoje vrednosti za vektore \mathbf{y} , $\boldsymbol{\lambda}$ i \mathbf{v} takve da sva četiri vektora zajedno zadovoljavaju sve postavljene uslove.

Originalni zadatak kvadratnog programiranja se na ovaj način svodi na ekvivalentni problem traženja dopustivog rešenja u odnosu na novoformirani sistem ograničenja.

Modifikovana simplex metoda

Modifikovana simplex metoda se zasniva na činjenici da su KKT uslovi za kvadratno programiranje, osim komplementarnog ograničenja, ustvari ograničenja linearnog programiranja. Komplementarno ograničenje nedozvoljava da obe komplementarne promenljive bilo kog para istovremeno budu bazisne promenljive (bazisne promenljive > 0). *14

Na taj način problem se svodi na traženje početnog dopustivog bazisnog rešenja za data ograničenja vodeći računa o komplementarnom ograničenju za izbor bazisnih promenljivih, nakon čega se normalno nastavlja sa simplex metodom uzimajući u obzir komplementarno ograničenje (prva faza dvofazne simplex metode).

Za određivanje početnog dopustivog bazisnog rešenja potrebno je uvesti veštačke promenljive z_l (u opštem slučaju njih $n+m$) u ograničenja u kojima promenljive ne ispunjavaju uslov nenegativnosti. Nakon toga se nastavlja sa prvom fazom dvofazne (simplex) metode i početni zadatak se svodi na traženje minimuma sledeće funkcije cilja:

$$\min F = \sum_l z_l, \quad *15$$

pri ograničenjim dobijenim iz KKT uslova u koje su dodate veštačke promenljive z_l , poštujući sledeće pravilo za izbor promenljivih koje ulaze u bazu: *16

Pri izboru promenljivih koje ulaze u bazu iz razmatranja se izostavljaju nebazisne (slobodne) promenljive čija je komplementarna promenljiva već u bazi. Izbor između ostalih nebazisnih promenljivih se vrši na osnovu važećih kriterijuma.

Ovo pravilo obezbeđuje zadovoljavanje komplementarnog ograničenja pri primeni simplex metode.

Kada se dobije optimalno rešenje oblika: *17

$$\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{v}^*, z_1 = 0, z_2 = 0, \dots, z_{n+m} = 0,$$

prve faze dvofaznog (simplex) metoda tada je \mathbf{x}^* traženo optimalno rešenje zadatka kvadratnog programiranja. Fazu dva dvofaznog (simplex) metoda nije potrebno raditi.

Pitanja:

1. Razlika između linearnog programiranja i kvadratnog programiranja.
2. Kvadratna forma (matrični oblik).
3. Kvadratna forma (razvijeni oblik).
4. Kada je kvadratna forma pozitivno definitna odnosno semidefinitna.
5. Kada je kvadratna forma negativno definitna odnosno semidefinitna.
6. Kada je kvadratna nedefinitna.
7. Postavka (definicija) zadatka kvadratnog programiranja (matrični oblik).
8. Postavka (definicija) zadatka kvadratnog programiranja (razvijeni oblik).
9. KKT uslovi za kvadratno programiranje.
10. Svođenje KKT uslova na oblik pogodan za primenu linearnog programiranja.
11. Komplementarno ograničenje kvadratnog programiranja.
12. Forma KKT uslova kvadratnog programiranja za primenu modifikovane simplex metode (razvijeni oblik).
13. Forma KKT uslova kvadratnog programiranja za primenu modifikovane simplex metode (matrični oblik).
14. Praktično značenje komplementarnog ograničenja u primeni modifikovane simplex metode.
15. Funkcija cilja modifikovane simplex metode.
16. Pravilo za izbor promenljive koja ilazi u bazu, modifikovane simplex metode.
17. Oblik optimalnog rešenja modifikovane simplex metode i konačno rešenje zadatka kvadratnog programiranja.