

Nelinearno programiranje

U mnogim stvarnim situacijama često je potrebno direktno rešavati problem nelinearnog programiranja. Uopšteno, *problem nelinearnog programiranja* se može formulisati na sledeći način: pronaći vrednosti za veličine – promenljive $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ koje maksimiziraju funkciju cilja: *1

$$\max f(\mathbf{x}),$$

pri ograničenjima (funkcionalna ograničenja):

$$g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \text{ za } i=1,2, \dots, m,$$

i (uslovima nenegativnosti):

$$\mathbf{x} \geq 0,$$

gde su $f(\mathbf{x})$ i $g_i(\mathbf{x})$ date funkcije n – promenljivih.

Vrste problema nelinearnog programiranja *2

Problemi nelinearnog programiranja se javljaju u različitim oblicima i formama. Za razliku od simpleks metode za linearno programiranje, nijedan algoritam ne može rešiti sve ove različite vrste problema. Umesto toga, razvijeni su algoritmi za različite vrste (klase) problema nelinearnog programiranja. Neke od najvažnijih vrsta problema nelinearnog programiranja navedene su u sledećem tekstu.

Bezuslovna optimizacija *3

Problemi bezuslovne optimizacije nemaju ograničenja koja se nameću na promenljive, tako da je cilj naći optimalnu (maksimalnu ili minimalnu) vrednost funkcije:

$$\max f(\mathbf{x}),$$

u odnosu na \mathbf{x} – vektor promenljivih, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Nelinearno programiranje sa linearnim skupom ograničenjima *4

Probleme nelinearnog programiranja sa linearnim skupom ograničenja karakterišu ograničenja koja u potpunosti odgovaraju ograničenjima linearnog programiranja, što znači da su sve funkcije ograničenja $g_i(\mathbf{x})$ linearne, dok je funkcija cilja $f(\mathbf{x})$ nelinearna. Problem je značajno pojednostavljen s obzirom da je samo funkcija cilja nelinearna i da je skup dopustivih rešenja definisan linearnim ograničenjima. Poseban slučaj ovog problema predstavlja kvadratno programiranje.

Kvadratno programiranje

Problemi kvadratnog programiranja imaju ograničenja u obliku linearnih funkcija, dok je funkcija cilja $f(\mathbf{x})$ definisana kvadratnom formom. Prema tome, jedina

razlika između problema kvadratnog programiranja i problema linearnog programiranja je ta što u funkciji cilja kvadratnog programiranja postoje članovi izraženi preko kvadrata promenljive ili proizvoda dve promenljive.

Konveksno programiranje *5

Konveksno programiranje pokriva široku klasu problema koja obuhvata kao posebne slučajeve sve tipove nelinearnog programiranja kada je $f(\mathbf{x})$ konkavna funkcija. Pretpostavke su da je:

1. $f(\mathbf{x})$ je konkavna funkcija.
2. Svaka od funkcija ograničenja $g_i(\mathbf{x})$ je konveksna funkcija.

Separabilno programiranje *6

Separabilno programiranje je specijalan slučaj konveksnog programiranja, gde se uvodi još jedna dodatna pretpostavka:

3. Sve funkcije $f(\mathbf{x})$ i $g_i(\mathbf{x})$ su separabilne funkcije.

Separabilna funkcija je funkcija gde svaki član funkcija jedne promenljive, tako da se funkcija može izraziti kao zbir funkcija pojedinih promenljivih. Npr. ako je $f(\mathbf{x})$ separabilna funkcija, ona se može napisati u obliku:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j),$$

gde je svaka od funkcija $f_j(x_j)$, funkcija samo jedne promenljive x_j .

Nekonveksno programiranje

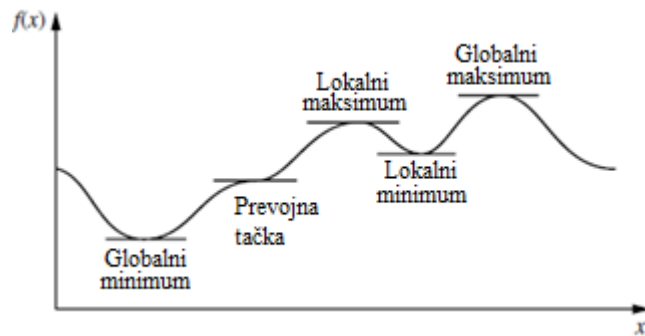
Nekonveksno programiranje obuhvata sve probleme nelinearnog programiranja koji ne zadovoljavaju pretpostavke konveksnog programiranja. Dve posebno važne vrste su Geometrijsko programiranje i Frakciono programiranje.

Bezuslovna optimizacija funkcije jedne promenljive

Najjednostavniji slučaj nelinearnog programiranja je problem bezuslovne optimizacije sa samo jednom promenljivom x ($n = 1$). Razmotrimo funkciju jedne promenljive, prikazanu na slici IV-1. Prikazana funkcija nije ni konveksna ni konkavna funkcija.

Potreban uslov koji treba da bude zadovoljen da bi određeno rešenje $x = x^*$ bilo ili minimum ili maksimum tj. stacionarna tačka, je da: *7

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad \text{za } x = x^*.$$



Slika IV-1. Problem bezuslovne optimizacije funkcije koja nije ni konveksna ni konkavna.

Prema tome, na slici IV-1 postoji pet rešenja koja zadovoljavaju postavljene uslove. Da bi se dobilo više informacija o prirodi ovih pet **stacionarnih tačaka**, neophodno je ispitati znak drugog izvoda. Tako, ako je:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0 \text{ za } x = x^*,$$

tada rešenje x^* mora da bude barem **lokalni minimum** [ako važi, $f(x^*) \leq f(x)$ za sve x dovoljno blizu x^*]. Dovoljan uslov da x^* bude lokalni minimum je da $f(x)$ bude *strogo konveksna* u okolini rešenja x^* . *8

Slično, dovoljan uslov da x^* bude **lokalni maksimum** je da $f(x)$ bude *strogo konkavna* u okolini rešenja x^* (ako je $d^2 f(x)/dx^2 < 0$ za $x = x^*$). *9

Ako je drugi izvod jednak nuli, problem nije rešen (dato rešenje može biti prevojna tačka), i neophodno je ispitati izvode višeg reda.

Da bi se pronašao **globalni minimum** [rešenje za x^* takvo da važi $f(x^*) \leq f(x)$ za svako x], potrebno je uporediti sve lokalne minimume i odrediti onaj koji daje najmanju vrednost za $f(x)$. Ako je ta vrednost $f(x)$ manja od $f(x)$ kada $x \rightarrow -\infty$ i kada $x \rightarrow +\infty$ (ili manja od $f(x)$ u krajnjim tačkama, ako je $f(x)$ definisana na konačnom intervalu), tada je data tačka globalni minimum. Takva tačka je prikazana na slici IV-1, zajedno sa **globalnim maksimumom**, koji se određuje na analogan način. *10

Međutim, ako se zna da je $f(x)$ ili konveksna ili konkavna funkcija, analiza postaje mnogo jednostavnija. Ako je $f(x)$ konveksna funkcija ($d^2 f(x)/dx^2 \geq 0$), na celoj oblasti definisanosti, tada za svako rešenje x^* takvo da:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad \text{za } x = x^*$$

se automatski zna da je globalni minimum. Drugim rečima, ovaj uslov nije samo potreban, već i dovoljan uslov za globalni minimum konveksne funkcije. *11

!! Napomena: Dato rešenje za x^* ne mora da bude jedinstveno jer, na intervalu gde je prvi izvod jednak nuli, može postojati više rešenja sa istom vrednosti globalnog minimuma !!

Slično tome, ako je $f(x)$ konkavna funkcija, na celoj oblasti definisanosti, tada:

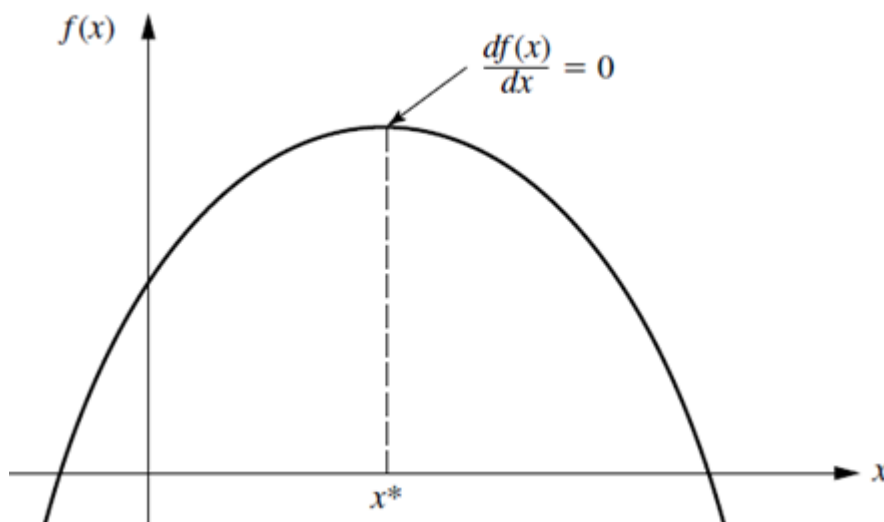
$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad \text{za } x = x^*$$

postaje i *potreban* i *dovoljan* uslov da x^* bude globalni maksimum. *11

Ako je $f(x)$ strogo konkavna funkcija, na celoj oblasti definisanosti, potreban i dovoljan uslov da određeno rešenje $x = x^*$ bude jedinstveno optimalno – jedinstveni globalni maksimum je:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad \text{za } x = x^*,$$

kao što je prikazano na slici IV-2. Slično tome, *potreban* i *dovoljan* uslov da određeno rešenje $x = x^*$ bude jedinstveni globalni minimum je isti, ako je $f(x)$ *strogo konveksna* funkcija na celoj oblasti definisanosti. *12



Slika IV-2. Bezuslovna optimizacija - strogo konkavna funkcija jedne promenljive.

Generalno, ako se jednačina $df(x)/dx = 0$ može rešiti direktno za x^* , prvi deo posla se završen. Međutim, ako $f(x)$ nije jednostavna funkcija, pa prvi izvod nije npr. u obliku linearne ili kvadratne funkcije, možda neće biti moguće analitički rešiti dobijenu jednačinu i tada se problem mora rešavati numerički. U svakom slučaju, u drugom delu, mora se utvrditi priroda svakog rešenja x^* (lokalni minimum ili maksimum, globalni minimum ili maksimum).

Bezuslovna optimizacija funkcije više promenljivih

Sada će se razmatrati problem određivanja maksimuma *konkavne* funkcije $f(\mathbf{x})$ više promenljivih $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ kada nema ograničenja koja se nameću na promenljive. Dakle, potreban uslov da rešenje $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ bude ili minimum ili maksimum (stacionarna tačka) je da: *13

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0 \quad \text{za } \mathbf{x} = \mathbf{x}^*, \text{ za } j = 1, 2, \dots, n.$$

Nakon što su identifikovane stacionarne tačke koje zadovoljavaju ovaj uslov, svaka takva tačka se klasifikuje kao lokalni minimum ili maksimum ako je funkcija *strogo konveksna* ili *strogo konkavna*, u okolini date tačke (ako to nije slučaj potrebno je izvršiti dodatne analize). *14 *Globalni minimum* i *maksimum* se pronalazi upoređivanjem lokalnih minimuma i maksimuma i zatim proveravanjem vrednosti funkcije kako se neke od promenljivih približavaju $-\infty$ ili $+\infty$. Međutim, ako se zna da je funkcija *konveksna* ili *konkavna*, na celoj oblasti definisanosti, stacionarna tačka mora biti *globalni minimum*, odnosno *globalni maksimum*, respektivno. *15

Pretpostavimo da se potreban i dovoljan uslov za optimalnost, dat sistemom jednačina koji je dobijen izjednačavanjem odgovarajućih parcijalnih izvoda sa nulom, ne može rešiti analitički, tada se mora koristiti neki numerički postupak kao što je npr. *gradijentna metoda*.

Gradijentna metoda omogućava numeričko rešavanje problema na direktan način. Kao i drugi postupci nelinearnog programiranja, gradijentna metoda pronalazi niz tekućih (probnih) rešenja koja vode ka optimalnom rešenju. Svaka iteracija započinje sa trenutnim tekućim (probnim) rešenjem kao polaznom tačkom za sprovođenje sistematske procedure koja na kraju svake iteracije dovodi do novog poboljšanog tekućeg (probnog) rešenja. *16

Cilj je da se na kraju dostigne tačka u kojoj su svi parcijalni izvodi jednaki (u suštini) 0. Generalno, gradijentna metoda koristi vrednosti parcijalnih izvoda za izbor pravca u kojem će se kretati. Za određivanje pravca kretanja od početnog rešenja do optimalnog rešenja koristi se gradijent funkcije $f(\mathbf{x})$. *17

Pošto se pretpostavlja da je funkcija $f(\mathbf{x})$ diferencijabilna, ona poseduje gradijent, označen sa $\nabla f(\mathbf{x})$, u svakoj tački \mathbf{x} . Konkretno, **gradijent** funkcije $f(\mathbf{x})$ u tački $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ je *vektor* čiji su elementi vrednosti parcijalnih izvoda funkcije $f(\mathbf{x})$ u tački $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, tj.: *18

$$\nabla f(\mathbf{x}') = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad \text{za } \mathbf{x} = \mathbf{x}'.$$

Značaj gradijenta je u tome što (infinitesimalna) promena vektora \mathbf{x} , koja maksimizira brzinu kojom se $f(\mathbf{x})$ povećava, je promena koja je proporcionalna gradijentu $\nabla f(\mathbf{x})$. Geometrijska interpretacija gradijenta je: pravac gradijenta $\nabla f(\mathbf{x}')$ se tumači kao pravac usmerene duži od koordinatnog početka $(0, 0, \dots, 0)$ do tačke $(\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \dots, \partial f / \partial x_n)$, gde je vrednost $\partial f / \partial x_j$ određena u tački $x_j = x'_j$. Stoga se može reći da je brzina kojom se $f(\mathbf{x})$ povećava maksimalna ako su (infinitesimalne) promene vektora \mathbf{x} u pravcu gradijenta $\nabla f(\mathbf{x})$. Pošto je cilj da se nađe rešenje koje maksimizira $f(\mathbf{x})$, najbrži način je kretanje u pravcu gradijenta što je više moguće.

Gradijentna metoda - osnove

Budući da se ovde radi o problemu bezuslovne optimizacije (nema ograničenja), dato tumačenje gradijenta sugerise da se pri sprovođenju sistematske procedure (nalaženja optimalnog rešenja) treba kretati u pravcu gradijenta sve dok se (u suštini) ne postigne optimalno rešenje \mathbf{x}^* , gde je $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$. Međutim, obično nije praktično neprekidno menjati \mathbf{x} u pravcu $\nabla f(\mathbf{x})$, jer bi to zahtevao kontinualnu revalorizaciju $\partial f / \partial x_j$ i promenu pravca putanje. Stoga je bolje izabrati pristup kretanja po jednom (fiksnom) pravcu, od trenutnog probnog rešenja, sve dok $f(\mathbf{x})$ ne prestane da se povećava. Ova zaustavna tačka bi bila sledeće probno rešenje, što zahteva ponovno izračunavanje gradijenta da bi se odredio novi pravac u kome se treba kretati. Uz ovaj pristup, svaka iteracija uključuje promenu trenutnog probnog rešenja (resetovanje tj. dobijanje novog probnog rešenja) na sledeći način:

$$\text{Reset} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}' + t^* \cdot \nabla f(\mathbf{x}'),$$

gde je t^* nenegativna vrednost od t koja maksimizira $f(\mathbf{x}' + t \cdot \nabla f(\mathbf{x}'))$, odnosno:

$$f(\mathbf{x}' + t^* \cdot \nabla f(\mathbf{x}')) = \max_{t \geq 0} f(\mathbf{x}' + t \cdot \nabla f(\mathbf{x}')).$$

Ako bi cilj bio da se minimizira $f(\mathbf{x})$, jedna promena u postupku bi bila kretanje u suprotnom smeru gradijenta pri svakoj iteraciji. Drugim rečima, pravilo za dobijanje sledeće tačke (probnog rešenja) bilo bi:

$$\text{Reset} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}' - t^* \cdot \nabla f(\mathbf{x}').$$

gde je t^* nenegativna vrednost od t koja minimizira $f(\mathbf{x}' - t \cdot \nabla f(\mathbf{x}'))$, odnosno:

$$f(\mathbf{x}' - t^* \cdot \nabla f(\mathbf{x}')) = \min_{t \geq 0} f(\mathbf{x}' - t \cdot \nabla f(\mathbf{x}')).$$

Potrebno je naglasiti da je $f(\mathbf{x}' + t \cdot \nabla f(\mathbf{x}'))$ u stvari $f(\mathbf{x})$ gde je:

$$x_j = x'_j + t \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} \quad \text{za } j=1,2, \dots, n.$$

i da ovi izrazi za x_j uključuju samo konstante i t , tako da $f(\mathbf{x})$ postaje funkcija samo jedne promenljive t . Iteracije kod gradijentne metode se ponavljaju sve dok $\nabla f(\mathbf{x}) \approx 0$ unutar male tolerancije ε , odnosno dok:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| \leq \varepsilon \quad \text{za } j=1,2, \dots, n.$$

Ovo pravilo zaustavljanja obično daje rešenje \mathbf{x} koje je blizu optimalnom rešenju \mathbf{x}^* , sa vrednosti $f(\mathbf{x})$ koja je vrlo blizu $f(\mathbf{x}^*)$. Međutim, to se ne može garantovati, jer je moguće da funkcija ima vrlo mali pozitivni nagib ($\leq \varepsilon$) na velikoj udaljenosti od \mathbf{x} do \mathbf{x}^* .

Najteži deo gradijentne metode je obično određivanje t^* , tj. vrednosti t koja maksimizira f u pravcu gradijenta, pri svakoj iteraciji. Budući da \mathbf{x} i $\nabla f(\mathbf{x})$ imaju fiksne vrednosti pri maksimizaciji, a kako je $f(\mathbf{x})$ konkavna funkcija, ovo treba posmatrati kao problem određivanja maksimalne vrednosti *konkavne* funkcije jedne promenljive t . Ako je f jednostavna funkcija, moguće je dobiti analitičko rešenje za t^* izjednačavanjem prvih izvoda po t sa nulom i njihovim rešavanjem.

Rezime gradijentne metode *19

Inicijalizacija: Izabati ε i bilo koje početno probno rešenje \mathbf{x}' . Prvo ispitati da li je pravilo zaustavljanja za početno probno rešenje \mathbf{x}' zadovoljeno.

Iteracija: *20

1. Izraziti $f(\mathbf{x}' + t \cdot \nabla f(\mathbf{x}'))$ kao funkciju od t izračunavanjem:

$$x_j = x'_j + t \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} \quad \text{za } j=1,2, \dots, n.$$

i zamenom tako dobijenih izraza u $f(\mathbf{x})$.

2. Naći $t = t^*$ koje maksimizuje $f(\mathbf{x}' + t \cdot \nabla f(\mathbf{x}'))$ za $t \geq 0$.

3. Reset $\mathbf{x}' = \mathbf{x}' + t^* \cdot \nabla f(\mathbf{x}')$. Nakon toga primeniti pravilo zaustavljanja.

Pravilo zaustavljanja: Izračunati vrednost $\nabla f(\mathbf{x}')$ za $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$. Proveriti da li je:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| \leq \varepsilon \quad \text{za svako } j=1,2, \dots, n.$$

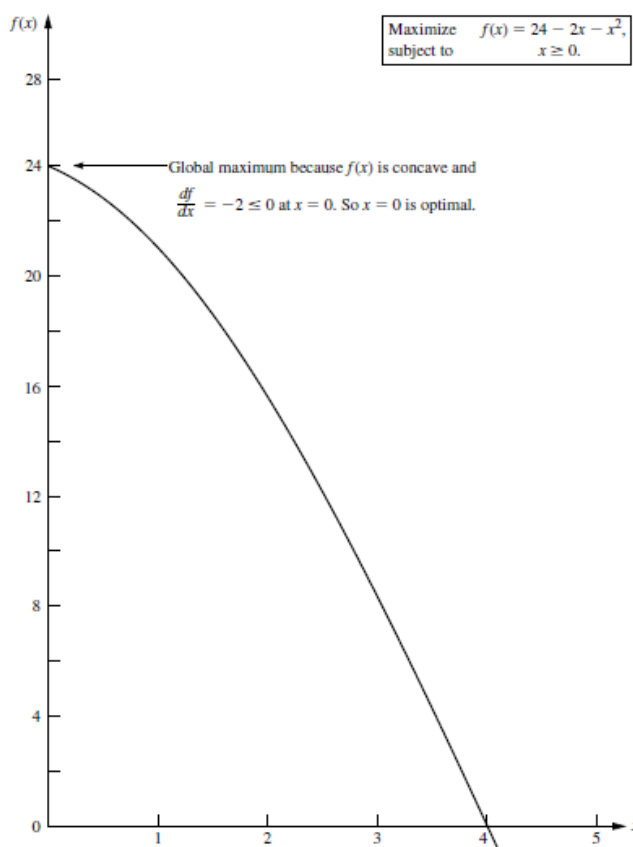
Ako je to slučaj, zaustaviti se sa tekućim \mathbf{x}' kao željenom aproksimacijom optimalnog rešenja \mathbf{x}^* . U suprotnom, izvesti još jednu iteraciju. *21

Uslovna optimizacija funkcije više promenljivih – samo ograničenja nenegativnosti

Kada promenljiva x_j ima ograničenje nenegativnosti $x_j \geq 0$, prethodni potreban i (možda) dovoljan uslov za maksimizaciju se menja u: *22

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \begin{cases} \leq 0 & \text{za } \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \text{ ako je } x_j^* = 0 \\ = 0 & \text{za } \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \text{ ako je } x_j^* > 0 \end{cases},$$

za svako takvo j . Ovaj uslov je prikazan na slici IV-3, gde je optimalno rešenje, problema sa jednom promenljivom, u tački $x = 0$ iako je prvi izvod negativan, a ne nula. Pošto je funkcija koja se maksimizuje, pri ograničenju nenegativnosti, konkavna i kako je vrednost prvog izvoda manja ili jednaka 0 u tački $x = 0$, to je zadovoljen i potreban i dovoljan uslov da $x = 0$ bude optimalano rešenje. Primer pokazuje da optimalno rešenje može biti u tački gde je vrednost prvog izvoda negativna umesto jednaka nuli, iz razloga jer se ta tačka **nalazi na granici** ograničenja nenegativnosti.



Slika IV-3. Optimizacija pri ograničenjima nenegativnosti.

Optimalno rešenje strogo konkavne funkcije, prikazane na slici IV-2, takođe zadovoljava ovaj promenjeni potreban i dovoljan uslov ($df/dx = 0$), jer je optimalno rešenje $x^* \geq 0$.

Kada promenljiva x_j ima ograničenje nenegativnosti $x_j \geq 0$, prethodni potreban i (možda) dovoljan uslov za minimizaciju se menja u: *23

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \begin{cases} \geq 0 & \text{za } \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \text{ ako je } x_j^* = 0 \\ = 0 & \text{za } \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \text{ ako je } x_j^* > 0 \end{cases},$$

za svako takvo j .

Uslovna optimizacija funkcije više promenljivih – ograničenja u obliku jednakosti

Problem pronalaženja maksimuma funkcije $f(\mathbf{x})$, u slučaju kada \mathbf{x} mora da zadovoljiti ograničenja koja su sva u obliku jednačina može se napisati kao: *24

$$\max f(\mathbf{x}),$$

pri ograničenjima:

$$g_1(\mathbf{x}) = b_1,$$

$$g_2(\mathbf{x}) = b_2,$$

$$\vdots$$

$$g_m(\mathbf{x}) = b_m,$$

gde je $m < n$.

Klasična metoda za rešavanje ovog problema je **metoda Lagrange-ovih množitelja**. Ovaj postupak započinje formiranjem **Lagrange-ove funkcije**: *25

$$\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot [g_i(\mathbf{x}) - b_i],$$

gde se nove promenljive $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ nazivaju *Lagrange-ovi množitelji*.

Važno je napomenuti da za izvodljive vrednosti (rešenja) \mathbf{x} , važi:

$$g_i(\mathbf{x}) - b_i = 0 \quad \text{za sve } i,$$

u kom slučaju je $\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x})$. Stoga, može se pokazati da ako je $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = (\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ *lokalni* ili *globalni minimum* ili *maksimum* za neograničenu funkciju $\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$, tada je \mathbf{x}^* odgovarajuća *stacionarna tačka* za polazni problem. Kao rezultat, metoda se svodi na analizu $\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ postupkom bezuslovne optimizacije. Što znači da se $n + m$ parcijalnih izvoda treba izjednačiti sa nulom: *26

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} = -g_i(\mathbf{x}) + b_i = 0, \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, m,$$

i tada će se stacionarne tačke dobiti rešavanjem gornjih jednačina po $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$. Potrebno je napomenuti da su poslednjih m jednačina jednake ograničenjima polaznog problema, što znači da se razmatraju samo izvodljiva rešenja. Nakon dodatne analize da bi se odredio *globalni minimum* ili *maksimum* od $\Phi(\cdot)$, dobijena vrednost za \mathbf{x} je tada traženo rešenje polaznog problema.

Sa praktičnog računskog stanovišta, metoda Lagrange-ovih množitelja nije naročito korisna procedura. Često nije moguće rešiti sistem jednačina tj. nije

moguće odrediti stacionarne tačke. Štaviše, čak i kada se stacionarne tačke mogu odrediti, broj stacionarnih tačaka može biti toliko velik (često beskonačan), da nije praktično pokušavati određivanje globalnog minimuma ili maksimuma. Međutim, za određene vrste malih problema ova metoda se može uspešno koristiti.

Uslovna optimizacija funkcije više promenljivih – Karush-Kuhn-Tucker (KKT) uslovi

Potrebni i (možda) dovoljni uslovi koje *optimalno rešenje* problema nelinearnog programiranja (sa diferencijabilnim funkcijama) mora da zadovolji su takozvani **Karush-Kuhn-Tucker-ovi uslovi** (ili **KKT uslovi**). Ti uslove su izvedeni od strane Karush-a odnosno Kuhn-a i Tucker-a nezavisno. Njihov osnovni rezultat je sadržan u sledećoj teoremi. *27

Teorema #1. Pretpostavimo da su $f(\mathbf{x})$, $g_1(\mathbf{x})$, $g_2(\mathbf{x})$, ..., $g_m(\mathbf{x})$ diferencijabilne funkcije koje zadovoljavaju određene uslove regularnosti. Tada:

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*),$$

može biti optimalno rešenje problema nelinearnog programiranja samo ako postoji m brojeva $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ takvih da zadovoljavaju sve naredne *KKT uslove*:

1. $\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0^1$ za $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$, za $j=1,2, \dots, n$.
2. $x_j^* \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) = 0$ za $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$, za $j=1,2, \dots, n$.
3. $g_i(\mathbf{x}^*) - b_i \leq 0$ za $i=1,2, \dots, m$.
4. $\lambda_i \cdot [g_i(\mathbf{x}^*) - b_i] = 0$ za $i=1,2, \dots, m$.
5. $x_j^* \geq 0$ za $j=1,2, \dots, n$.
6. $\lambda_i \geq 0$ za $i=1,2, \dots, m$.

Treba naglasiti da uslovi 2 i 4 zahtevaju da proizvod dva člana bude jednak nuli. Drugim rečima, to znači da najmanje jedan od dva člana mora biti jednaka nuli. Shodno tome, uslov 4 može biti kombinovan sa uslovom 3 da bi se izrazio u drugom ekvivalentnom obliku kao:

$$(3, 4) \quad \begin{aligned} &g_i(\mathbf{x}^*) - b_i = 0 \\ &(\text{ili } \leq 0 \text{ ako } \lambda_i = 0), \quad \text{za } i=1,2, \dots, m. \end{aligned}$$

¹ U slučaju minimizacije prvi KKT uslov je nejednačina oblika “ \geq ”.

Slično tome, uslov 2 može se kombinovati sa uslovom 1 na sledeći način:

$$(1, 2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0$$

$$(\text{ili } \leq 0 \text{ ako } x_j^* = 0), \quad \text{za } j=1, 2, \dots, n.$$

Kada je $m = 0$ (nema funkcionalnih ograničenja), nestaje suma u gornjem kombinovanom uslovu (1, 2), koji se tada svodi na uslov prikazan u trećem redu tabele IV-1. Tako, kada je $m > 0$, svaki član u sumi modifikuje uslov (1, 2) za $m = 0$ na način koji uključuje uticaj odgovarajućeg funkcionalnog ograničenja.

Međutim, potrebno je naglasti da ispunjavanje ovih uslova ne garantuje da je rešenje optimalno. Kao što je prikazano u krajnjoj desnoj koloni tabele IV-1, da bi se sa sigurnošću moglo tvrditi da je rešenje optimalno, potrebne su određene dodatne pretpostavke vezane za konveksnost. Te pretpostavke su precizirane u posledici Teoreme #1.

Posledica. Pretpostavimo da je $f(\mathbf{x})$ konkavna funkcija i da su $g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})$ konveksne funkcije (problem konveksnog programiranja), i da sve ove funkcije zadovoljavaju uslove regularnosti. Tada je $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ optimalno rešenje (maksimum) ako i samo ako su zadovoljeni svi uslovi teoreme. *28

U tabeli IV-1 su prikazani potrebni i dovoljni uslovi koje optimalno rešenje različitih problema nelinearnog programiranja (sa diferencibilnim funkcijama) mora da zadovolji.

Tabela IV-1. Potrebni i dovoljni uslovi optimalnosti.

Problem	Potreban uslov optimalnosti	Dovoljan ako je:
Bezuslovna optimizacija – jedna promenljiva	$\frac{df}{dx} = 0$	$f(x)$ konkavna
Bezuslovna optimizacija – više promenljivih	$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ (za $j = 1, 2, \dots, n$)	$f(\mathbf{x})$ konkavna
Uslovna optimizacija – ograničenja nenegativnosti	$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ (za $j = 1, 2, \dots, n$) (ili ≤ 0 ako $x_j^* = 0$)	$f(\mathbf{x})$ konkavna
Uslovna optimizacija – uopšteno *29	Karush-Kuhn-Tucker uslovi	$f(\mathbf{x})$ konkavna i $g_i(\mathbf{x})$ konveksne ($i = 1, 2, \dots, m$)

Metoda neposrednog isključivanja promenljivih

U određenim slučajevima za rešavanje zadatka NP može se primeniti metoda neposrednog isključivanja promenljivih. Primena ove metode uslovljena je dimenzijom problema kao i prirodom ograničenja u modelu. Matematički model zadatka NP je oblika: *30

$$\max f(\mathbf{x}),$$

pri ograničenjima:

$$g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \text{ za } i=1,2, \dots, m,$$

i

$$\mathbf{x} \geq 0,$$

gde je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ovako postavljen zadatak NP se može svesti na kanonički oblik dodavanjem izravnavajućih promenljivih, koje po svojoj prirodi moraju biti veće ili jednake nuli. U tom slučaju sistem ograničenja se svodi na oblik: *31

$$g_i(\mathbf{x}) + x_{n+i} - b_i = 0, \text{ za } i=1,2, \dots, m.$$

I slučaj: Broj promenljivih je manji ili jednak broju ograničenja ($n \leq m$)

Ako postoji mogućnost da se stvarne promenljive x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) izraze u zavisnosti od izravnavajućih promenljivih x_{n+i} $i=1,2, \dots, m$, kao:

$$x_j = \psi(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}),$$

tada se postavljeni zadatak NP može svesti na nalaženje bezuslovnog ekstrema funkcije:

$$\max f(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}).$$

II slučaj: Broj promenljivih je veći od broja ograničenja ($n > m$)

Ako postoji mogućnost da se k ($k \leq m$) prvih stvarnih promenljivih x_j izraze u zavisnosti od preostalih $(n - k)$ stvarnih promenljivih i izravnavajućih promenljivih x_{n+i} $i=1,2, \dots, m$, kao:

$$x_j = \psi(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n, \dots, x_{n+m}),$$

tada se postavljeni zadatak NP može svesti na nalaženje bezuslovnog ekstrema funkcije:

$$\max f(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n, \dots, x_{n+m}).$$

Pitanja:

1. Formulacija problema nelinearnog programiranja.
2. Vrste problema nelinearnog programiranja.
3. Bezuslovna optimizacija.
4. Nelinearno programiranje sa linearnim skupom ograničenjima.
5. Konveksno programiranje.
6. Separabilno programiranje.
7. Uslov koji treba da bude zadovoljen da bi određena tačka bila minimum ili maksimum tj. stacionarna tačka.
8. Potreban i dovoljan uslov da stacionarna tačka bude lokalni minimum funkcije jedne promenljive.
9. Potreban i dovoljan uslov da stacionarna tačka bude lokalni maksimum funkcije jedne promenljive.
10. Određivanje globalnog minimuma/maksimuma.
11. Uslovi da tačka bude globalni maksimum/minimum funkcije jedne promenljive.
12. Uslovi da tačka bude jedinstveni globalni maksimum/minimum funkcije jedne promenljive.
13. Potreban uslov da tačka bude minimum ili maksimum funkcije više promenljivih pri bezuslovnoj optimizaciji.
14. Određivanje lokalnog minimuma/maksimuma funkcije više promenljivih pri bezuslovnoj optimizaciji.
15. Uslov da stacionarna tačka bude globalni minimum/maksimum funkcije više promenljivih pri bezuslovnoj optimizaciji.
16. Opis gradijentne metode.
17. Cilj i izbor pravca kretanja gradijentne metode.
18. Definicija gradijenta funkcije više promenljivih.
19. Koraci u realizaciji gradijentne metode.
20. Iteracije gradijentne metode – iz čega se sastoji.
21. Pravilo zaustavljanja gradijentne metode – primena.
22. Potreban i dovoljan uslov za određivanje maksimuma pri uslovnoj optimizaciji funkcije više promenljivih pri ograničenjima nenegativnosti.
23. Potreban i dovoljan uslov za određivanje minimuma pri uslovnoj optimizaciji funkcije više promenljivih pri ograničenjima nenegativnosti.
24. Postavka problema uslovne optimizacije funkcije više promenljivih pri ograničenjima u obliku jednakosti.
25. Oblik Lagrange-ove funkcije.
26. Sistem jednačina za određivanje stacionarnih tačaka kod metode Lagrange-ovih množilja.
27. Teorema #1 (KKT uslovi).
28. Posledica Teoreme #1.
29. Potrebni i dovoljni uslovi za optimizaciju funkcije više promenljivih u opštem slučaju.
30. Metoda neposrednog isključivanja promenljivih, od čega zavisi primena i postavka problema koji se mogu rešavati.
31. Osnovna ideja metode neposrednog isključivanja promenljivih.