

## Nelinearno Programiranje - Primeri

### Zadatak 01

Za funkciju dve promenljive:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2,$$

naći stacionarne tačke i odrediti njihovu prirodu.

#### **Rešenje:**

Stacionarne tačke se određuju iz sistema algebarskih jednačina koji se dobija izjednačavanjem prvih parcijalnih izvoda funkcije sa nulom:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 \cdot x_1 = 0, \quad \rightarrow \quad x_1 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2 \cdot x_2 = 0, \quad \rightarrow \quad x_2 = 0,$$

odakle proizilazi da data funkcija ima jednu stacionarnu tačku čije su koordinate  $A_1(x_1, x_2) = A_1(0, 0)$ .

Da bi se odredila priroda stacionarne tačke, prvo je potrebno odrediti oblik funkcije u okolini stacionarne tačke. U tu svrhu potrebno je formirati Hessian matricu, tj. odrediti druge parcijalne izvode:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} = 0.$$

Hessian matrica je oblika:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

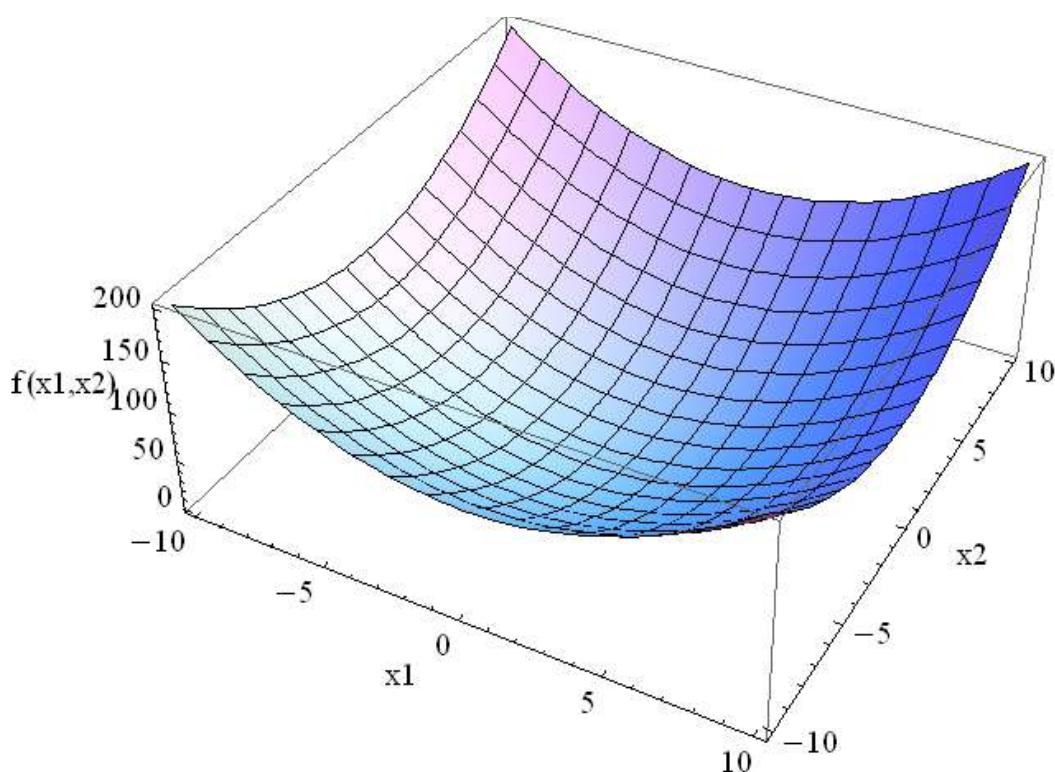
Kako su elementi Hessian matrice konstante a glavni minori  $D_1 = 2 > 0$  i  $D_2 = 4 > 0$ , to je na osnovu Silvester-ovog kriterijma Hessian matrica pozitivno definitna, na celjoj oblasti definisanosti funkcije.

Definitnost Hessian matrice se može odrediti i na osnovu njenih sopstvenih vrednosti, na sledeći način:

$$\det[H - \lambda \cdot I] = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2 = 0,$$

odakle su sopstvene vrednosti Hessian matrice  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 > 0$ . Kako su elementi Hessian matrice konstante i na osnovu sopstvenih vrednosti može se zaključiti da je Hessian matrica pozitivno definitna, na celoj oblasti definisanosti funkcije.

Na osnovu definitnosti Hessian matrice i činjenice da postoji samo jedna stacionarna tačka, zaključuje se da je funkcija strogo konveksna i da stacionarna tačka  $A_1(0, 0)$  predstavlja jedinstveni globalni minimum. Vrednost funkcije u tački globalnog minimuma iznosi  $f(0, 0) = 0$ . Izgled funkcije prikazan je na grafiku na slici Z1-1.



Slika Z1-1. Grafik funkcije  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

## Zadatak 02

Za funkciju dve promenljive:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2,$$

naći stacionarne tačke i odrediti njihovu prirodu.

### **Rešenje:**

Stacionarne tačke se određuju iz sistema algebarskih jednačina koji se dobija izjednačavanjem prvih parcijalnih izvoda funkcije sa nulom:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 \cdot (x_1 - x_2) = 0, \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2 \cdot (x_1 - x_2) = 0, \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2,$$

odakle proizilazi da data funkcija ima beskonačno mnogo stacionarnih tačka koje se nalaze na pravoj  $x_1 = x_2$ .

Da bi se odredila priroda stacionarnih tačaka, kao i oblik funkcije u okolini stacionarnih tačaka potrebno je formirati Hessian matricu, tj. odrediti druge parcijalne izvode:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} = -2.$$

Hessian matrica je oblika:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

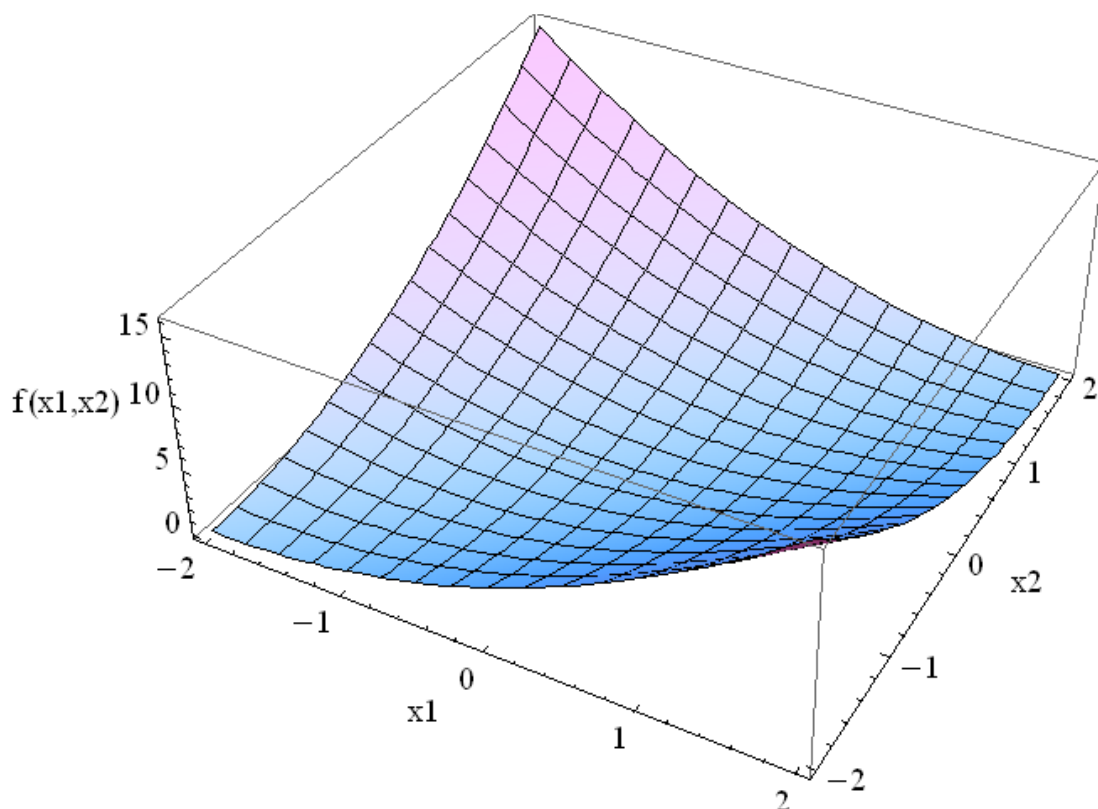
Kako su elementi Hessian matrice konstante a glavni minori  $D_1 = 2 > 0$  i  $D_2 = 0$ , to je na osnovu Silvester-ovog kriterijma Hessian matrica pozitivno semidefinitna, na celoj oblasti definisanosti funkcije.

Definitnost Hessian matrice se može odrediti i na osnovu njenih sopstvenih vrednosti, na sledeći način:

$$\det[H - \lambda \cdot I] = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda \cdot (\lambda - 4) = 0,$$

odakle su sopstvene vrednosti Hessian matrice  $\lambda_1 = 0$  i  $\lambda_2 = 4 > 0$ . Kako su elementi Hessian matrice konstante i na osnovu sopstvenih vrednosti može se zaključiti da je Hessian matrica pozitivno semidefinitna, na celoj oblasti definisanosti funkcije.

Na osnovu definitnosti Hessian matrice zaključuje se da je funkcija konveksna i da stacionarne tačke na pravoj  $x_1 = x_2$  predstavljaju lokalne minimume. Vrednosti funkcije u tačkama lokalnog minimuma su međusobno jednake i iznose  $f(\bullet, \bullet) = 0$ . Kako je vrednost funkcije u tačkama lokalnih minimuma najmanja na celoj oblasti definisanosti to tačke lokalnih minimuma predstavljaju i globalni minimum. Izgled funkcije prikazan je na grafiku na slici Z2-1.



Slika Z2-1. Grafik funkcije  $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$ .

### Zadatak 03

Za funkciju dve promenljive:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^3 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2^2 - 60 \cdot x_2,$$

naći stacionarne tačke i odrediti njihovu prirodu.

#### **Rešenje:**

Stacionarne tačke se određuju iz sistema algebarskih jednačina koji se dobija izjednačavanjem prvih parcijalnih izvoda funkcije sa nulom:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3 \cdot (x_1 + x_2)^2 - 3 \cdot x_2^2 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3 \cdot (x_1 + x_2)^2 - 6 \cdot x_1 \cdot x_2 - 60 = 0.$$

Gornji sistem algebarskih jednačina posle sređivanja se može napisati u obliku:

$$x_1 \cdot (x_1 + 2 \cdot x_2) = 0, \quad \rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_1 = -2 \cdot x_2,$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 20 = 0.$$

Zamenom vrednosti za  $x_1 = 0$  u drugu jednačinu dobija se:

$$x_2 = \pm 2 \cdot \sqrt{5},$$

dok se zamenom  $x_1 = -2 \cdot x_2$  u drugu jednačinu dobija:

$$x_2^2 = 4, \text{ odnosno } x_2 = \pm 2, \text{ odakle je } x_1 = \mp 4.$$

Na osnovu rešenja prethodnog sistema jednačina, zaključuje se da data funkcija ima četiri stacionarne tačke čije su koordinate:

$$A_1(x_1, x_2) = A_1(0, 2 \cdot \sqrt{5}), \quad A_2(x_1, x_2) = A_1(0, -2 \cdot \sqrt{5}),$$

$$A_3(x_1, x_2) = A_3(-4, 2), \quad A_4(x_1, x_2) = A_4(4, -2).$$

Da bi se odredila priroda stacionarnih tačaka, kao i oblik funkcije u okolini stacionarnih tačaka potrebno je formirati Hessian matricu, tj. odrediti druge parcijalne izvode:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6 \cdot (x_1 + x_2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 6 \cdot x_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} = 6 \cdot x_1.$$

Hessian matrica je oblika:

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 6 \cdot (x_1 + x_2) & 6 \cdot x_1 \\ 6 \cdot x_1 & 6 \cdot x_2 \end{bmatrix}.$$

1. Oblik funkcije i priroda stacionarne tačke u okolini stacionarne tačke  $A_1(0, 2 \cdot \sqrt{5})$

*Definitnost Hessian matrice u okolini stacionarne tačke  $A_1$*

Hessian matrica u okolini stacionarne tačke  $A_1$  je oblika:

$$H(0, 2 \cdot \sqrt{5}) = \begin{bmatrix} 12 \cdot \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 12 \cdot \sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

I način:

Glavni minori Hessian matrice u okolini stacionarne tačke  $A_1$  su  $D_1 = 12 \cdot \sqrt{5} > 0$  i  $D_2 = 720 > 0$ , pa je na osnovu Silvester-ovog kriterijma Hessian matrica, u okolini stacionarne tačke  $A_1$ , pozitivno definitna.

II način:

Sopstvene vrednosti Hessian matrice u okolini stacionarne tačke  $A_1(0, 2 \cdot \sqrt{5})$ , određuju se iz:

$$\det[H(0, 2 \cdot \sqrt{5}) - \lambda \cdot I] = \begin{vmatrix} 12 \cdot \sqrt{5} - \lambda & 0 \\ 0 & 12 \cdot \sqrt{5} - \lambda \end{vmatrix} = (12 \cdot \sqrt{5} - \lambda)^2 = 0,$$

odakle su sopstvene vrednosti Hessian matrice  $\lambda_1 = \lambda_2 = 12 \cdot \sqrt{5} > 0$ . Na osnovu sopstvenih vrednosti može se zaključiti da je Hessian matrica, u okolini stacionarne tačke  $A_1$ , pozitivno definitna.

Na osnovu definitnosti Hessian matrice, u okolini stacionarne tačke  $A_1$ , zaključuje se da je funkcija u okolini stacionarne tačke  $A_1$  strogo konveksna i da stacionarna tačka  $A_1$  predstavlja lokalni minimum. Vrednost funkcije u stacionatnoj tački  $A_1(0, 2 \cdot \sqrt{5})$  iznosi:

$$f(0, 2 \cdot \sqrt{5}) = -80 \cdot \sqrt{5}.$$

2. Oblik funkcije i priroda stacionarne tačke u okolini stacionarne tačke  $A_2(0, -2 \cdot \sqrt{5})$

*Definitnost Hessian matrice u okolini stacionarne tačke  $A_2$*

Hessian matrica u okolini stacionarne tačke  $A_2$  je oblika:

$$H(0, -2 \cdot \sqrt{5}) = \begin{bmatrix} -12 \cdot \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -12 \cdot \sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

### I način:

Glavni minori Hessian matrice u okolini stacionarne tačke  $A_2$  su  $D_1 = -12 \cdot \sqrt{5} < 0$  i  $D_2 = 720 > 0$ , pa je na osnovu Silvester-ovog kriterijma Hessian matrica, u okolini stacionarne tačke  $A_2$ , negativno definitna.

### II način:

Sopstvene vrednosti Hessian matrice u okolini stacionarne tačke  $A_2(0, -2 \cdot \sqrt{5})$ , određuju se iz:

$$\det[H(0, -2 \cdot \sqrt{5}) - \lambda \cdot I] = \begin{vmatrix} -12 \cdot \sqrt{5} - \lambda & 0 \\ 0 & -12 \cdot \sqrt{5} - \lambda \end{vmatrix} = (-12 \cdot \sqrt{5} - \lambda)^2 = 0,$$

odakle su sopstvene vrednosti Hessian matrice  $\lambda_1 = \lambda_2 = -12 \cdot \sqrt{5} < 0$ . Na osnovu sopstvenih vrednosti može se zaključiti da je Hessian matrica, u okolini stacionarne tačke  $A_2$ , negativno definitna.

Na osnovu definitnosti Hessian matrice, u okolini stacionarne tačke  $A_2$ , zaključuje se da je funkcija u okolini stacionarne tačke  $A_2$  strogo konkavna i da stacionarna tačka  $A_2$  predstavlja lokalni maksimum. Vrednost funkcije u stacionatnoj tački  $A_2(0, -2 \cdot \sqrt{5})$  iznosi:

$$f(0, -2 \cdot \sqrt{5}) = 80 \cdot \sqrt{5}.$$

### 3. Oblik funkcije i priroda stacionarne tačke u okolini stacionarne tačke $A_3(-4, 2)$

#### *Definitnost Hessian matrice u okolini stacionarne tačke $A_3$*

Hessian matrica u okolini stacionarne tačke  $A_3$  je oblika:

$$H(-4, 2) = \begin{bmatrix} -12 & -24 \\ -24 & 12 \end{bmatrix}.$$

### I način:

Glavni minori Hessian matrice u okolini stacionarne tačke  $A_3$  su  $D_1 = -12 < 0$  i  $D_2 = -720 < 0$ , pa na osnovu Silvester-ovog kriterijma nije moguće odrediti definitnost Hessian matrice, u okolini stacionarne tačke  $A_3$ .

### II način:

Sopstvene vrednosti Hessian matrice u okolini stacionarne tačke  $A_3(-4, 2)$ , određuju se iz:

$$\det[H(-4, 2) - \lambda \cdot I] = \begin{vmatrix} -12 - \lambda & -24 \\ -24 & 12 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 720 = 0,$$

odakle su sopstvene vrednosti Hessian matrice  $\lambda_1 = 12 \cdot \sqrt{5} > 0$ ,  $\lambda_2 = -12 \cdot \sqrt{5} < 0$ . Na osnovu sopstvenih vrednosti može se zaključiti da je Hessian matrica, u okolini stacionarne tačke  $A_3$ , nedefinitna.

Na osnovu definitnosti Hessian matrice, u okolini stacionarne tačke  $A_3$ , nije moguće odrediti oblik funkcije tako da stacionarna tačka  $A_3$  predstavlja prevojnu tačku. Vrednost funkcije u stacionatnoj tački  $A_3(-4, 2)$  iznosi:

$$f(-4, 2) = -80.$$

4. Oblik funkcije i priroda stacionarne tačke u okolini stacionarne tačke  $A_4(4, -2)$

*Definitnost Hessian matrice u okolini stacionarne tačke  $A_4$*

Hessian matrica u okolini stacionarne tačke  $A_4$  je oblika:

$$H(4, -2) = \begin{bmatrix} 12 & 24 \\ 24 & -12 \end{bmatrix}.$$

I način:

Glavni minori Hessian matrice u okolini stacionarne tačke  $A_4$  su  $D_1 = 12 > 0$  i  $D_2 = -720 < 0$ , pa na osnovu Silvester-ovog kriterijma nije moguće odrediti definitnost Hessian matrice, u okolini stacionarne tačke  $A_4$ .

II način:

Sopstvene vrednosti Hessian matrice u okolini stacionarne tačke  $A_4(4, -2)$ , određuju se iz:

$$\det[H(4, -2) - \lambda \cdot I] = \begin{vmatrix} 12 - \lambda & 24 \\ 24 & -12 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - 720 = 0,$$

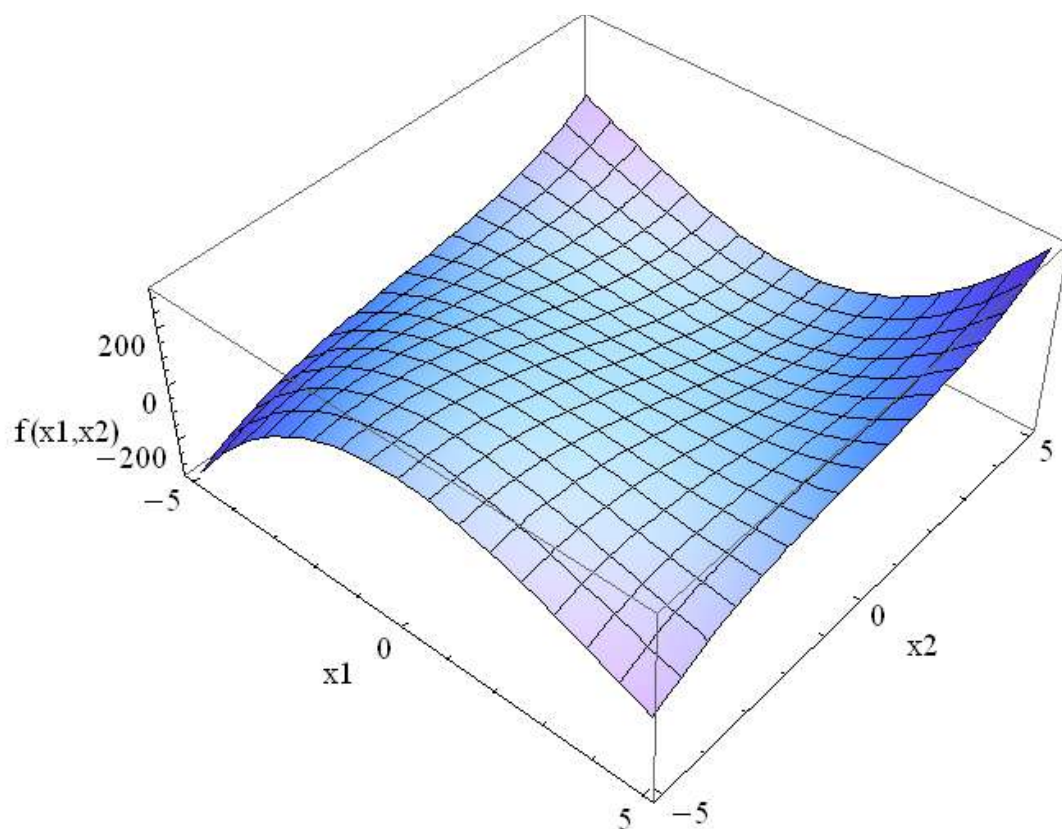
odakle su sopstvene vrednosti Hessian matrice  $\lambda_1 = i \cdot 12 \cdot \sqrt{5}$ ,  $\lambda_2 = -i \cdot 12 \cdot \sqrt{5}$ . Na osnovu sopstvenih vrednosti može se zaključiti da je Hessian matrica, u okolini stacionarne tačke  $A_4$ , nedefinitna.

Na osnovu definitnosti Hessian matrice, u okolini stacionarne tačke  $A_4$ , nije moguće odrediti oblik funkcije tako da stacionarna tačka  $A_4$  predstavlja prevojnu tačku. Vrednost funkcije u stacionatnoj tački  $A_4(4, -2)$  iznosi:

$$f(4, -2) = 80.$$

Izgled funkcije prikazan je na grafiku na slici Z3-1.





Slika Z3-1. Grafik funkcije  $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^3 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2^2 - 60 \cdot x_2$ .

### Zadatak 04

Za funkciju tri promenljive:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 - x_1^3 - (x_2 - 8)^2 - x_3^2,$$

naći stacionarne tačke i odrediti njihovu prirodu.

#### **Rešenje:**

Stacionarne tačke se određuju iz sistema algebarskih jednačina koji se dobija izjednačavanjem prvih parcijalnih izvoda funkcije sa nulom:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3 - 3 \cdot x_1^2 = 0, \quad \rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_1 = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 8 - 2 \cdot (x_2 - 8) = 0, \quad \rightarrow \quad x_2 = 12,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 6 - 2 \cdot x_3 = 0, \quad \rightarrow \quad x_3 = 3.$$

Na osnovu rešenja prethodnog sistema jednačina, zaključuje se da data funkcija ima četiri stacionarne tačke čije su koordinate:

$$A_1(x_1, x_2, x_3) = A_1(1, 12, 3), \quad A_2(x_1, x_2, x_3) = A_2(-1, 12, 3).$$

Da bi se odredila priroda stacionarnih tačaka, kao i oblik funkcije u okolini stacionarnih tačaka potrebno je formirati Hessian matricu, tj. odrediti druge parcijalne izvode:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= -6 \cdot x_1, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} &= -2, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} &= -2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} &= 0, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_3} &= 0, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_3} &= 0. \end{aligned}$$

Hessian matrica je oblika:

$$H(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} -6 \cdot x_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Oblik funkcije i priroda stacionarne tačke u okolini stacionarne tačke  $A_1(1, 12, 3)$

### *Definitnost Hessian matrice u okolini stacionarne tačke $A_1$*

Hessian matrica u okolini stacionarne tačke  $A_1$  je oblika:

$$H(1, 12, 3) = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

#### I način:

Glavni minori Hessian matrice u okolini stacionarne tačke  $A_1$  su  $D_1 = -6 < 0$ ,  $D_2 = 12 > 0$  i  $D_3 = -24 < 0$ , pa je na osnovu Silvester-ovog kriterijma Hessian matrica, u okolini stacionarne tačke  $A_1$ , negativno definitna.

#### II način:

Sopstvene vrednosti Hessian matrice u okolini stacionarne tačke  $A_1(1, 12, 3)$ , određuju se iz:

$$\det[H(1, 12, 3) - \lambda \cdot I] = \begin{vmatrix} -6 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (-6 - \lambda) \cdot (-2 - \lambda) \cdot (-2 - \lambda) = 0,$$

odakle su sopstvene vrednosti Hessian matrice  $\lambda_1 = -6 < 0$ ,  $\lambda_2 = -2 < 0$ ,  $\lambda_3 = -2 < 0$ . Na osnovu sopstvenih vrednosti može se zaključiti da je Hessian matrica, u okolini stacionarne tačke  $A_1$ , negativno definitna.

Na osnovu definitnosti Hessian matrice, u okolini stacionarne tačke  $A_1$ , zaključuje se da je funkcija u okolini stacionarne tačke  $A_1$  strogo konkavna i da stacionarna tačka  $A_1$  predstavlja lokalni maksimum. Vrednost funkcije u stacionatnoj tački  $A_1(1, 12, 3)$  iznosi:

$$f(1, 12, 3) = 91.$$

### 2. Oblik funkcije i priroda stacionarne tačke u okolini stacionarne tačke $A_2(-1, 12, 3)$

#### *Definitnost Hessian matrice u okolini stacionarne tačke $A_2$*

Hessian matrica u okolini stacionarne tačke  $A_2$  je oblika:

$$H(-1, 12, 3) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

I način:

Glavni minori Hessian matrice u okolini stacionarne tačke  $A_2$  su  $D_1 = 6 > 0$ ,  $D_2 = -12 < 0$  i  $D_3 = 24 > 0$ , pa na osnovu Silvester-ovog kriterijma nije moguće odrediti definitnost Hessian matrice, u okolini stacionarne tačke  $A_2$ .

II način:

Sopstvene vrednosti Hessian matrice u okolini stacionarne tačke  $A_2(-1,12,3)$ , određuju se iz:

$$\det[H(-1,12,3) - \lambda \cdot I] = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda) \cdot (-2-\lambda) \cdot (-2-\lambda) = 0,$$

odakle su sopstvene vrednosti Hessian matrice  $\lambda_1 = 6 > 0$ ,  $\lambda_2 = -2 < 0$ ,  $\lambda_3 = -2 < 0$ . Na osnovu sopstvenih vrednosti može se zaključiti da je Hessian matrica, u okolini stacionarne tačke  $A_2$ , nedefinitna.

Na osnovu definitnosti Hessian matrice, u okolini stacionarne tačke  $A_2$ , nije moguće odrediti oblik funkcije tako da stacionarna tačka  $A_2$  predstavlja prevojnu tačku. Vrednost funkcije u stacionatnoj tački  $A_2(-1,12,3)$  iznosi:

$$f(-1, 12, 3) = 87.$$

## Zadatak 05

Za funkciju dve promenljive:

$$f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2 - x_1^2 - 2 \cdot x_2^2,$$

gradijentnom metodom odrediti stacionarne tačke i njihovu prirodu.

### **Rešenje:**

Za primenu gradijentne metode potrebno je prvo odrediti prve parcijalne izvode (gradijent) funkcije:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2 \cdot x_1 + 2 - 4 \cdot x_2,$$

odnosno:  $\nabla f(x_1, x_2) = (2 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1, 2 \cdot x_1 + 2 - 4 \cdot x_2)$ .

Da bi se odredila priroda stacionarnih tačaka, kao i oblik funkcije u okolini stacionarnih tačaka potrebno je formirati Hessian matricu, tj. odrediti druge parcijalne izvode:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} = 2.$$

Hessian matrica je oblika:

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Kako su elementi Hessian matrice konstante a glavni minori  $D_1 = -2 < 0$  i  $D_2 = 4 > 0$ , to je na osnovu Silvester-ovog kriterijma Hessian matrica negativno definitna, na celoj oblasti definisanosti funkcije. Na osnovu definitnosti Hessian matrice dalje se zaključuje da je funkcija strogo konkavna.

### Inicijalizacija:

Za početnu tačku za primenu gradijentne metode bira se tačka  $\mathbf{x}' = (0, 0)$  i usvaja se  $\varepsilon = 0.01$ .

Vrednost gradijenta funkcije u početnoj tački je  $\nabla f(0, 0) = (0, 2)$ . Kako uslov  $|\partial f / \partial x_i| \leq \varepsilon$  za  $i = 1, 2$  nije uspunjen u početnoj tački, potrebno je krenuti sa iteracijama.

1. iteracija: tačka  $\mathbf{x}' = (0, 0)$

1. Korak:

$$\begin{aligned}x_1 &= x'_1 + t \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} = 0 + t \cdot (2 \cdot 0 - 2 \cdot 0) \rightarrow x_1 = 0, \\x_2 &= x'_2 + t \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} = 0 + t \cdot (2 \cdot 0 + 2 - 4 \cdot 0) \rightarrow x_2 = 2 \cdot t. \\f(\mathbf{x}' + t \cdot \nabla f(\mathbf{x}')) &= f(x_1, x_2) = f(0, 2 \cdot t), \\&= 2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot t + 2 \cdot 2 \cdot t - 0^2 - 2 \cdot (2 \cdot t)^2, \\&= 4 \cdot t - 8 \cdot t^2.\end{aligned}$$

II korak:

Parametar  $t$  se određuje iz uslova:

$$\max_{t \geq 0} f(0, 2 \cdot t) = \max_{t \geq 0} \{4 \cdot t - 8 \cdot t^2\},$$

odnosno

$$\frac{d}{dt} (4 \cdot t - 8 \cdot t^2) = 4 - 16 \cdot t = 0, \text{ odakle je } t^* = \frac{1}{4}.$$

III korak:

Nova tačka  $\mathbf{x}'$  se određuje na sledeći način:

$\mathbf{x}' = \mathbf{x}' + t^* \cdot \nabla f(\mathbf{x}')$ , odnosno

$$\begin{aligned}x'_1 &= x'_1 + t^* \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} = 0 + \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot 0 - 2 \cdot 0) \rightarrow x'_1 = 0, \\x'_2 &= x'_2 + t^* \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} = 0 + \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot 0 + 2 - 4 \cdot 0) \rightarrow x'_2 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Vrednost gradijenta funkcije u novoj tački  $\mathbf{x}' = (0, 1/2)$  je  $\nabla f(0, 1/2) = (1, 0)$ . Kako uslov  $|\partial f / \partial x_i| \leq \varepsilon$  za  $i = 1, 2$  za novu tačku nije ispunjen potrebno je nastaviti sa iteracijama.

2. iteracija: tačka  $\mathbf{x}' = (0, 1/2)$

!! Povoviti korake prikazane u iteraciji 1. !!

.....

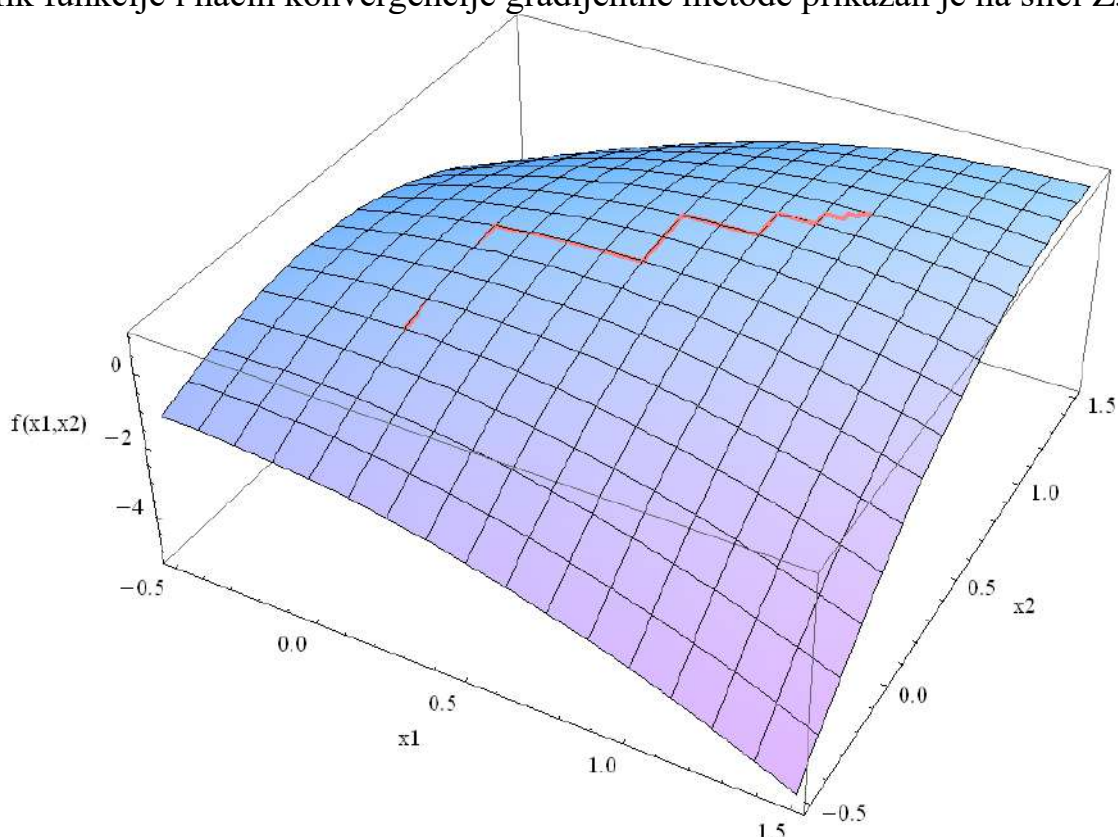
Iteracije je potrebno ponavljati dok se ne ispuni uslov  $|\partial f / \partial x_i| \leq \varepsilon$  za  $i = 1, 2$ .

Karakteristični rezultati po iteracijama prikazani su u Tabeli Z5-1.

Tabela Z5-1. Karakteristični rezultati po iteracijama.

Iter.	$\mathbf{x}'$	$\nabla f(\mathbf{x}')$	$\mathbf{x}' + t \cdot \nabla f(\mathbf{x}')$	$f(\mathbf{x}' + t \cdot \nabla f(\mathbf{x}'))$	$t^*$	$\mathbf{x}' + t^* \cdot \nabla f(\mathbf{x}')$
1	(0, 0)	(0, 2)	(0, $2 \cdot t$ )	$4 \cdot t - 8 \cdot t^2$	$\frac{1}{4}$	$(0, \frac{1}{2})$
2	$(0, \frac{1}{2})$	(1, 0)	$(t, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} + t - t^2$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
3	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	(0, 1)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + t)$	$\frac{3}{4} + t - 2 \cdot t^2$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$
4	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$	$(\frac{1}{2}, 0)$	$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot t, \frac{3}{4})$	$\frac{7}{8} + \frac{1}{4} \cdot t - \frac{1}{4} \cdot t^2$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
16	(0.992, 0.996)	(0.008, 0)	$(0.992 + 0.008 \cdot t, 0.996)$		0.5	(0.996, 0.996)
17	(0.996, 0.996)	(0, 0.008)	$(0.996, 0.996 + 0.008 \cdot t)$		0.25	(0.996, 0.998)

Grafik funkcije i način konvergencije gradijentne metode prikazan je na slici Z5-1.



Slika Z5-1. Grafik funkcije  $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2 - x_1^2 - 2 \cdot x_2^2$ .

Kao što se vidi iz tabele Z5-1 rešenje konvergira tački  $\mathbf{x}^* = (1, 1)$ , koja predstavlja optimalno rešenje i ujedno i globalni maksimum. To se potvrđuje činjenicom da je:  
 $\nabla f(1, 1) = (0, 0)$ .

### **Zadatak 06**

Za funkciju dve promenljive:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2,$$

metodom neposrednog isključivanja promenljivih odrediti stacionarne tačke i njihovu prirodu, pri čemu promenljive  $x_1$  i  $x_2$  treba da zadovolje sistem ograničenja:

$$x_1 \leq 4,$$

$$x_1 + x_2 = 5.$$

### **Rešenje:**

Uvođenjem izravnavajućih promenljivih sistem ograničenja se svodi na kanonički oblik i postaje:

$$x_1 + x_3 = 4,$$

$$x_1 + x_2 = 5,$$

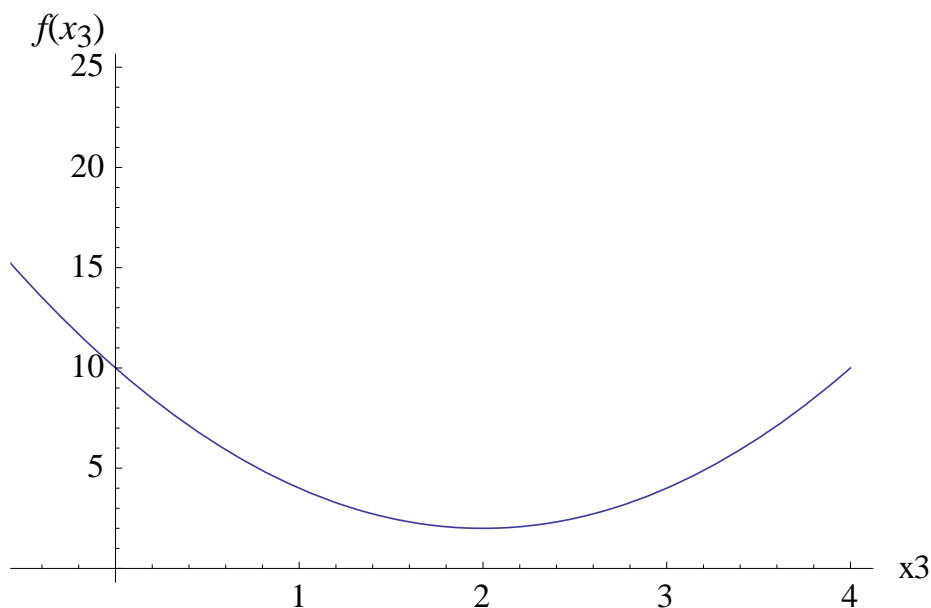
odnosno:

$$x_1 = 4 - x_3,$$

$$x_2 = 1 + x_3.$$

Zamenom gornjih izraza za  $x_1$  i  $x_2$  u funkciju  $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$ , zadatak se svodi na određivanje bezuslovnog ekstrema funkcije: (slika Z6-1)

$$f(x_3) = (3 - x_3)^2 + (x_3 - 1)^2.$$



Slika Z6-1. Oblik funkcije  $f(x_3) = (3 - x_3)^2 + (x_3 - 1)^2$ .



Ekstrem funkcije  $f(x_3)$  dobija se iz uslova:

$$\frac{\partial f(x_3)}{\partial x_3} = 2 \cdot (3 - x_3) \cdot (-1) + 2 \cdot (x_3 - 1) = 0,$$

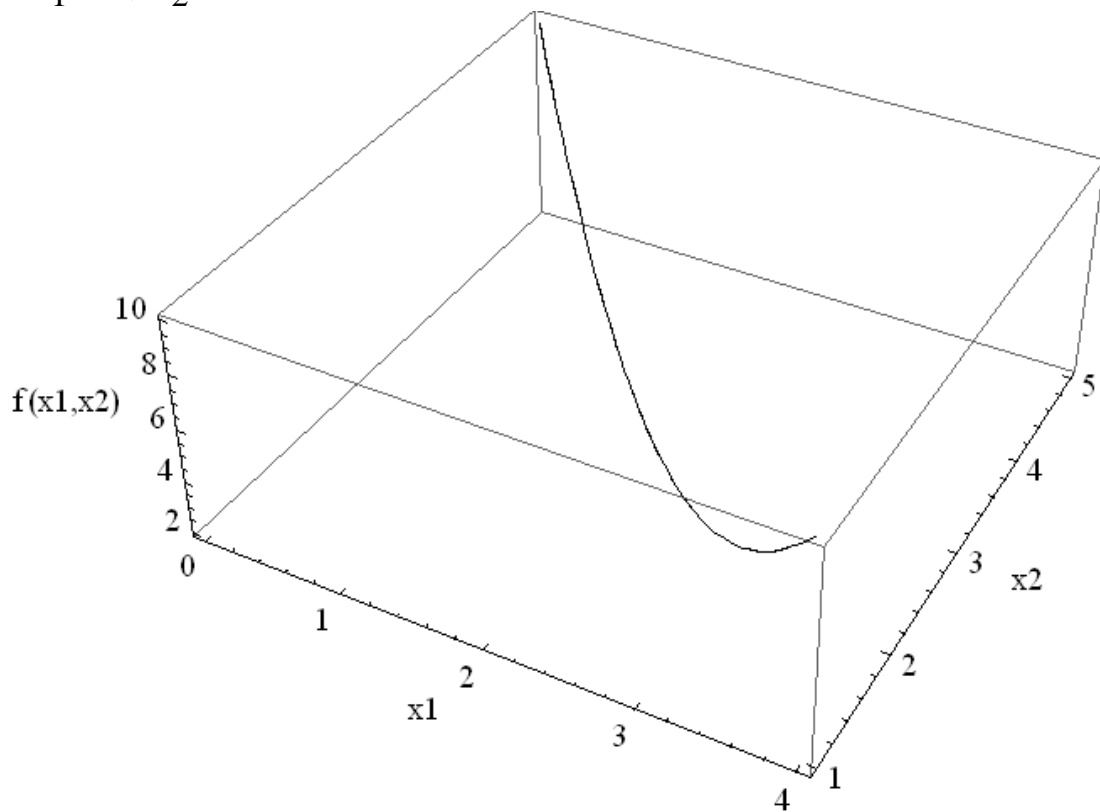
$$\frac{\partial f(x_3)}{\partial x_3} = 4 \cdot x_3 - 8 = 0, \rightarrow x_3 = 2.$$

Za  $x_3 = 2$ , funkcija  $f(x_3) = (3 - x_3)^2 + (x_3 - 1)^2$  ima minimum jer je:

$$\frac{\partial^2 f(x_3)}{\partial x_3^2} = 4 > 0.$$

Vrednosti izravnavajuće promenljive  $x_3 = 2$  odgovaraju vrednosti stvarnih promenljivih:

$$x_1 = 2, x_2 = 3.$$



Slika Z6-2. Grafik funkcije  $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$  pri ograničenjima  $x_1 \leq 4$ ,  $x_1 + x_2 = 5$ .

Vrednost funkcije  $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$  u tački  $A(2, 3)$  je:

$$f(2, 3) = 2.$$

Vrednosti funkcije u graničnim tačkama, koje su definisane ograničenjima,  $B(4, 1)$  i  $C(0, 5)$  su sledeće:

$$B: f(4, 1) = 10, \quad C: f(0, 5) = 10.$$

Konačno, tačka  $A(2, 3)$  predstavlja uslovni minimum, dok tačke  $B(4, 1)$  i  $C(0, 5)$  predstavljaju uslovni maksimum funkcije  $f(x_1, x_2)$ . (slika Z6-2)

Tačka  $A(2, 3)$  nije stacionarna tačka funkcije  $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$  jer ne zadovoljava uslov:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 \cdot (x_1 - 1) = 0, \rightarrow x_1 = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2 \cdot (x_2 - 2) = 0, \rightarrow x_2 = 2.$$

### Zadatak 07

Za funkciju tri promenljive:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 9 - 8 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 + 2 \cdot x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 + x_3^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_3,$$

naći minimum tako da bude zadovoljeno ograničenje:

$$x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 3, \quad x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$$

#### **Rešenje:**

Uvođenjem izravnavajuće promenljive  $x_4 \geq 0$  ograničenje se svodi na kanonički oblik i postaje:

$$x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 + x_4 = 3.$$

Izražavanjem promenljive  $x_1$  iz jednačine ograničenja dobija se:

$$x_1 = 3 - x_2 - 2 \cdot x_3 - x_4,$$

što zamenom u  $f(x_1, x_2, x_3)$ :

$$f(x_1, x_2, x_3) = 9 - 8 \cdot (3 - x_2 - 2 \cdot x_3 - x_4) - 6 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 + 2 \cdot (3 - x_2 - 2 \cdot x_3 - x_4)^2 + 2 \cdot x_2^2 + x_3^2 + 2 \cdot (3 - x_2 - 2 \cdot x_3 - x_4) \cdot x_2 + 2 \cdot (3 - x_2 - 2 \cdot x_3 - x_4) \cdot x_3,$$

problem određivanja minimuma svodi na određivanje ekstrema funkcije  $f(x_2, x_3, x_4)$  sa ograničenjima nenegativnosti.

Stacionarne tačke se određuju iz sistema algebarskih jednačina koji se dobija izjednačavanjem prvih parcijalnih izvoda funkcije sa nulom:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -4 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = -6 + 2 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = -4 + 2 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 0.$$

Rešenja prethodnog sistema jednačina su  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 1$  i  $x_4 = -1$ , odakle sledi da  $x_4$  mora biti jednako nuli. Zamenom  $x_4 = 0$  u prve dve jednačine i zanemarivanjem treće sistem se svodi na:

$$2 \cdot x_2 + x_3 = 2,$$

$$x_2 + 5 \cdot x_3 = 3.$$

Rešenja gornjeg sistema su:

$$x_2 = \frac{7}{9}, \quad x_3 = \frac{4}{9}.$$

Dalje je potrebno proveriti da li tačka  $A(x_2, x_3, x_4) = A(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, 0)$  zadovoljava potrebne uslove optimalnosti pri optimizaciji gde su ograničenja samo uslovi nenegativnosti. Zamenom  $A(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, 0)$  u sistem jednačina prvih parcijalnih izvoda dobija se:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -4 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = -4 + 4 \cdot \frac{7}{9} + 2 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot 0 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = -6 + 2 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 = -6 + 2 \cdot \frac{7}{9} + 10 \cdot \frac{4}{9} + 6 \cdot 0 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = -4 + 2 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = -4 + 2 \cdot \frac{7}{9} + 6 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot 0 = \frac{2}{9} > 0,$$

na osnovu čega se može zaključiti da su potrebni uslovi optimalnosti, da tačka  $A(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, 0)$  bude uslovni minimum funkcije  $f(x_2, x_3, x_4)$ , zadovoljeni.

Dovoljan uslov je da je funkcija  $f(x_2, x_3, x_4)$  u okolini tačke  $A(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, 0)$  konveksna. Da bi se odredio oblik funkcije potrebno je formirati Hessian matricu odnosno naći druge parcijalne izvode:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2} = 4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_3} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_4} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \cdot \partial x_4} = 6.$$

Hessian matrica je oblika:

$$H(x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Glavni minori Hessian matrice su  $D_1 = 4 > 0$ ,  $D_2 = 36 > 0$  i  $D_3 = 8 > 0$ , pa je na osnovu Silvester-ovog kriterijma Hessian matrica pozitivno definitna. Na osnovu oblika Hessian matrice i vrednosti glavnih minora može se zaključiti da je funkcija

strogo konveksna na celoj oblasti definisanosti, što znači da je ispunjen dovoljan uslova da tačka  $A(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, 0)$  bude uslovni minimum funkcije  $f(x_2, x_3, x_4)$ .

Zamenom vrednosti za  $x_2 = \frac{7}{9}$ ,  $x_3 = \frac{4}{9}$  i  $x_4 = 0$  u izraz za  $x_1$ :

$$x_1 = 3 - x_2 - 2 \cdot x_3 - x_4 = 3 - \frac{7}{9} - 2 \cdot \frac{4}{9} + 0 = \frac{12}{9},$$

dobija se tačka  $B(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = B(\frac{12}{9}, \frac{7}{9}, \frac{4}{9})$  za koja predstavlja uslovni minimum funkcije  $f(x_1, x_2, x_3)$ , što će biti pokazano primenom KKT uslova optimalnosti (nije neophodno).

Pri proveru KKT uslova optimalnosti prvo je potrebno formirati uopštenu Lagrange-ovu funkciju  $\Phi(\mathbf{x}, \lambda)$ , gde je  $n = 3$ ,  $m = 1$ :

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, \lambda_1) = 9 - 8 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 + 2 \cdot x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 + x_3^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_3 - \lambda_1 \cdot (x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 - 3).$$

Uslov 1.

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}^*, \lambda)}{\partial x_j} \geq 0, \quad \text{za } j=1,2,3.$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} &= -8 + 4 \cdot x_1^* + 2 \cdot x_2^* + 2 \cdot x_3^* + \lambda_1 = -8 + 4 \cdot \frac{12}{9} + 2 \cdot \frac{7}{9} + 2 \cdot \frac{4}{9} + \lambda_1 \geq 0, \\ &= -\frac{2}{9} + \lambda_1 \geq 0, \rightarrow \lambda_1 \geq \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= -6 + 4 \cdot x_2^* + 2 \cdot x_1^* + \lambda_1 = -6 + 4 \cdot \frac{7}{9} + 2 \cdot \frac{12}{9} + \lambda_1 \geq 0, \\ &= -\frac{2}{9} + \lambda_1 \geq 0, \rightarrow \lambda_1 \geq \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} &= -4 + 2 \cdot x_3^* + 2 \cdot x_1^* + 2 \cdot \lambda_1 = -4 + 2 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{12}{9} + 2 \cdot \lambda_1 \geq 0, \\ &= -\frac{4}{9} + 2 \cdot \lambda_1 \geq 0, \rightarrow \lambda_1 \geq \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Prvi uslov je zadovoljen za  $\lambda_1 \geq \frac{2}{9}$ .

Uslov 2.

$$x_j^* \cdot \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}^*, \lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad \text{za } j=1,2,3.$$

a)  $x_1^* \cdot (-8 + 4 \cdot x_1^* + 2 \cdot x_2^* + 2 \cdot x_3^* + \lambda_1) = 0,$

b)  $x_2^* \cdot (-6 + 4 \cdot x_2^* + 2 \cdot x_1^* + \lambda_1) = 0,$

c)  $x_3^* \cdot (-4 + 2 \cdot x_3^* + 2 \cdot x_1^* + 2 \cdot \lambda_1) = 0.$

Kako je  $x_1^* = \frac{12}{9} > 0$ ,  $x_2^* = \frac{7}{9} > 0$  i  $x_3^* = \frac{4}{9} > 0$  to je drugi uslov je zadovoljen za  $\lambda_1 = \frac{2}{9}.$

Uslov 3.

$$g_i(\mathbf{x}^*) - b_i \leq 0, \quad \text{za } i=1.$$

$$x_1^* + x_2^* + 2 \cdot x_3^* - 3 \leq 0,$$

$$\frac{12}{9} + \frac{7}{9} + 2 \cdot \frac{4}{9} - 3 = 0, \rightarrow \text{zadovoljava.}$$

Uslov 4.

$$\lambda_i \cdot [g_i(\mathbf{x}^*) - b_i] = 0, \quad \text{za } i=1.$$

$$\frac{2}{9} \cdot 0 = 0, \rightarrow \text{zadovoljava.}$$

Uslov 5.

$$x_j^* \geq 0, \quad \text{za } j=1,2,3.$$

$$x_1^* = \frac{12}{9} > 0, \quad x_2^* = \frac{7}{9} > 0 \text{ i } x_3^* = \frac{4}{9} > 0, \rightarrow \text{zadovoljava.}$$

Uslov 6.

$$\lambda_i \geq 0, \quad \text{za } i=1.$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{9} > 0, \rightarrow \text{zadovoljava.}$$

Pošto tačka  $B(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = B(\frac{12}{9}, \frac{7}{9}, \frac{4}{9})$  ispunjava sve KKT uslove, to znači da tačka  $B$  ispunjava potreban uslov da bude minimum funkcije  $f(x_1, x_2, x_3)$ .

Dovoljan uslov je da je funkcija  $f(x_1, x_2, x_3)$  u okolini tačke  $B(\frac{12}{9}, \frac{7}{9}, \frac{4}{9})$  bude konveksna. Da bi se odredio oblik funkcije potrebno je formirati Hessian matricu odnosno naći druge parcijalne izvode:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_3} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_3} = 0.$$

Hessian matrica je oblika:

$$H(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Glavni minori Hessian matrice su  $D_1 = 4 > 0$ ,  $D_2 = 12 > 0$  i  $D_3 = 8 > 0$ , pa je na osnovu Silvester-ovog kriterijma Hessian matrica pozitivno definitna. Na osnovu oblika Hessian matrice i vrednosti glavnih minora može se zaključiti da je funkcija strogo konveksna na celoj oblasti definisanosti.

Pored toga što funkcija treba da bude konveksna, takođe funkcije u ograničenjima (uslovima) treba da budu konveksne. Funkcija uslova  $g_i(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3$ , predstavlja zbir tri linearne funkcije što znači da je ona konveksna.

Na osnovu gore iznetog, ispunjen je i dovoljan uslova da tačka  $B(\frac{12}{9}, \frac{7}{9}, \frac{4}{9})$  bude uslovni minimum funkcije  $f(x_1, x_2, x_3)$ .

Vrednost funkcije u tački  $B(\frac{12}{9}, \frac{7}{9}, \frac{4}{9})$  je:

$$f(\frac{12}{9}, \frac{7}{9}, \frac{4}{9}) = \frac{1}{9}.$$

## **Zadatak 08**

Za funkciju tri promenljive:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - 3 \cdot x_1^2 - 2 \cdot x_2^2 - \frac{1}{3} \cdot x_3^2,$$

naći njenu maksimalnu vrednost tako da budu zadovoljena ograničenja:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5,$$

$$x_3 \geq x_1 + x_2, \quad x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$$

### **Rešenje:**

Druga nejednačina u sistemu ograničenja se može napisati u obliku:

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 0.$$

Uvođenjem izravnavajuće promenljive  $x_4 \geq 0$  drugo ograničenje se svodi na kanonički oblik i postaje:

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

Ako se drugo ograničenje napiše u obliku  $x_1 + x_2 = x_3 - x_4$  i zameni u prvo ograničenje, tada se sistem ograničenja može svesti na jednu jednačinu oblika:

$$2 \cdot x_3 - x_4 = 5, \text{ odakle je } x_3 = \frac{5 + x_4}{2}.$$

Zamenom izraza za promenljivu  $x_3$  u funkciju  $f(x_1, x_2, x_3)$  dobija se:

$$f(x_1, x_2, x_4) = 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 5 + x_4 - 3 \cdot x_1^2 - 2 \cdot x_2^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{(5 + x_4)^2}{4}.$$

i problem određivanja maksimuma svodi se na određivanje bezuslovnog ekstrema funkcije  $f(x_1, x_2, x_4)$ .

Stacionarne tačke se određuju iz sistema algebarskih jednačina koji se dobija izjednačavanjem prvih parcijalnih izvoda funkcije sa nulom:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6 - 6 \cdot x_1 = 0, \quad \rightarrow x_1 = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4 - 4 \cdot x_2 = 0, \quad \rightarrow x_2 = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = 1 - \frac{1}{6} \cdot (5 + x_4) = 0 \rightarrow x_4 = 1.$$

Zamenom  $x_4 = 1$  u izraz za  $x_3$  dobija se:



$$x_3 = \frac{5+x_4}{2} = \frac{5+1}{2}, \rightarrow x_3 = 3.$$

Sada je potrebno proveriti da li tačka  $A(1,1,3)$  predstavlja tačku uslovnog maksimuma funkcije  $f(x_1, x_2, x_3)$  ispitivanjem potrebnih (KKT) i dovoljnih uslova optimalnosti.

Pri proveru potrebni KKT uslova optimalnosti prvo je potrebno formirati uopštenu Lagrange-ovu funkciju  $\Phi(\mathbf{x}, \lambda)$ , gde je  $n = 3$ ,  $m = 2$ :

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = & 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - 3 \cdot x_1^2 - 2 \cdot x_2^2 - \frac{1}{3} \cdot x_3^2 - \\ & - \lambda_1 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 - 5) - \lambda_2 \cdot (x_1 + x_2 - x_3). \end{aligned}$$

Uslov 1.

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}^*, \lambda)}{\partial x_j} \leq 0, \quad \text{za } j=1,2,3.$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = & 6 - 6 \cdot x_1^* - \lambda_1 - \lambda_2 = 6 - 6 \cdot 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0, \\ & = -\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0, \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = & 4 - 4 \cdot x_2^* - \lambda_1 - \lambda_2 = 4 - 4 \cdot 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0, \\ & = -\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0, \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = & 2 - \frac{2}{3} \cdot x_3^* - \lambda_1 + \lambda_2 = 2 - \frac{2}{3} \cdot 3 - \lambda_1 + \lambda_2 \leq 0, \\ & = -\lambda_1 + \lambda_2 \leq 0, \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Prvi uslov je zadovoljen za  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Uslov 2.

$$x_j^* \cdot \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}^*, \lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad \text{za } j=1,2,3.$$

$$\text{a)} \quad x_1^* \cdot (6 - 6 \cdot x_1^* - \lambda_1 - \lambda_2) = 0,$$

$$\text{b)} \quad x_2^* \cdot (4 - 4 \cdot x_2^* - \lambda_1 - \lambda_2) = 0,$$

$$\text{c)} \quad x_3^* \cdot (2 - \frac{2}{3} \cdot x_3^* - \lambda_1 + \lambda_2) = 0.$$

Kako je  $x_1^* = 1 > 0$ ,  $x_2^* = 1 > 0$  i  $x_3^* = 3 > 0$  to je drugi uslov je zadovoljen za  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Uslov 3.

$$g_i(\mathbf{x}^*) - b_i \leq 0, \quad \text{za } i=1,2.$$

$$x_1^* + x_2^* + x_3^* - 5 \leq 0,$$

$$1+1+3-5=0, \rightarrow \text{zadovoljava.}$$

$$x_1^* + x_2^* - x_3^* \leq 0,$$

$$1+1-3=-1 \leq 0, \rightarrow \text{zadovoljava.}$$

Uslov 4.

$$\lambda_i \cdot [g_i(\mathbf{x}^*) - b_i] = 0, \quad \text{za } i=1,2.$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \rightarrow \text{zadovoljava.}$$

Uslov 5.

$$x_j^* \geq 0, \quad \text{za } j=1,2,3.$$

$$x_1^* = 1 > 0, \quad x_2^* = 1 > 0 \text{ i } x_3^* = 3 > 0, \rightarrow \text{zadovoljava.}$$

Uslov 6.

$$\lambda_i \geq 0, \quad \text{za } i=1,2.$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \rightarrow \text{zadovoljava.}$$

Pošto tačka  $A(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = A(1, 1, 3)$  ispunjava sve KKT uslove, to znači da tačka  $A$  ispunjava potreban uslov da bude minimum funkcije  $f(x_1, x_2, x_3)$ .

Dovoljan uslov je da je funkcija  $f(x_1, x_2, x_3)$  u okolini tačke  $A(1, 1, 3)$  bude konkavna. Da bi se odredio oblik funkcije potrebno je formirati Hessian matricu odnosno naći druge parcijalne izvode:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = -\frac{2}{3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_3} = 0.$$

Hessian matrica je oblika:

$$H(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Glavni minori Hessian matrice su  $D_1 = -6 < 0$ ,  $D_2 = 24 > 0$  i  $D_3 = -16 < 0$ , pa je na osnovu Silvester-ovog kriterijma Hessian matrica negativno definitna. Na osnovu oblika Hessian matrice i vrednosti glavnih minora može se zaključiti da je funkcija strogo konkavna na celoj oblasti definisanosti.

Pored toga što funkcija treba da bude konkavna, funkcije u ograničenjima treba da budu konveksne. Funkcija prvog ograničenja  $g_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3$ , predstavlja zbir tri linearne funkcije što znači da je ona konveksna, takođe funkcija drugog ograničenja  $g_2(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - x_3$  se sastoji od tri linearne funkcije što znači da je i ona konveksna.

Na osnovu gore iznetog, ispunjen je i dovoljan uslova da tačka  $A(1, 1, 3)$  bude uslovni minimum funkcije  $f(x_1, x_2, x_3)$ .

Vrednost funkcije u tački  $A(1, 1, 3)$  je:

$$f(1, 1, 3) = 8.$$

## Zadatak 09

Naći uslovni maksimum funkcije više promenljivih:

$$\text{Max } f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2 \cdot x_2,$$

sa ograničenjima u obliku jednakosti:

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

U ovom slučaju,  $(x_1, x_2)$  je ograničeno na krug poluprečnika 1, čiji je centar u koordinatnom početku, tako da je cilj pronaći tačku na ovom krugu koja daje najveću vrednost  $f(x_1, x_2)$ .

Za dobijanje optimalnog rešenja koristiće se metod Lagrange-ovih množitelja. Prvo je potrebno formirati funkciju  $\Phi(\mathbf{x}, \lambda) = \Phi(x_1, x_2, \lambda_1)$  gde je  $(n=2, m=1)$ :

$$\Phi(x_1, x_2, \lambda_1) = f(x_1, x_2) - \lambda_1 \cdot [g_1(x_1, x_2) - b_1],$$

$$\Phi(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 + 2 \cdot x_2 - \lambda_1 \cdot (x_1^2 + x_2^2 - 1),$$

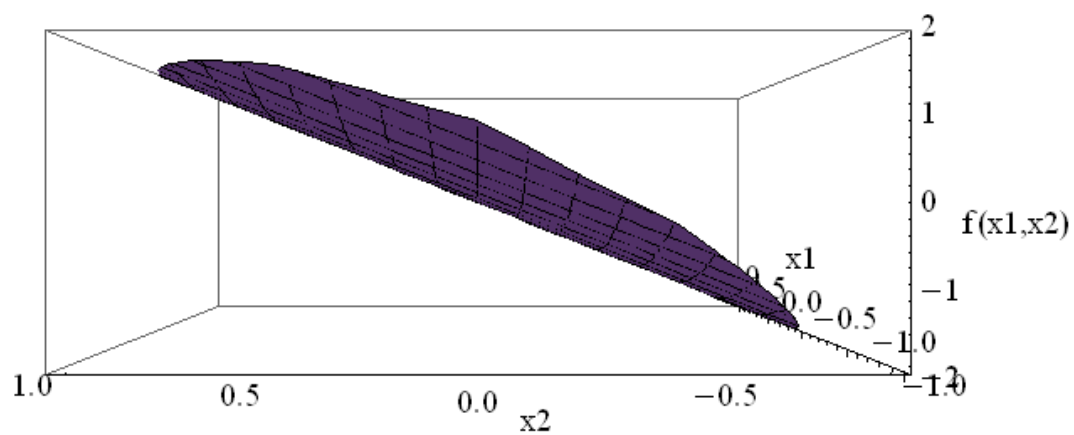
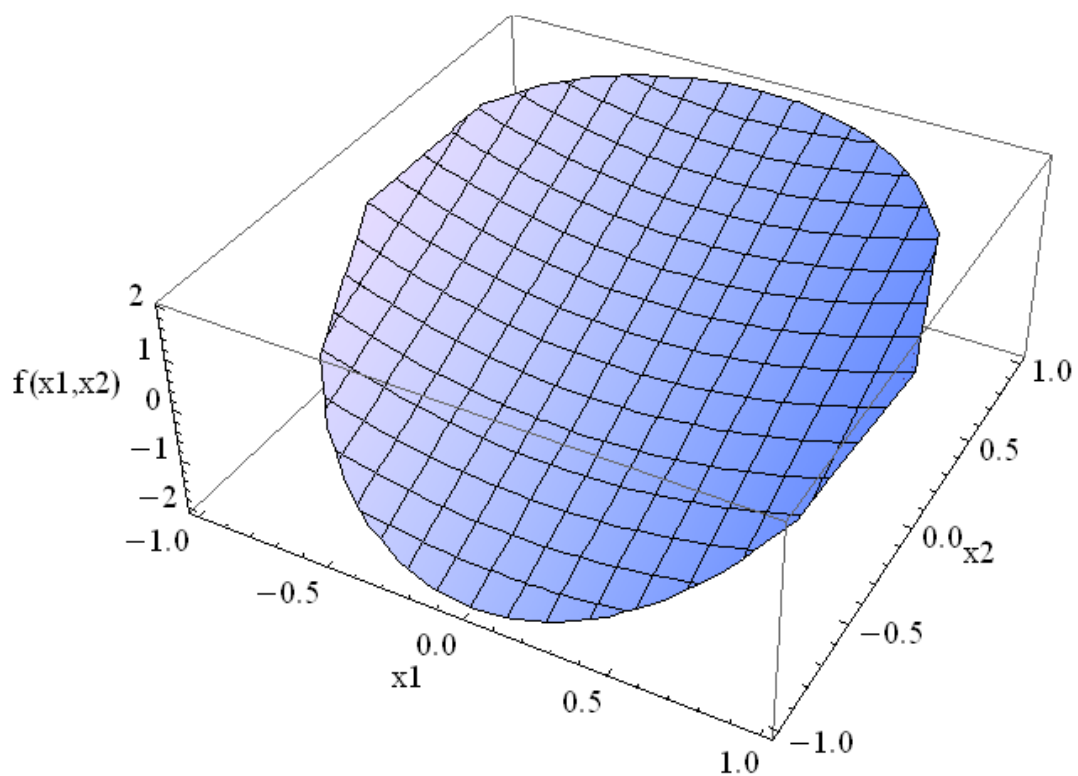
tako da je:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 2 \cdot x_1 - 2 \cdot \lambda_1 \cdot x_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 2 - 2 \cdot \lambda_1 \cdot x_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} = -(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0.$$

Iz prve jednačine se dobija da je  $\lambda_1 = 1$  ili  $x_1 = 0$ . Ako je  $\lambda_1 = 1$ , tada se iz preostalih dveju jednačina se dobija da je  $x_2 = 1$  i  $x_1 = 0$ . Ako je  $x_1 = 0$ , tada se iz treće jednačine dobija da je  $x_2 = \pm 1$ . Prema tome, postoje dve stacionarne tačke tačke za početni problem i to:  $A_1(x_1, x_2) = (0, 1)$  i  $A_2(x_1, x_2) = (0, -1)$ . Dakle, očigledno je da su ove tačke globalni maksimum, odnosno minimum respektivno. (slika Z9-1)



Slika Z9-1. Funkcija  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2 \cdot x_2$  sa ograničenjima  
 $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 1$ .

### Zadatak 10

Za matematički model transportnog problema sa nelinearnom funkcijom cilja:

$$\min f(\mathbf{x}) = 3 \cdot x_{11}^2 + 7 \cdot x_{12}^2 + 8 \cdot x_{21}^2 + 4 \cdot x_{22}^2,$$

sa linearnim ograničenjima:

$$x_{11} + x_{12} = 20,$$

$$x_{21} + x_{22} = 40,$$

$$x_{11} + x_{21} = 30,$$

$$x_{12} + x_{22} = 30,$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2; j = 1, 2.$$

Odrediti optimalni plan transporta i iznos minimalnih transportnih troškova.

#### **Rešenje:**

Broj jednačina ograničenja kod zatvorenog transportnog problema je  $m+n = 2+2 = 4$  ( $m$  – broj izvora,  $n$  – broj destinacija) dok je broj nezavisnih ograničenja  $r = m + n - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$ , što znači da se jedna od promenljivih u ograničenjima može uzeti za slobodnu tj. nezavisnu promenljivu.

Ako se za slobodnu promenljivu uzme promenljiva  $x_{21}$ , to se početni sistem ograničenja može napisati u sledećem obliku:

$$x_{11} = 30 - x_{21},$$

$$x_{12} = x_{21} - 10,$$

$$x_{22} = 40 - x_{21}.$$

Primenom metode neposrednog isključivanja promenljivih, tj. zamenom izraza za  $x_{11}$ ,  $x_{12}$  i  $x_{22}$  u izraz za funkciju cilja problem se svodi na iznalaženje ekstrema funkcije jedne promenljive  $x_{21}$ :

$$\min f(x_{21}) = 3 \cdot (30 - x_{21})^2 + 7 \cdot (x_{21} - 10)^2 + 8 \cdot x_{21}^2 + 4 \cdot (40 - x_{21})^2.$$

Iznalaženjem prvog izvoda funkcije cilja po promenljivoj  $x_{21}$  i njegovog izjednačavanja sa nulom dobija se: (potreban uslov)

$$\frac{\partial f(x_{21})}{\partial x_{21}} = -6 \cdot (30 - x_{21}) + 14 \cdot (x_{21} - 10) + 16 \cdot x_{21} - 8 \cdot (40 - x_{21}) = 0,$$

$$44 \cdot x_{21} - 640 = 0, \quad \rightarrow x_{21} = \frac{160}{11} = 14.54.$$

Kako je drugi izvod funkcije cilja (dovoljan uslov):

$$\frac{\partial^2 f(x_{21})}{\partial x_{21}^2} = 6 + 14 + 16 + 8 = 44 > 0,$$

to za  $x_{21} = 14.54$  funkcija cilja  $f(x_{21})$  ima minimum.

Zamenom vrednosti  $x_{21} = 14.54$  u izraze za  $x_{11}$ ,  $x_{12}$  i  $x_{22}$  dobija se:

$$x_{11} = 30 - x_{21} = 30 - 14.54 = 15.45,$$

$$x_{12} = x_{21} - 10 = 14.54 - 10 = 4.54,$$

$$x_{22} = 40 - x_{21} = 40 - 14.54 = 25.45.$$

Za ove vrednosti  $x_{11}$ ,  $x_{12}$ ,  $x_{21}$  i  $x_{22}$  koje predstavljaju optimalni plan transporta, minimalni iznos transportnih troškova je:

$$f(\mathbf{x}) = 3 \cdot 15.45^2 + 7 \cdot 4.54^2 + 8 \cdot 14.54^2 + 4 \cdot 25.45^2 = 5142.49.$$

Dati transportni problem sa nelinearnom funkcijom cilja takođe se može rešiti i primenom metode Lagrange-ovih množitelja. Prvo, potrebno je formirati funkciju  $\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) : (n=4, m=4)$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = & 3 \cdot x_{11}^2 + 7 \cdot x_{12}^2 + 8 \cdot x_{21}^2 + 4 \cdot x_{22}^2 - \lambda_1 \cdot (x_{11} + x_{12} - 20) - \\ & - \lambda_2 \cdot (x_{21} + x_{22} - 40) - \lambda_3 \cdot (x_{11} + x_{21} - 30) - \lambda_4 \cdot (x_{12} + x_{22} - 30). \end{aligned}$$

Nalaženjem prvih parcijalnih izvoda dobija se sistem jednačina:

$$(1) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_{11}} = 6 \cdot x_{11} - \lambda_1 - \lambda_3 = 0, \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 6 \cdot x_{11} - \lambda_3,$$

$$(2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_{12}} = 14 \cdot x_{12} - \lambda_1 - \lambda_4 = 0,$$

$$(3) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_{21}} = 16 \cdot x_{21} - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \quad \rightarrow \quad \lambda_2 = 16 \cdot x_{21} - \lambda_3,$$

$$(4) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_{22}} = 8 \cdot x_{22} - \lambda_2 - \lambda_4 = 0,$$

$$(5) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} = -(x_{11} + x_{12} - 20) = 0,$$

$$(6) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_2} = -(x_{21} + x_{22} - 40) = 0,$$

$$(7) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_3} = -(x_{11} + x_{21} - 30) = 0,$$

$$(8) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_4} = -(x_{12} + x_{22} - 30) = 0.$$

Izražavanjem  $\lambda_1$  iz (1) i zamenom u (2) dobija se:

$$(9) \quad 14 \cdot x_{12} - 6 \cdot x_{11} + \lambda_3 - \lambda_4 = 0.$$

Izražavanjem  $\lambda_2$  iz (3) i zamenom u (4) dobija se:

$$(10) \quad 8 \cdot x_{22} - 16 \cdot x_{21} + \lambda_3 - \lambda_4 = 0.$$

Izjednačavanjem izraza (9) i (10) dobija se:

$$(11) \quad 14 \cdot x_{12} - 6 \cdot x_{11} = 8 \cdot x_{22} - 16 \cdot x_{21}.$$

Zamenom  $x_{11}$  iz izraza (5),  $x_{21}$  iz izraza (6) i  $x_{22}$  iz izraza (8), u izraz (11) dobija se:

$$44 \cdot x_{12} = 200, \quad \rightarrow \quad x_{12} = \frac{50}{11} = 4.54.$$

Zamenom vrednosti  $x_{12}$  u izraze (5), (6) i (8) dobija se

$$x_{11} = \frac{170}{11} = 15.45, \quad x_{21} = \frac{160}{11} = 14.54, \quad x_{22} = \frac{280}{11} = 25.45.$$

Zamenom vrednosti za  $x_{11}$ ,  $x_{12}$ ,  $x_{21}$  i  $x_{22}$  u izraze (9) i (10) dobija se:

$$(9') \quad 14 \cdot \frac{50}{11} - 6 \cdot \frac{170}{11} + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \quad -\frac{320}{11} + \lambda_3 - \lambda_4 = 0,$$

$$(10') \quad 8 \cdot \frac{280}{11} - 16 \cdot \frac{160}{11} + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \quad -\frac{320}{11} + \lambda_3 - \lambda_4 = 0.$$

Izrazi (9') i (10') su identični, što je posledica činjenice da kod zatvorenog transportnog problema broj nezavisnih ograničenja je za jedan manji od ukupnog broja ograničenja. Jedna od osam promenljivih mora biti slobodna promenljiva, u ovom slučaju bira se da je slobodna promenljiva  $\lambda_4$  i dodeljuje joj se vrednost nula tj.:  $\lambda_4 = 0$ , odakle sledi da je:

$$\lambda_3 = \frac{320}{11}.$$

Zamenom vrednosti  $\lambda_3$  u izraze (1) i (2) dobija se:

$$\lambda_1 = 6 \cdot x_{11} - \lambda_3 = 6 \cdot \frac{170}{11} - \frac{320}{11} = \frac{700}{11},$$

$$\lambda_2 = 16 \cdot x_{21} - \lambda_3 = 16 \cdot \frac{160}{11} - \frac{320}{11} = \frac{2240}{11}.$$