

Konveksne funkcije & konveksni skupovi

Koncept konveksnosti često se koristi u OI, posebno u oblasti nelinearnog programiranja. Stoga je poznavanje svojstava konveksnih ili konkavnih funkcija i konveksnih skupova veoma važno.

Konveksne (konkavne) funkcije jedne promenljive

Definicija: Funkcija jedne promenljive $f(x)$ je konveksna funkcija ako za svaki par vrednosti x , npr. x' i x'' ($x' < x''$) važi:

$$f[\lambda \cdot x'' + (1 - \lambda) \cdot x'] \leq \lambda \cdot f(x'') + (1 - \lambda) \cdot f(x')$$

za sve vrednosti λ takve da je $0 < \lambda < 1$. *1 Funkcija $f(x)$ je **strogo konveksna funkcija** ako se \leq može zameniti sa $<$. Funkcija $f(x)$ je konkavna funkcija (ili **strogo konkavna funkcija**) ako gornji izraz važi kada se \leq zameni sa \geq (ili sa $>$).

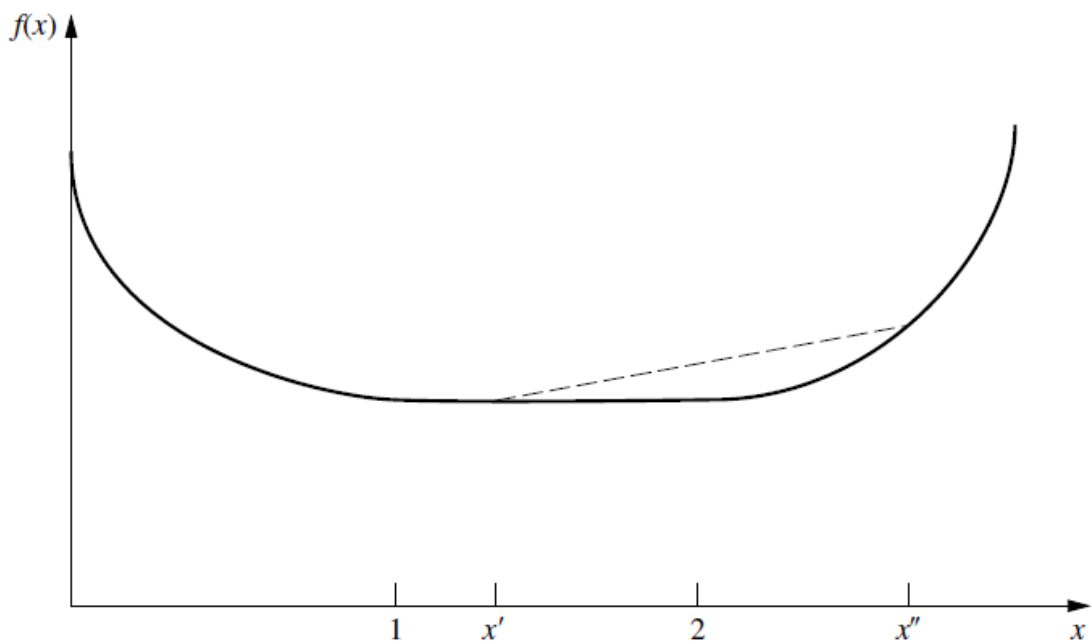
*2

Ova definicija konveksne funkcije ima i svoju geometrijsku interpretaciju. Razmotriće se grafik funkcije $f(x)$, prikazan na slici IV-1. Funkcija $f(x)$ opada za vrednosti $x < 1$, konstantna je za vrednosti $1 \leq x \leq 2$, i raste za vrednosti $x > 2$. Tada $[x', f(x')]$ i $[x'', f(x'')]$ predstavljaju dve tačke na grafiku funkcije $f(x)$, dok $[\lambda \cdot x'' + (1 - \lambda) \cdot x', \lambda \cdot f(x'') + (1 - \lambda) \cdot f(x')]$ predstavlja različite tačke na duži koja spaja te dve tačke (ali ne uključuje te dve tačke tj. krajnje tačke duži) kada se λ menja u intervalu $0 < \lambda < 1$. Dakle, nejednakost \leq u definiciji ukazuje da se ova duž u potpunosti nalazi iznad ili na grafiku funkcije $f(x)$, kao što je prikazano na slici IV-1. Konačno, funkcija $f(x)$ je konveksna, ako za svaki par tačaka na grafiku funkcije $f(x)$, duž koja spaja te dve tačke se nalazi u potpunosti iznad ili na grafiku funkcije $f(x)$.

Npr., za vrednosti x' i x'' prikazane na slici IV-1, duž koja spaja tačke $f(x')$ i $f(x'')$ u potpunosti se nalazi (osim kraljnjih tačaka) iznad grafika funkcije $f(x)$. Isto se dešava i ako se jedna od vrednosti x' ili x'' izabere u intervalu $x' < 1$ ili $x'' > 2$ (ili obe). Ako se vrednosti x' i x'' izaberu u intervalu $1 \leq x' < x'' \leq 2$, tada se cela duž koja spaja tačke $f(x')$ i $f(x'')$ nalazi na grafiku funkcije $f(x)$. Stoga je funkcija $f(x)$ konveksna.

Generalno, ako funkcija $f(x)$ ima drugi izvod na celoj oblasti definisanosti, tada je funkcija $f(x)$ konveksna ako i samo ako je $d^2 f(x)/dx^2 \geq 0$ za sve vrednosti za x .

Definicije *konkavne funkcije* i *strogo konkavne funkcije* takođe imaju analogne geometrijske interpretacije. Vrednost drugog izvoda funkcije predstavlja pogodan test za ispitivanje konveksnosti (konkavnosti) funkcije.

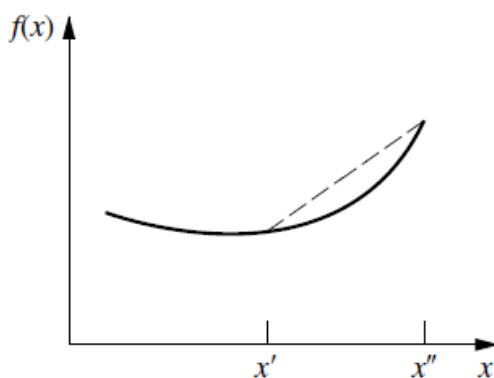


Slika IV-1. Konveksna funkcija.

Test za ispitivanje konveksnosti funkcije jedne promenljive: Razmatra se bilo koja funkcija jedne promenljive $f(x)$ koja ima drugi izvod na celoj oblasti definisanosti. Tada je funkcija $f(x)$: *3

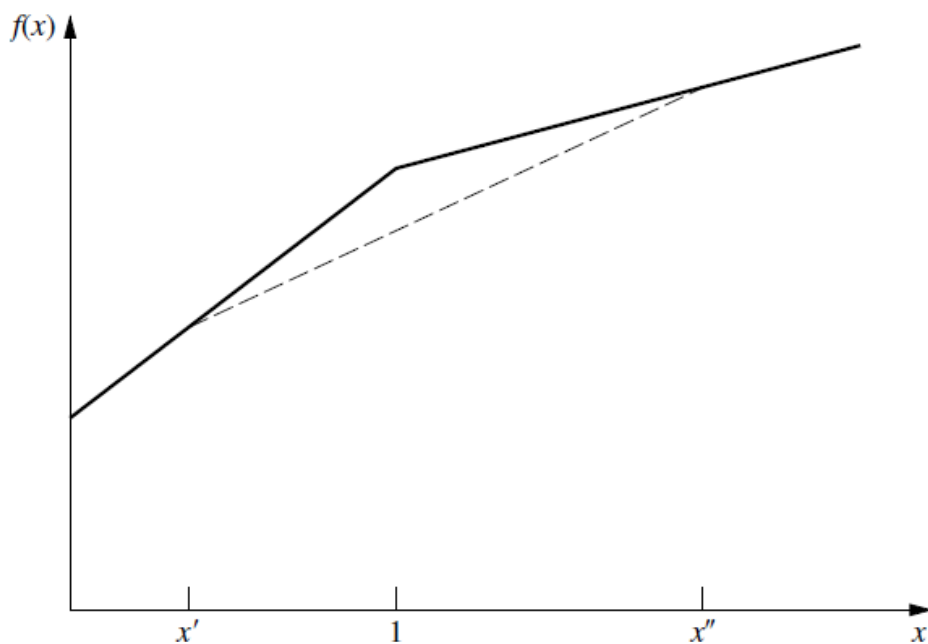
1. *Konveksna*, ako i samo ako je $d^2 f(x)/dx^2 \geq 0$ za sve moguće vrednosti x .
2. *Strogo konveksna*, ako i samo ako je $d^2 f(x)/dx^2 > 0$ za sve moguće vrednosti x .
3. *Konkavna*, ako i samo ako je $d^2 f(x)/dx^2 \leq 0$ za sve moguće vrednosti x .
4. *Strogo konkavna*, ako i samo ako je $d^2 f(x)/dx^2 < 0$ za sve moguće vrednosti x .

Važno: strogo konveksna funkcija je takođe i konveksna, ali konveksna funkcija nije strogo konveksna jer je drugi izvod jednak nuli za neke vrednosti x . Slično tome, strogo konkavna funkcija je takođe i konkavna, ali obrnuto nije tačno. Slike IV-1 do IV-6 prikazuju primere konveksnih i konkavnih funkcija. *4

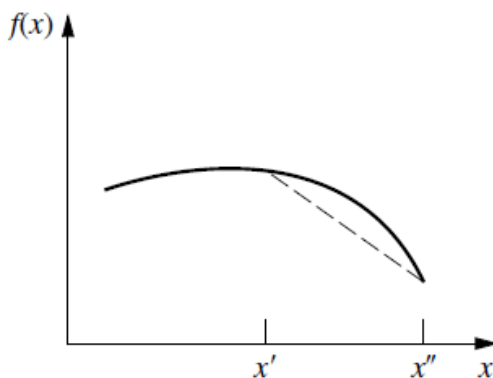


Slika IV-2. Strogo konveksna funkcija.

Izlomljena linearna funkcija prikazana na slici IV-3 menja nagib u tački $x = 1$. Prema definiciji konveksnosti, ova funkcija je konkavna.

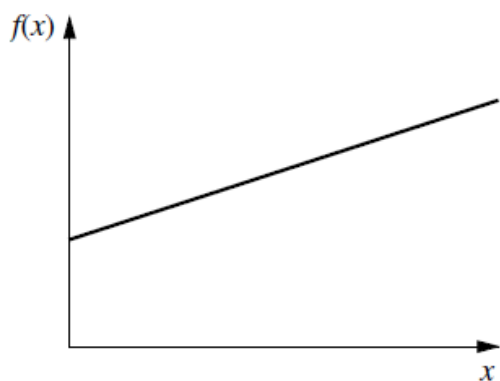


Slika IV-3. Konkavna funkcija.

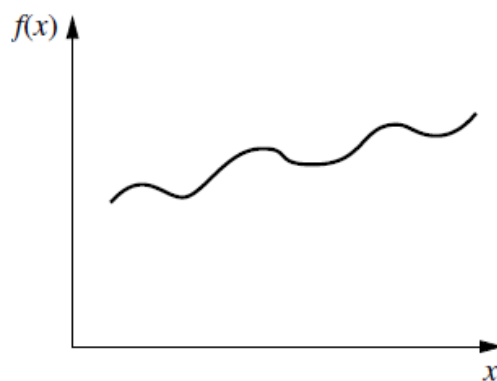


Slika IV-4. Strogo konkavna funkcija.

Bilo koja linearna funkcija (slika IV-5) ima drugi izvod svuda jednak nuli, pa je ona i konveksna i konkavna. Funkcija na slici IV-6 nije ni konveksna ni konkavna.



Slika IV-5. Konveksna i konkavna funkcija.



Slika IV-6. Ni konveksna ni konkavna funkcija.

Konveksne (konkavne) funkcije više promenljivih

Koncept konveksne ili konkavne funkcije jedne promenljive može se generalizovati na funkcije više promenljivih. Tako, ako se $f(x)$ zameni sa $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, definicija (konveksnosti) i dalje važi ako se x svuda zameni sa (x_1, x_2, \dots, x_n) . Slično tome, odgovarajuća geometrijska interpretacija je i dalje validna nakon generalizacije koncepta *tačka* i *duži*. Dakle, kao što se određena vrednost (x, y) tumači kao tačka u dvodimenzionalnom prostoru, svaka moguća vrednost (x_1, x_2, \dots, x_m) može se smatrati tačkom u m -dimenzionom (Euklidskom) prostoru. Uvodeći da je $m = n + 1$, koordinate tačaka na grafiku funkcije $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ su $[x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)]$. Za tačke čije su koordinate $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$, kaže se da se nalaze iznad, na ili ispod grafika funkcije $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, prema tome da li je vrednost x_{n+1} veća, jednaka ili manja od $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, respektivno.

Stoga je duž u m -dimenzionalnom prostoru direktna generalizacija duži u dvodimenzionalnom prostoru.

Definicija: Duž (u m -dimenzionalnom prostoru) koja spaja bilo koje dve tačke $(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ i $(x''_1, x''_2, \dots, x''_m)$ je skup tačaka:

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) = [\lambda \cdot x''_1 + (1 - \lambda) \cdot x'_1, \lambda \cdot x''_2 + (1 - \lambda) \cdot x'_2, \dots, \lambda \cdot x''_m + (1 - \lambda) \cdot x'_m]$$

takvih za koje važi da je $0 < \lambda < 1$. *5

Definicija: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je **konveksna funkcija** ako za svaki par tačaka na grafiku funkcije $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, duž koji spaja ove dve tačke se nalazi u potpunosti iznad ili na grafiku funkcije $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. *6 **Strogo konveksna funkcija** je ako se ova duž u potpunosti nalazi iznad grafika, osim na krajnjim tačkama duži. **Konkavne funkcije** i **strogo konkavne funkcije** definisane su na potpuno isti način, osim što se „iznad“ zamenjuje sa „ispod“. *7

Kao što se drugi izvod može koristiti (kada postoji na celoj oblasti definisanosti) da se proveri da li je funkcija jedne promenljive konveksna, tako se i drugi parcijalni izvodi mogu koristiti za proveru konveksnosti funkcija više promenljivih, mada na dosta složeniji način.

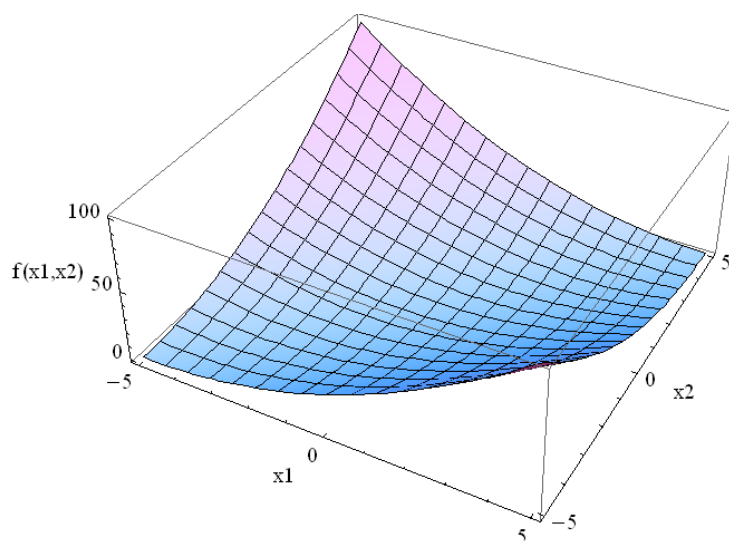
Ako imamo funkciju dve promenljive čiji svi parcijalni izvodi postoje na celoj oblasti definisanosti, tada test konveksnosti procenjuje da li sva tri uslova u prvoj koloni tabele IV-1 zadovoljavaju nejednakosti prikazane u odgovarajućoj koloni na celoj oblasti definisanosti (x_1, x_2) .

Tabela IV-1. Test konveksnosti za funkciju dve promenljive *8

Uslovi	Konveksna	Strogo konveksna	Konkavna	Strogo konkavna
$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} - \left[\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} \right]^2$	≥ 0	> 0	≥ 0	> 0
$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}$	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0
$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}$	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0
Vrednosti za (x_1, x_2)	Cela oblast definisanosti			

Radi ilustracije testa konveksnosti za funkciju dve promenljive, razmotriće se funkcija: (slika IV-7)

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2.$$



Slika IV-7. Dijagram funkcije $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$.

Uslovi na osnovu kojih se vrši test konveksnosti su:

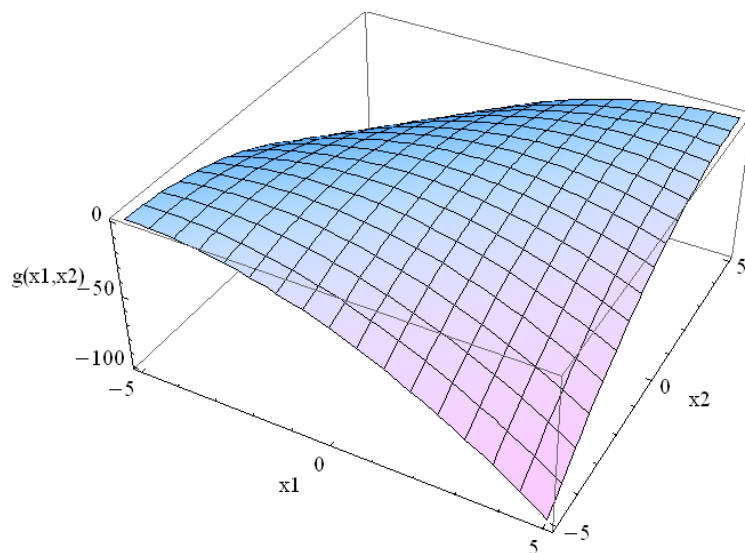
$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} - \left[\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} \right]^2 = 2 \cdot 2 - (-2)^2 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = 2 > 0, \quad \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 2 > 0.$$

Pošto ≥ 0 važi za sva tri uslova, funkcija $f(x_1, x_2)$ je konveksna. Međutim, nije strogo konveksna jer je prvi uslov $= 0$, a ne > 0 .

Sada razmotrimo istu funkciju sa promenjenim znakom, tj.: (slika IV-8)

$$g(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2) = -(x_1 - x_2)^2 = -x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_2^2.$$



Slika IV-8. Dijagram funkcije $g(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2) = -(x_1 - x_2)^2$.

U ovom slučaju:

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} - \left[\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} \right]^2 = -2 \cdot (-2) - 2^2 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = -2 < 0, \quad \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = -2 < 0.$$

Pošto za prvi uslov važi ≥ 0 , a za druga dva ≤ 0 , to je $g(x_1, x_2)$ je konkavna funkcija. Međutim, nije strogo konkavna jer je prvi uslov $= 0$.

Kada postoji više od dve promenljive, test konveksnosti je uopštavanje testa prikazanog u tabeli IV-1. U matematičkoj terminologiji funkcija $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je **konveksna (konkavna)** ako i samo ako je njena $n \times n$ Hessian matrica **pozitivno (negativno) semidefinitna** za sve moguće vrednosti (x_1, x_2, \dots, x_n) . *9

Funkcija $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je **strogo konveksna (konkavna)** ako i samo ako je njena $n \times n$ Hessian matrica **pozitivno (negativno) definitivna** za sve moguće vrednosti (x_1, x_2, \dots, x_n) . *10

Hessian matrica je simetrična matrica i definiše se kao: *11

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \cdot \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \cdot \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Do sada je konveksnost tretirana kao opšte svojstvo funkcije. Međutim, mnoge nekonveksne funkcije zadovoljavaju uslove konveksnosti u određenim intervalima za odgovarajuće promenljive. Stoga ima smisla govoriti o funkciji koja je konveksna na određenom intervalu.

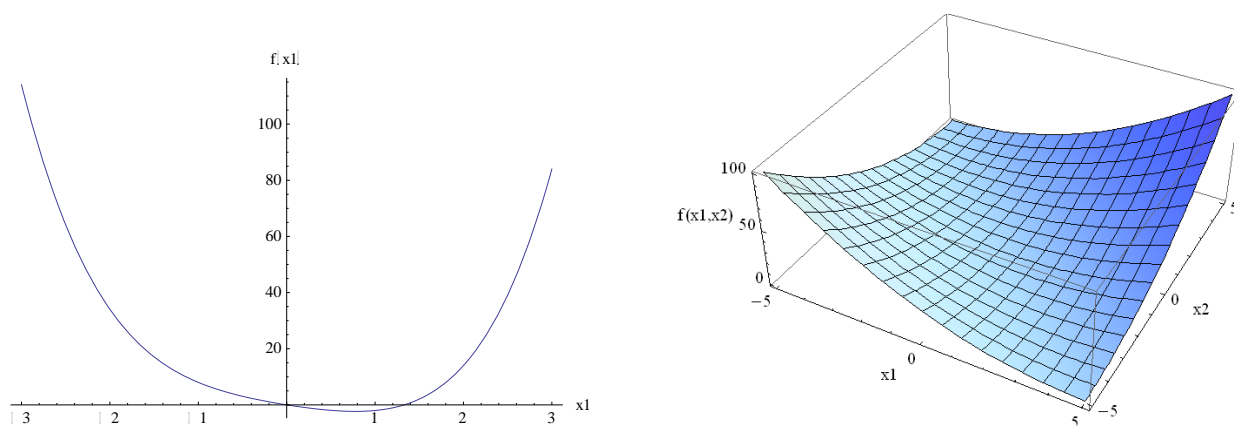
Konačno treba spomenuti dva posebno važna svojstva konveksnih ili konkavnih funkcija: *12

Prvo, ako je $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ konveksna funkcija, tada je $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ konkavna funkcija i obrnuto.

Drugo, zbir konveksnih funkcija je konveksna funkcija, a zbir konkavnih funkcija je konkavna funkcija.

Radi ilustracije razmotrimo sledeće funkcije: (slika IV-9)

$$f_1(x_1) = x_1^4 + 2 \cdot x_1^2 - 5 \cdot x_1, \text{ i } f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2.$$

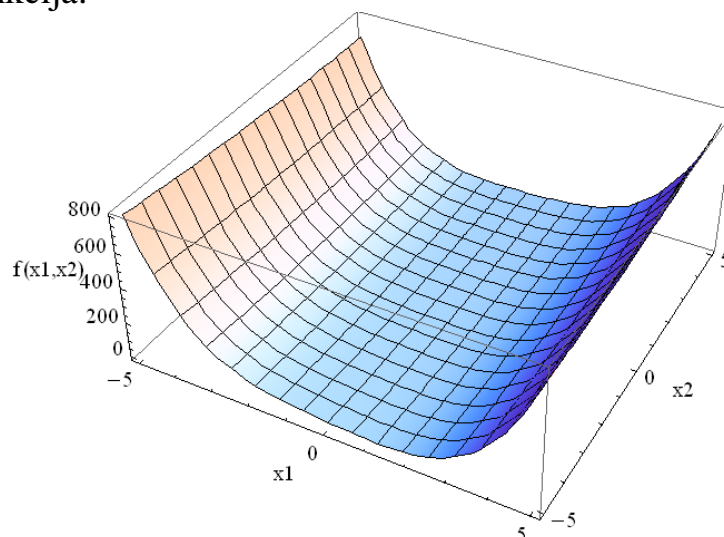


Slika IV-9. Dijagrami funkcija: $f_1(x_1) = x_1^4 + 2 \cdot x_1^2 - 5 \cdot x_1$, i $f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$.

Obe funkcije su konveksne, što se može potvrditi izračunavanjem njihovih drugih izvoda. Dakle, zbir ovih funkcija: (slika IV-10)

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + 3 \cdot x_1^2 - 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2,$$

je konveksna funkcija.

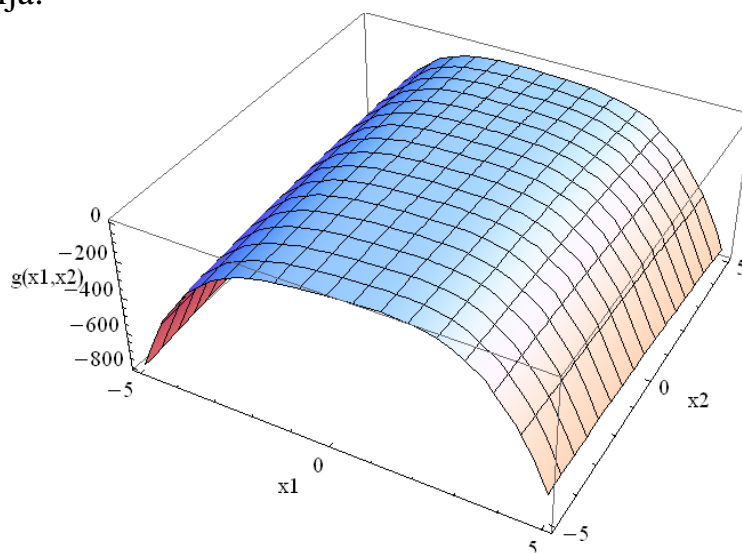


Slika IV-10. Dijagram funkcije $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 3 \cdot x_1^2 - 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$.

Negativna vrednost gornje funkcije: (slika IV-11)

$$g(x_1, x_2) = -x_1^4 - 3 \cdot x_1^2 + 5 \cdot x_1 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_2^2,$$

konkavna funkcija.



Slika IV-11. Dijagram funkcije $g(x_1, x_2) = -x_1^4 - 3 \cdot x_1^2 + 5 \cdot x_1 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_2^2$.

Definitnost matrica

Simetrična matrica $A=[a_{ij}]$ (dimenzije $n \times n$) je **pozitivno definitna** ukoliko za bilo koji vektor $x \neq 0$ važi $x \cdot A \cdot x^T > 0$. Ukoliko važi $x \cdot A \cdot x^T \geq 0$ matrica je **pozitivno semidefinitna**. *13

Simetrična matrica $A=[a_{ij}]$ (dimenzije $n \times n$) je **negativno definitna** ukoliko za bilo koji vektor $x \neq 0$ važi $x \cdot A \cdot x^T < 0$. Ukoliko važi $x \cdot A \cdot x^T \leq 0$ matrica je **negativno semidefinitna**. *14

Simetrična matrica $A=[a_{ij}]$ (dimenzije $n \times n$) je **nedefinitna** ukoliko je $x \cdot A \cdot x^T$ za neki vektor x' pozitivno (semi)definitna a za neki drugi vektor x'' negativno (semi)definitna.

U opštem slučaju ispitivanje uslova $x \cdot A \cdot x^T > 0$, $x \cdot A \cdot x^T \geq 0$, $x \cdot A \cdot x^T < 0$ i $x \cdot A \cdot x^T \leq 0$ nije jednostavno u praksi, tako da se za ispitivanje uslova definitnosti koristi Sylvester-ov kriterijum.

NAPOMENA: $Q(x) = x \cdot A \cdot x^T$ predstavlja kvadratnu formu vektora x . Definitnost matrice A je jednoznačno određena definitnošću kvadratne forme $Q(x)$.

Sylvester-ov kriterijum za pozitivnu definitnost matrice: *15

Simetrična matrica $A=[a_{ij}]$ (dimenzije $n \times n$) je pozitivno definitna ako i samo ako su svi glavni minori matrice A pozitivni, tj.

$$D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0.$$

Sylvester-ov kriterijum za negativnu definitnost matrice: *16

Simetrična matrica $A=[a_{ij}]$ (dimenzije $n \times n$) je negativno definitna ako i samo ako glavni minori matrice A naizmenično menjaju znak, tj.

$$D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, \dots$$

Sylvester-ov kriterijum za pozitivnu semidefinitnost matrice: *17

Simetrična matrica $A=[a_{ij}]$ (dimenzije $n \times n$) je pozitivno semidefinitna ako:

1. su svi glavni minori matrice A nenegativni ($D_k \geq 0, k=1, 2, \dots, n$), i
2. postoji bar jedan glavni minor matrice A za koga važi: $D_k > 0$.

Sylvester-ov kriterijum za negativnu semidefinitnost matrice: *18

Simetrična matrica $A=[a_{ij}]$ (dimenzije $n \times n$) je negativno semidefinitna ako:

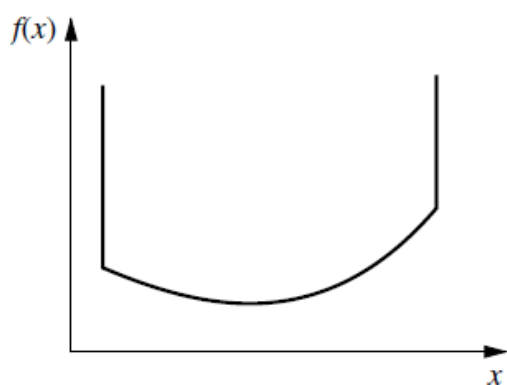
1. za sve glavne minore matrice A važi: $(-1)^k \cdot D_k \geq 0, k=1, 2, \dots, n$, i
2. postoji bar jedan glavni minor matrice A za koga važi: $(-1)^k \cdot D_k > 0$.

Karakterizacija definitnosti matrice se može izvršiti i pomoću njenih sopstvenih vrednosti. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti simetrične matrice $A = [a_{ij}]$ (dimenzije $n \times n$) kvadratne forme $Q(x)$. Za matricu A se kaže da je: *19

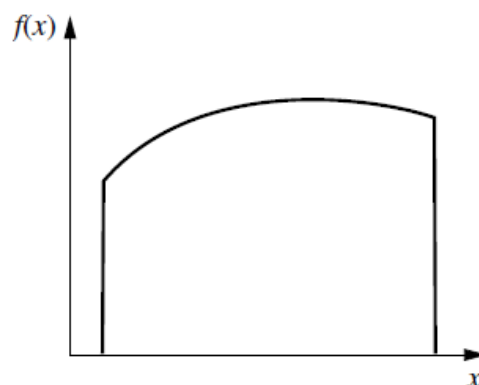
- pozitivno definitna, ukoliko je $\lambda_i > 0$ za svako $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,
- pozitivno semidefinitna, ukoliko je $\lambda_i \geq 0$ za svako $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,
- negativno definitna, ukoliko je $\lambda_i < 0$ za svako $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,
- negativno semidefinitna, ukoliko je $\lambda_i \leq 0$ za svako $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,
- nedefinitna, ukoliko postoje $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, takvi da su λ_i i λ_j različitog znaka.

Konveksni skupovi

Koncept konveksne funkcije vodi sasvim prirodno do povezanog koncepta konveksnog skupa. Ako je $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ konveksna funkcija, tada duž koja se nalazi iznad ili na grafiku funkcije $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ predstavlja **konveksni skup**. Slično tome, duž koja se nalazi ispod ili na grafiku konkavne funkcije je konveksni skup. Ovi slučajevi su prikazani na slikama IV-12 i IV-13 za slučaj jedne promenljive. Dalje, konveksni skupovi imaju važno svojstvo da za bilo koji broj konveksnih skupova, tačke koje se nalaze u svima njima (tj. presek tih konveksnih skupova) takođe predstavljaju konveksan skup.

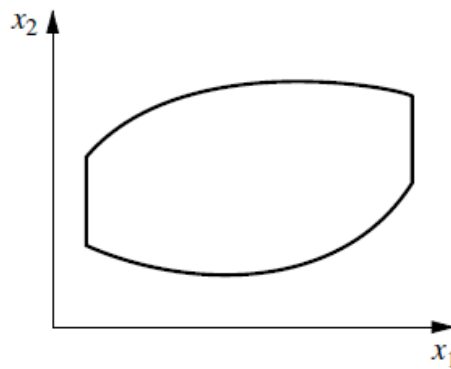


Slika IV-12. Konveksni skup određen konveksnom funkcijom.



Slika IV-13. Konveksni skup određen konkavnom funkcijom.

Skup tačaka koje se nalaze iznad ili na konveksnoj funkciji i ispod ili na konkavnoj funkciji je takođe konveksan skup, kao što je prikazano na slici IV-14. Konveksni skupovi se mogu intuitivno posmatrati kao skup tačaka čija je donja granica konveksna funkcija i čija je gornja granica konkavna funkcija.



Slika IV-14. Konveksni skup određen konveksnom i konkavnom funkcijom.

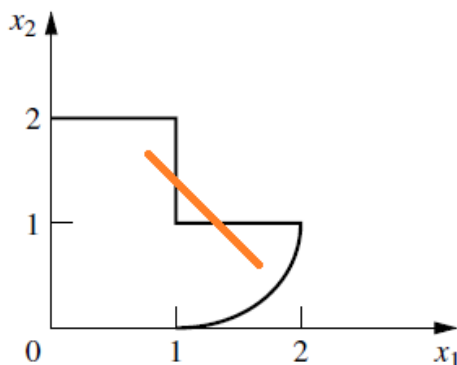
Definicija: Konveksni skup je skup tačaka takvih da, za svaki par tačaka u skupu cela duž koja spaja ove dve tačke takođe pripada skupu. *20

Razlika između nekonveksnih i konveksnih skupova prikazana je na slikama IV-15 i IV-16. Prema tome, skup tačaka prikazan na slici IV-15 nije konveksan skup jer postoji mnogo parova tačaka, npr. (1, 2) i (2, 1), takvih da duž koja ih spaja ne pripada u potpunosti skupu. To nije slučaj za skup na slici IV-16, koji je konveksan.

Na kraju potrebno je definisati pojam krajnje tačke (temena) konveksnog skupa.

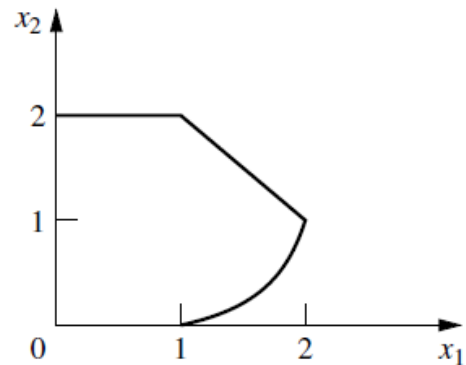
Definicija: Krajnja tačka (teme) konveksnog skupa je tačka u skupu koja se ne nalazi ni na jednoj duži koja spaja bilo koje druge dve tačke u skupu. *21

Krajnje tačke (temena) konveksnog skupa na slici IV-16 su (0, 0), (0, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 0) i beskonačan broj tačaka na kružnom luku između tačaka (2, 1) i (1, 0). Ako bi umesto kružnog luka te dve tačke spajala duž, tada bi skup imao samo pet navedenih krajnjih tačaka.



Slika IV-15. Primer skupa koji nije konveksan.

*22



Slika IV-16. Primer skupa koji je konveksan.

Pitanja:

1. Definicija konveksne (konkavne) funkcije jedne promenljive.
2. Definicija strogo konveksne (konkavne) funkcije jedne promenljive.
3. Test za ispitivanje konveksnosti funkcije jedne promenljive.
4. Nacrtati primere konveksnih i konkavnih funkcija jedne promenljive.
5. Definicija duži u višedimenzionom prostoru.
6. Definicija konveksne (konkavne) funkcije više promenljivih.
7. Definicija strogo konveksne (konkavne) funkcije više promenljivih.
8. Test konveksnosti za funkciju dve promenljive.
9. Kada je funkcija više promenljivih konveksna (konkavna).
10. Kada je funkcija više promenljivih strogo konveksna (konkavna).
11. Hessian matrica.
12. Svojstva konveksnih (konkavnih) funkcija.
13. Kada je matrica pozitivno definitna i pozitivno semidefinitna.
14. Kada je matrica negativno definitna i negativno semidefinitna.
15. Sylvester-ov kriterijum za pozitivnu definitnost matrice.
16. Sylvester-ov kriterijum za negativnu definitnost matrice.
17. Sylvester-ov kriterijum za pozitivnu semidefinitnost matrice.
18. Sylvester-ov kriterijum za negativnu semidefinitnost matrice.
19. Određivanje definitnosti matrice na osnovu njenih sopstvenih vrednosti.
20. Definicija konveksnog skupa.
21. Definicija krajnje tačke (temena) konveksnog skupa.
22. Nacrtati primere konveksnih skupova i skupova koji nisu konveksni.