

Dodatak 1 – Srednje vreme trajanja aktivnosti po metodi PERT

Pretpostavka metode PERT je da se vreme trajanja aktivnosti (t) nalazi u intervalu između pesimističkog (p) i optimističkog (o) vremena trajanja aktivnosti tj. $t \in [o, p]$. Drugim rečima verovatnoća da će vreme trajanja aktivnosti (p_a) biti u pomenutom intervalu je jednaka jedinici:

$$p_a = \int_o^p f(t) \cdot dt,$$

gde $f(t)$ predstavlja gustinu pretpostavljene raspodele vremena trajanja aktivnosti, što je u slučaju metode PERT – Beta raspodela.

Realna promenljiva t (vreme trajanja aktivnosti) je slučajna (stohastička) promenljiva koja pripada intervalu $[o, p]$ i konvergira nekoj vrednosti iz tog intervala.

Uvodi se pretpostavka da je vreme trajanja aktivnosti (t) raspodeljeno po Beta raspodeli, definisanoj na intervalu $[o, p]$, gde je $o > 0$ i $p > o > 0$, i čija je gustina raspodele data izrazom:

$$f_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{za } -\infty < t < o \\ \frac{(t-o)^\alpha \cdot (p-t)^\gamma}{(p-o)^{\alpha+\gamma+1} \cdot \beta(\alpha+1, \gamma+1)}, & \text{za } o \leq t \leq p \\ 0, & \text{za } p < t < \infty \end{cases}$$

gde je:

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-1} \cdot dx = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} - \text{beta funkcija, odnosno}$$

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} \cdot e^{-x} \cdot dx - \text{gama funkcija.}$$

Matematičko očekivanje Beta raspodele $E(t)$, odnosno srednje vreme trajanja aktivnosti (μ) je jednako:

$$E(t) = \mu = o + (p - a) \cdot \frac{\alpha + 1}{\alpha + \gamma + 2},$$

dok je disperzija Beta raspodele $D(t)$, odnosno vremena trajanja aktivnosti (σ^2) jednaka:

$$D(t) = \sigma^2 = \frac{(p - o)^2 \cdot (\alpha + 1) \cdot (\gamma + 1)}{(\alpha + \gamma + 3) \cdot (\alpha + \gamma + 2)^2}.$$

Sa druge strane najverovatnija vrednost Beta raspodele tj. najverovatnije vreme trajanja aktivnosti (m), određuje se iz uslova $f'(t) = 0$ i $f''(t) < 0$, i iznosi:

$$m = \frac{o \cdot \gamma + p \cdot \alpha}{\alpha + \gamma},$$

tako da se matematičko očekivanje Beta raspodele $E(t)$, odnosno srednje vreme trajanja aktivnosti (μ) može napisati kao:

$$E(t) = \mu = \frac{o + p + (\alpha + \gamma) \cdot m}{\alpha + \gamma + 2}.$$

Kod standardne verzije metode PERT usvojeno je da α i γ imaju sledeće vrednosti:

$$\alpha = 2 + \sqrt{2}; \quad \gamma = 2 - \sqrt{2} \text{ ili } \alpha = 2 - \sqrt{2}; \quad \gamma = 2 + \sqrt{2},$$

tako da konačni izrazi za srednje vreme trajanja aktivnosti (μ) i disperziju vremena trajanja aktivnosti (σ^2) imaju sledeći oblik:

$$\mu = \frac{o + 4 \cdot m + p}{6},$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{p - o}{6} \right)^2.$$

Analizom izraza za srednje vreme trajanja aktivnosti (μ) zapaža se da optimističko vreme trajanja aktivnosti (o) i pesimističko vreme trajanja aktivnosti (p) figurišu sa faktorom 1 dok najverovatnije vreme trajanja aktivnosti (m) figuriše sa faktorom 4, što znači da će srednje vreme trajanja aktivnosti (μ) biti u blizini najverovatnijeg vremena trajanja aktivnosti (m) ili se poklapati sa njim ako su optimistička (o) odnosno pesimistička (p) vremena trajanja aktivnosti simetrična u odnosu na najverovatnije vreme trajanja aktivnosti (m).