

## **Zadatak 01**

Na osnovu merenja sastava etanola u tečnosti i pari, izvršeno je ispitivanje rada atmosferske destilacione kolone za razdvajanje mešavine etanol (A) – voda (B). U tabeli 1 dati su molски udeli u tečnoj i parnoj fazi.

**Tabela 1**

$x, \text{ kmolA}/(\text{kmolA}+\text{kmolB})$	$y, \text{ kmolA}/(\text{kmolA}+\text{kmolB})$
0,0257	0,0753
0,0382	0,1538
0,0506	0,2501
0,0578	0,3147

Potrebno je odrediti:

- a) jednačinu operacione linije koristeći se metodom najmanjih kvadrata;
- b) statističke pokazatelje kvaliteta regresione zavisnosti.

## **Rešenje**

- a) Parametri  $a$  i  $b$  se dobijaju rešavanjem sistema jednačina

$$b = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i} = \frac{4 \cdot 0,0387 - 0,172 \cdot 0,794}{4 \cdot 0,00802 - 0,172 \cdot 0,172} = 7,45$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - b \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n} = -0,122$$

pa korelacija glasi

$$y_c = -0,122 + 7,45 \cdot x$$

Potrebne sume su date u tabeli 2.

**Tabela 2**

$i$	$x$	$y$	$x \cdot y$	$x^2$
1	0,0257	0,0753	0,00194	0,000660
2	0,0382	0,154	0,00588	0,00146
3	0,0506	0,250	0,0127	0,00256
4	0,0578	0,315	0,0182	0,00334
$\Sigma$	0,172	0,794	0,0387	0,00802

b) U tabeli 3 prikazani su pojedinačni rezultati neophodni za izračunavanja.

**Tabela 3**

$i$	$x$	$y$	$y_c$	$y - y_c$	$(y - y_c)^2$	$\frac{y - y_c}{y}$	$\left(\frac{y - y_c}{y}\right)^2$	$(y - y_{sr})^2$
1	0,0257	0,0753	0,0695	0,00584	0,0000340	0,0775	0,00600	0,0153
2	0,0382	0,154	0,1626	-0,00859	0,0000738	-0,0558	0,00311	0,00202
3	0,0506	0,250	0,2550	-0,00497	0,0000247	-0,0199	0,000395	0,00261
4	0,0578	0,315	0,3086	0,00639	0,0000408	0,0203	0,000412	0,0135
$\Sigma$	0,172	0,794	0,796	-0,00134	0,000173	0,0221	0,00992	0,0334

Prosečno odstupanje je:

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - y_{c,i}}{y_i} \right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{0,00992}{4}} = 0,0498 = 4,98\% ,$$

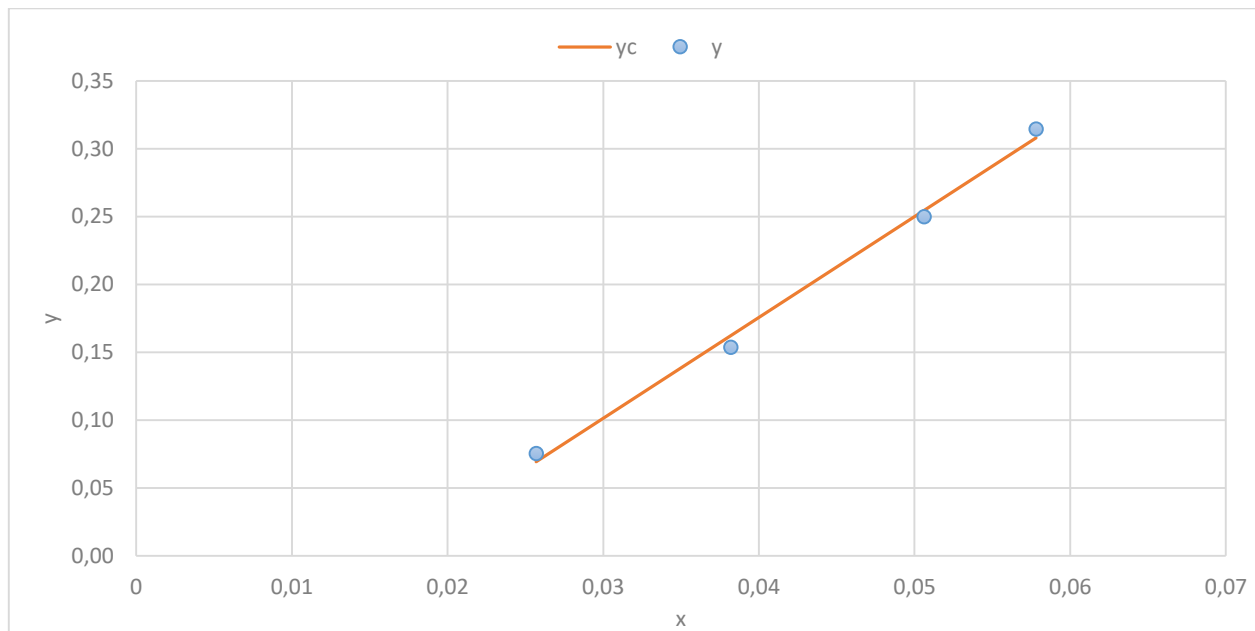
dok korelacioni odnos iznosi:

$$CR = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{c,i})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{sr})^2}} = \sqrt{1 - \frac{0,000173}{0,0334}} = 0,997 = 99,7\% .$$

pri čemu je srednja vrednost regresanda

$$y_{sr} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{0,794}{4} = 0,199$$

Maksimalne relativne greške su  $RE_{max}^+ = 7,75\%$  i  $RE_{max}^- = -5,58\%$ .



**Slika 1.** Empirijski podaci i funkcija dobijena regresijom.

## Zadatak 02

Specifični toplotni kapacitet nafte i njenih frakcija zavisi (kao i slučaju ostalih fluida) od veličina stanja (temperatura, koncentracije komponenti, pritisak), pri čemu se uticaj pritiska na svojstva najčešće zanemaruje. Prema [3.5] uticaj sastava nafte, odnosno frakcija, na svojstva se na zadovoljavajući način prikazuje kroz korišćenje specifične gustine ( $SG$ ), koja je definisana kao odnos gustine nafte na referentnoj temperaturi i gustine vode na istoj referentnoj temperaturi – po pravilu ova temperatura iznosi  $60^{\circ}\text{F} = 15,5^{\circ}\text{C}$ .

U tabeli 4 prikazane su vrednosti merenja specifičnog toplotnog kapaciteta četiri različita uzorka naftnih frakcija. Na osnovu izmerenih podataka potrebno je odrediti korelaciju za određivanje specifičnog toplotnog kapaciteta nafte u zavisnosti od temperature i specifične gustine nafte.

**Tabela 4** Rezultati merenja specifičnog toplotnog kapaciteta nafte

$SG$ –	$t$ $^{\circ}\text{C}$	$c_p$ $\text{kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$	$SG$ –	$t$ $^{\circ}\text{C}$	$c_p$ $\text{kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
0,702	31	2,16	0,887	27	1,90
	61	2,29		56	2,01
	85	2,39		94	2,16
	113	2,52		117	2,25
0,784	39	2,08	0,965	34	1,83
	62	2,17		68	1,96
	98	2,32		87	2,03
	124	2,43		109	2,11

## Rešenje

Korelacija se postavlja u sledećem obliku:

$$c_p^c = a + b \cdot SG + c \cdot t$$

a brojčani podaci su dati u tabeli 5, na osnovu kojih treba formirati sistem od tri jednačine sa tri nepoznate:

$$n \cdot a + b \cdot \sum_{i=1}^n SG_i + c \cdot \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n c_{p,i}$$

$$a \cdot \sum_{i=1}^n SG_i + b \cdot \sum_{i=1}^n SG_i^2 + c \cdot \sum_{i=1}^n SG_i \cdot t_i = \sum_{i=1}^n SG_i \cdot c_{p,i}$$

$$a \cdot \sum_{i=1}^n t_i + b \cdot \sum_{i=1}^n SG_i \cdot t_i + c \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n t_i \cdot c_{p,i}$$

**Tabela 5**

$i$	$SG$	$t$	$c_p$	$SG^2$	$t^2$	$SG \cdot t$	$SG \cdot c_p$	$t \cdot c_p$
1	0,702	31	2,16	0,492804	961	21,76	1,51632	66,96
2	0,702	61	2,29	0,492804	3721	42,82	1,60758	139,69
3	0,702	85	2,39	0,492804	7225	59,67	1,67778	203,15
4	0,702	113	2,52	0,492804	12769	79,33	1,76904	284,76
5	0,784	39	2,08	0,614656	1521	30,58	1,63072	81,12
6	0,784	62	2,17	0,614656	3844	48,61	1,70128	134,54
7	0,784	98	2,32	0,614656	9604	76,83	1,81888	227,36
8	0,784	124	2,43	0,614656	15376	97,22	1,90512	301,32
9	0,887	27	1,90	0,786769	729	23,95	1,68530	51,30
10	0,887	56	2,01	0,786769	3136	49,67	1,78287	112,56
11	0,887	94	2,16	0,786769	8836	83,38	1,91592	203,04
12	0,887	117	2,25	0,786769	13689	103,78	1,99575	263,25
13	0,965	34	1,83	0,931225	1156	32,81	1,76595	62,22
14	0,965	68	1,96	0,931225	4624	65,62	1,89140	133,28
15	0,965	87	2,03	0,931225	7569	83,96	1,95895	176,61
16	0,965	109	2,11	0,931225	11881	105,19	2,03615	229,99
$\Sigma$	<b>13,352</b>	<b>1205</b>	<b>34,61</b>	<b>11,30182</b>	<b>106641</b>	<b>1005,16</b>	<b>28,65901</b>	<b>2671,15</b>

Dakle, možemo formirati sledeći sistem:

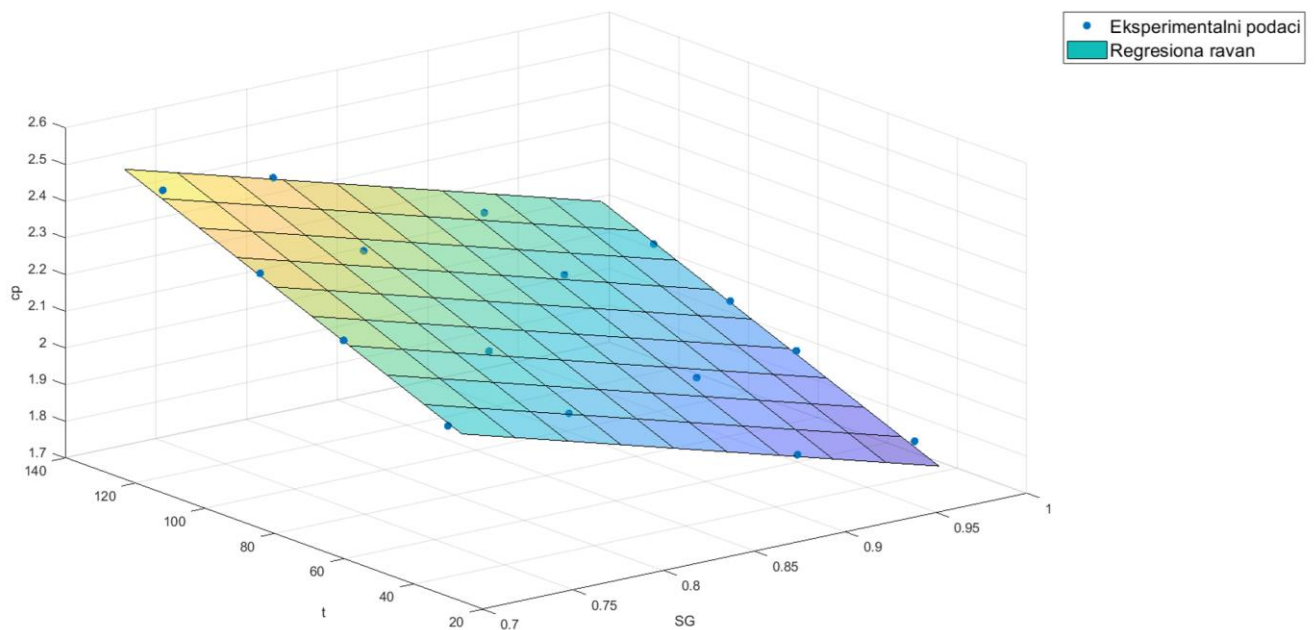
$$16a + 13,352b + 1205c = 34,61$$

$$13,352a + 11,30182b + 1005,16c = 28,65901$$

$$1205a + 1005,16b + 106641c = 2671,15$$

Dati sistem linearnih jednačina je izrazito numerički osetljiv, što znači da treba obratiti pažnju na broj decimala s kojim radimo (skraćivanje na drugu ili treću decimalu može napraviti velike razlike u rešenju). Rešenje sistema jednačina je  $a = 3,01739$ ;  $b = -1,38726$  i  $c = 0,00403$ , pa korelacija za izračunavanje specifičnog toplotnog kapaciteta naftnih frakcija u zavisnosti od temperature i specifične gustine glasi:

$$c_p = 3,01739 - 1,38726 \cdot SG + 0,00403 \cdot t$$



**Slika 2.** Empirijski podaci i prava dobijena regresijom.

Statistički pokazatelji su dati u tabeli 6.

**Tabela 6**

$SD, \%$	$CR, \%$	$RE_{max}^-, \%$	$RE_{max}^+, \%$	$AE_{max}^-, \text{kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$	$AE_{max}^+, \text{kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$
0,3871	99,90	0,0028	0,8430	-0,0096	0,0212

### **Zadatak 03**

Simulacijom jednokanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom M/M/1/ $\infty$  dobijeni su za različite vrednosti koeficijenta iskorišćenja kanala za opsluživanje različite vrednosti srednjeg broja jedinica u sistemu. Rezultati simulacije prikazani su u tabeli 7. Naći regresionu krivu u obliku  $N_{ws} = \frac{\rho}{a + b \cdot \rho}$  i odrediti kvalitet korelacije.

**Tabela 7**

$\rho$	0,2	0,35	0,5	0,65	0,8
$N_{ws}$	0,356	0,526	0,986	1,759	4,169

### **Rešenje**

U cilju određivanja koeficijenata regresione krive neophodno je istu transformisati u oblik koji odgovara obliku linearne regresije kao:

$$Y = \frac{\rho}{N_{ws}}, Y = a + b \cdot \rho$$

Transformisani podaci su dati u tabeli 8, kao:

**Tabela 8**

$\rho$	0,2	0,35	0,5	0,65	0,8
$Y$	0,562	0,665	0,507	0,370	0,192

U tabeli 9 prikazani su pojedinačni rezultati neophodni za izračunavanje.

**Tabela 9**

$i$	$\rho$	$N_{ws}$	$Y$	$\rho \cdot Y$	$\rho^2$
1	0,2	0,356	0,56180	0,11236	0,04000
2	0,35	0,526	0,66540	0,23289	0,12250
3	0,5	0,986	0,50710	0,25355	0,25000
4	0,65	1,759	0,36953	0,24019	0,42250
5	0,8	4,169	0,19189	0,15351	0,64000
$\Sigma$	2,5	7,796	2,29572	0,99251	1,47500

Parametri  $a$  i  $b$  se dobijaju rešavanjem sistema jednačina

$$b = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot Y_i - \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot \sum_{i=1}^n Y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n \rho_i^2 - \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot \sum_{i=1}^n \rho_i} = \frac{5 \cdot 0,99251 - 2,5 \cdot 2,29572}{5 \cdot 1,475 - 2,5 \cdot 2,5} = -0,69045$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - b \cdot \sum_{i=1}^n \rho_i}{n} = \frac{2,29572 + 0,69045 \cdot 2,5}{5} = 0,80437$$

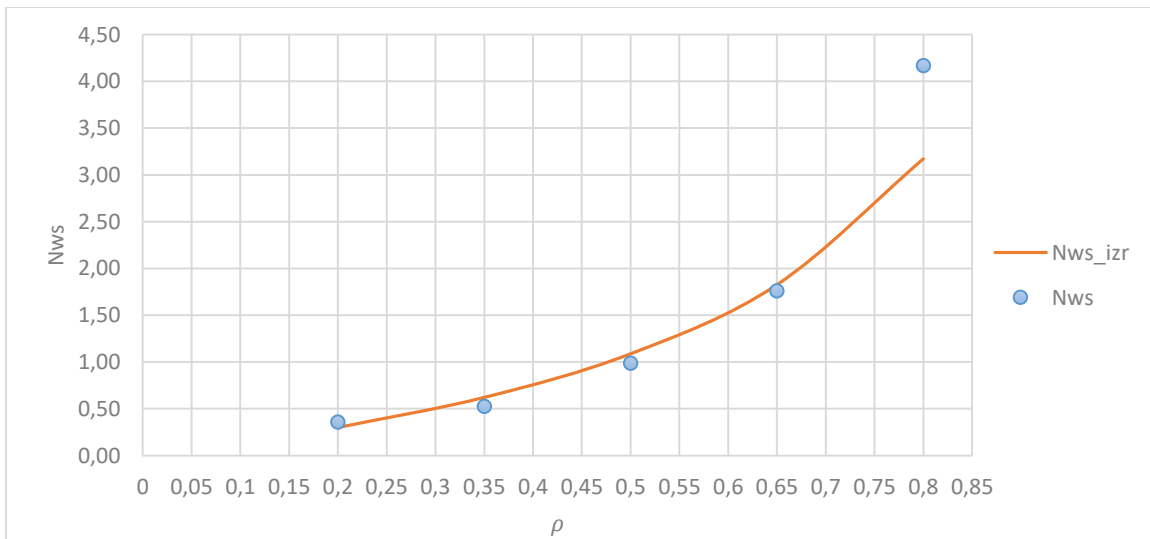
Dakle, tražena korelaciona jednačina se može predstaviti kao:

$$Nws = \frac{\rho}{0,80437 - 0,69045 \cdot \rho}$$

U tabeli 10, uporedo su prikazane vrednosti dobijene simulacijom i izračunavanjem preko korelacione jednačine.

**Tabela 10**

$\rho$	0,2	0,35	0,5	0,65	0,8
$Nws$	0,356	0,526	0,986	1,759	4,169
$Nws_{izr}$	0,3002	0,6220	1,0890	1,8280	3,1745



**Slika 3.** Rezultati simulacije i regresiona kriva.

Da bismo dobili vrednosti kvaliteta korelacije, neophodno je ostati u linearnom domenu, tj. sve dalje parametre računamo u okviru transformisane linearne funkcije ( $Y_{izr} = a + b \cdot \rho$ ).



**Tabela 10.** Metrike za ocenu kvaliteta korelacije

$i$	$Y_{izr}$	$AE_i = Y - Y_{izr}$	$RE_i = \frac{ Y - Y_{izr} }{Y}$	$AE_i^2$	$RE_i^2$	$(Y - Y_{sr})^2$
1	0,66628	-0,10448	0,18598	0,01092	0,03459	0,01054
2	0,56271	0,10269	0,15432	0,01054	0,02382	0,04254
3	0,45914	0,04796	0,09457	0,00230	0,00894	0,00230
4	0,35558	0,01395	0,03776	0,00019	0,00143	0,00803
5	0,25201	-0,06011	0,31327	0,00361	0,09814	0,07142

Srednje odstupanje je:

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n RE_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{0,16691}{5}} = 0,18271 = 18,3\%,$$

dok korelacioni odnos iznosi:

$$CR = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - Y_{izr,i})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - Y_{sr})^2}} = \sqrt{1 - \frac{0,02757}{0,13483}} = 0,8919 = 89,19\%.$$

Finalno, u tabeli 11 date su vrednosti dobijenih kvaliteta korelacije:

**Tabela 11**

$SD, \%$	$CR, \%$	$RE_{max}^-, \%$	$RE_{max}^+, \%$	$AE_{max}^-$	$AE_{max}^+$
18,27	89,19	3,78	31,33	-0,105	0,103

### Dodatni zadatak za vežbu

Identični podaci iz prethodnog zadatka su prikazani u Tabeli 12. Neophodno je iste aproksimirati sledećim tipovima funkcija:

- $y_c = a \cdot e^{b \cdot x},$
- $y_c = a \cdot x^b,$
- $y_c = a + b \cdot \ln(x),$
- $y_c = a + b \cdot x^2.$

Izračunati parametre  $a$  i  $b$  za svaki tip funkcije, kao i koeficijent korelacije i prosečno odstupanje.

**Tabela 12**

$x$	0,2	0,35	0,5	0,65	0,8
$y$	0,356	0,526	0,986	1,759	4,169

**Rešenja**

Zadatak	$a$	$b$	$CR$	$SD$
a)	0,13778	4,08547	0,99171	2,37321
b)	4,12284	1,69224	0,94790	8,17798
c)	3,39838	2,29534	0,80691	1,00515
d)	-0,26694	6,19031	0,95779	0,51583