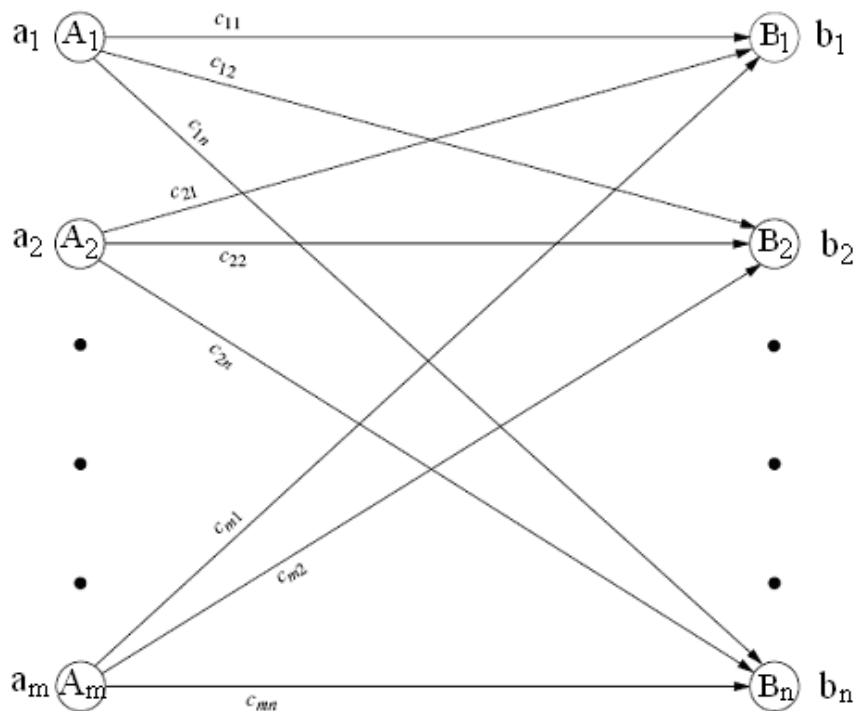


Transportni Problem

Iznalaženje optimalnog plana transporta nekog proizvoda u najvećem broju slučajeva podrazumeva takav plan prevoza proizvoda jedne vrste iz mesta proizvodnje (ili skladištenja) tj. **izvora**, u određena mesta potrošnje (ili skladištenja) tj. **destinacije**, pod uslovom da u odnosu na mrežu saobraćajnica i raspoloživa transportna sredstva troškovi transporta budu minimalni. *1

Svaki izvor ima određen kapacitet **snabdevanja** proizvodom koji treba distribuirati do odgovarajućih destinacija, kao što i svaka destinacija ima određen kapacitet **potražnje** za datim proizvodom koji treba da dobije iz odgovarajućih izvora.

Pretpostavka je da postoji m izvora proizvoda i n destinacija na koje taj proizvod treba distribuirati – transportovati, slika II-1. *2



Slika II-1. Grafička prezentacija transportnog problema.

Sa A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) označeni su izvori datog proizvoda, dok je njihov kapacitet snabdevanja označen sa a_i ($i = 1, 2, \dots, m$).

Sa B_j ($j = 1, 2, \dots, n$) označene su destinacije na koje se dati proizvod distribuira dok je njihova potražnja označena sa b_j ($j = 1, 2, \dots, n$).

Troškovi transporta po jedinici datog proizvoda od izvora A_i do odgovarajuće destinacije B_j su c_{ij} , dok x_{ij} predstavlja količinu proizvoda koja se transportuje od A_i do odgovarajuće destinacije B_j .

Drugim rečima, potrebno je rasporediti ukupne raspoložive količine datog proizvoda $\sum_{i=1}^m a_i$ na odgovarajuće destinacije čije su ukupne potrebe $\sum_{j=1}^n b_j$, tako da funkcija cilja izražena kroz ukupne transportne troškove bude minimalna.

Pri formulaciji transportnog problema uvodi se sledeća pretpostavka vezana za kapacitete snabdevanja i potražnje:

Kapacitet snabdevanja, datim proizvodom, svakog izvora je fiksna i celokupna količina proizvoda generisana od strane bilo kog izvora mora da se distribuira do destinacija. Slično, potražnja za datim proizvodom svake destinacije je fiksna i celokupna potraživana količina proizvoda, za svaku destinaciju, se mora primiti od izvora.

Što znači da mora postojati balans između ukupnog kapaciteta snabdevanja svih izvora i ukupne potražnje svih destinacija odnosno transportni problem će imati dopustivo rešenje ako i samo ako:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Pošto troškovi c_{ij} predstavljaju troškove distribucije jedinice proizvoda od izvora i do destinacije j , uvodi se sledeća pretpostavka:

*Troškovi distribucije proizvoda iz bilo kojeg izvora u bilo koju destinaciju su **direktno proporcionalni** broju jedinica proizvoda x_{ij} koji se transportuje od datog izvora A_i do odgovarajuće destinacije B_j .* *3

Podaci potrebni za definisanje transportnog problema (slika II-1) kao što su: izvori (A_i) i njihov kapacitet snabdevanja (a_i), destinacije (B_j) i njihova potražnja (b_j) kao i jedinična cena transporta – distribucije (c_{ij}), koji se još nazivaju *parametri modela*, mogu se pogodno prikazati tabelarno preko tzv. parametarske tabele – Tabela II-1.

Tabela II-1. Parametri modela transportnog problema. *4

	Jedinična cena transporta				Kapacitet snabdevanja
	Destinacija				
	1	2	...	<i>n</i>	
Izvor 1 2 ⋮ <i>m</i>	<i>c</i> ₁₁	<i>c</i> ₁₂	...	<i>c</i> _{1<i>n</i>}	a ₁
	<i>c</i> ₂₁	<i>c</i> ₂₂	...	<i>c</i> _{2<i>n</i>}	a ₂
				⋮
	<i>c</i> _{<i>m</i>1}	<i>c</i> _{<i>m</i>2}	...	<i>c</i> _{<i>m</i><i>n</i>}	a _{<i>m</i>}
Potražnja	b ₁	b ₂	...	b _{<i>n</i>}	

VAŽNO: Transportni problem je specijalan slučaj zadatka linearnog programiranja.

Ako se sa F označe ukupni troškovi transporta – distribucije, a sa x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) broj jedinica proizvoda koji se transportuje od izvora i do destinacije j , formulacija transportnog problema kao zadatka LP je sledeća: *5

$$\min F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (1)$$

sa ograničenjima:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Tabela II-2, prikazuje posebnu strukturu koeficijenata u ograničenjima (2) i (3) transportnog problema. Svaki zadatak LP koji se uklapa u ovu posebnu formulaciju jeste transportni problem bez obzira na njegovo fizičko značenje. U stvarnosti postoji veliki broj problema, nevezanih direktno za transport, čiji se model uklapa u prikazanu posebnu strukturu zadatka LP. Ovo je samo jedan od razloga zašto je transportni problem veoma važan specijalni slučaj zadatka LP.

Tabela II-2. Struktura koeficijenata u ograničenjima. *6

Koeficijenti:																						
	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	...	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}									
$A =$	1 1 ... 1				1 1 ... 1				...	1 1 ... 1				Ograničenja snabdevanja (2)								
	1 1 ... 1				1 1 ... 1				...	1 1 ... 1					Ograničenja potražnje (3)							

U najvećem broju slučajeva, kapaciteti snabdevanja izvora (a_i) i potražnja destinacija (b_j), su celobrojne vrednosti, što dovodi do toga da su i količine koje se transportuju – distribuiraju (x_{ij}) celobrojne.

Zbog posebne strukture ograničenja (2) i (3), prikazane u Tabeli II-2, transportni problem ima sledeću osobinu:

Za transportne probleme, gde su svi kapaciteti snabdevanja izvora (a_i) i sve potražnje destinacija (b_j) celobrojne vrednosti, sve bazisne promenljive u

svakom dopustivom bazisnom rešenju (uključujući i optimalno) će biti celobrojne vrednosti. Procedure za rešavanje transportnog problema (opisane u narednom tekstu) rade samo sa dopustivim bazisnim rešenjima, što znači da će se automatski dobiti i celobrojno optimalno rešenje, tako da nije neophodno dodati ograničenja u modelu da (x_{ij}) mora imati celobrojne vrednosti.

Uslov $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ podrazumeva da su kapaciteti snabdevanja izvora jednaki

potražnji destinacija i takva vrsta transportnog problema se naziva zatvoreni transportni problem. *7 Ukoliko to nije slučaj radi se o otvorenom transportnom problemu. Moguća su dva slučaja otvorenog transportnog problema, prvi kada su kapaciteti snabdevanja izvora veći od potražnje destinacija i drugi kada je potražnja destinacija veća od kapaciteta snabdevanja izvora. *8

I slučaj - Kapaciteti snabdevanja veći od potražnje

U praksi je često slučaj da su kapaciteti snabdevanja (proizvodnja, kapaciteti skladišta) veći od potražnje, tj.:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j .$$

To praktično znači da će u nekim izvorima snabdevanja A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) ostati određena količina proizvoda koja ne može da se transportuje tj. model će imati istu funkciju cilja a skup ograničenja u obliku: *9

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} < a_i \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, m, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

što znači da je pored količina x_{ij} koje je potrebno transportovati iz A_i u B_j potrebno odrediti i količine (rezerve) koje ostaju u pojedinim izvorima snabdevanja.

U ovom slučaju, otvoreni model transportnog problema može se svesti na zatvoreni, tako što će se uvesti jedna dopunska (fiktivna) destinacija B_{n+1} čija je potražnja: *10

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j .$$

Optimalni plan transporta ovakvog zatvorenog transportnog problema, sa fiktivnom destinacijom, odgovara optimalnom planu transporta otvorenog modela. Na ovaj način se pored količina x_{ij} koje je potrebno transportovati mogu odrediti i one količine koje treba da ostanu u pojedinim izvorima.

Cena transporta iz bilo kog izvora snabdevanja A_i ($i=1, \dots, m$) do fiktivne destinacije B_{n+1} je jednaka nuli tj.: *11

$$c_{i,n+1} = 0 \quad \text{za } i=1, \dots, m.$$

II slučaj - Potražnja veća od kapaciteta snabdevanja

Takođe, moguće je da se dogodi da je potražnja destinacija veća od kapaciteta snabdevanja izvora. U tom slučaju ukupni kapaciteti snabdevanja izvora su manji od ukupne potražnje destinacija, tj.:

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j.$$

To praktično znači da će potražnja u nekim destinacijama B_j ($j=1, \dots, n$) ostati nezadovoljena. Ovaj slučaj otvorenog transportnog problema će takođe imati istu funkciju cilja a skup ograničenja u obliku: *9a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} < b_j \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

Slično kao i u prethodnom slučaju pored količina x_{ij} koje je potrebno transportovati iz A_i u B_j potrebno je odrediti i količine (nezadovoljena potražnja) koje nedostaju u pojedinim destinacijama.

U ovom slučaju otvoreni model transportnog problema može se svesti na zatvoreni, tako što će se uvesti jedan dopunski (fiktivni) izvor A_{m+1} čiji je kapacitet snabdevanja: *10a

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i.$$

Optimalni plan transporta ovakvog zatvorenog transportnog problema, sa fiktivnim izvorom, odgovara optimalnom planu transporta otvorenog modela. Na ovaj način se pored količina x_{ij} koje je potrebno transportovati mogu odrediti i one količine koje će predstavljati nezadovoljenu potražnju u pojedinim destinacijama.

Cena transporta iz fiktivnog izvora A_{m+1} do bilo koje destinacije B_j ($j = 1, 2, \dots, n$) je jednaka nuli tj.: *11a

$$c_{m+1,j} = 0 \quad \text{za } j = 1, 2, \dots, n.$$

Radni primer

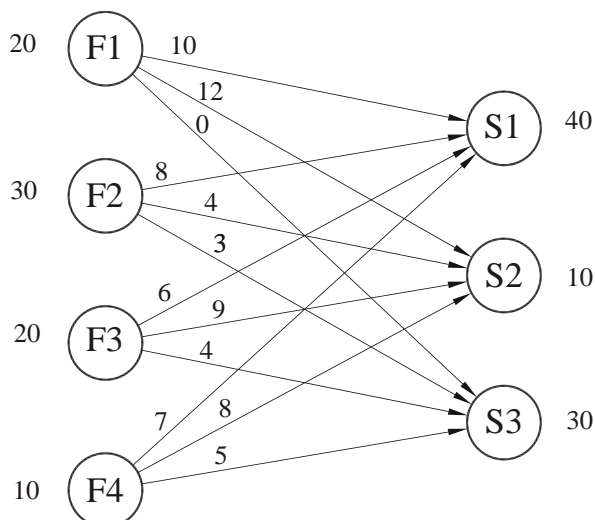
Jedan od glavnih proizvoda preduzeća P&T je konzervirano povrće (npr. grašak). Grašak se konzervira u četiri fabrike odakle se kamionima transportuje u tri distributivna centra. Pošto je cena transporta glavni trošak, menadžment preduzeća je doneo odluku da se izradi studija sa ciljem maksimalnog mogućeg smanjenja troškova transporta. Za narednu sezonu, napravljena je prognoza koliko će svaka fabrika proizvoditi konzerviranog graška kao i koji deo od ukupne proizvodnje treba da bude transportovan u svaki od distributivnih centara. Ovi podaci (izraženi preko broja napunjenih kamiona), zajedno sa cenom prevoza po kamionu za svaku kombinaciju fabrika – distributivni centar, prikazani su u tabeli II-3. Kao što se vidi potrebno je transportovati količinu konzerviranog graška koja staje u 80 kamiona. Problem se sastoji u određivanju takvog plana transporta (koju količinu transportovati iz koje fabrike u koji distributivni centar) koji će minimizirati ukupne troškove transporta.

Tabela II-3. Transportni podaci za preduzeće P&T.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)			Kapacitet snabdevanja
		Distributivni centar (Destinacija)			
		1	2	3	
Fabrika (Izvor)	1	10	12	0	20
	2	8	4	3	30
	3	6	9	4	20
	4	7	8	5	10
Potražnja		40	10	30	80

Potražnja=Kapacitet snabdevanja=80

Zanemarujući geografski raspored fabrika i distributivnih centara, uprošćeni grafički prikaz problema je dat na slici II-2. U koloni sa leve strane prikazane su fabrike sa odgovarajućim kapacitetima, dok su u koloni sa desne strane prikazani distributivni centri (skladišta) sa količinama koje mogu da prihvate. Strelice pokazuju moguće rute kretanja kamiona, dok broj pored svake strelice pokazuje cenu prevoza po kamionu na datoj ruti.



Slika II-2. Grafički prikaz transportnog problema preduzeća P&T.

Problem prikazan na slici II-2 je u osnovi zadatak linearnog programiranja tj. njegov specijalan slučaj – transportni problem. Formulacija modela je sledeća: neka F predstavlja ukupne transportne troškove i neka x_{ij} ($i = 1,2,3,4; j = 1,2,3$) predstavlja broj tovara (punih kamiona) koji se transportuju iz fabrike i u distributivni centar j . Drugim rečima cilj je izabrati vrednosti ovih 12 promenljivih (x_{ij}) tako da minimizuju funkciju cilja:

$$F = 10 \cdot x_{11} + 12 \cdot x_{12} + 0 \cdot x_{13} + 8 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{22} + 3 \cdot x_{23} + 6 \cdot x_{31} + 9 \cdot x_{32} + 4 \cdot x_{33} + 7 \cdot x_{41} + 8 \cdot x_{42} + 5 \cdot x_{43}$$

pri ograničenjima:

$$\begin{array}{rcccccccl} x_{11} + x_{12} + x_{13} & & & & & & & = 20 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} & & & & & & = 30 \\ & & x_{31} + x_{32} + x_{33} & & & & & = 20 \\ & & & x_{41} + x_{42} + x_{43} & & & & = 10 \\ x_{11} & + x_{21} & + x_{31} & + x_{41} & & & & = 40 \\ & x_{12} & + x_{22} & + x_{32} & + x_{42} & & & = 10 \\ & & x_{13} & + x_{23} & + x_{33} & + x_{43} & & = 30 \end{array}$$

i uslovima nenegativnosti:

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2,3,4; j = 1,2,3).$$

Procedura rešavanja

Transportni problem je specijalan slučaj zadatka linearnog programiranja. Specifičnost transportnog problema je u njegovom skupu ograničenja. Transportni problem je moguće rešavati simplex metodom ali je to veoma komplikovano zbog toga što u matrici ograničenja ima dosta nula.

Transportni problem je moguće rešiti različitim jednostavnim iterativnim algoritmima, koji se u svim slučajevima svode na preraspodelu količina koje se transportuju uz smanjenje ukupne cene transporta.

Ukupan broj nepoznatih x_{ij} kod zatvorenog modela transportnog problema je $m \cdot n$, dok je ukupan broj jednačina – ograničenja jednak $m+n$. Pokazuje se, sa obzirom na definiciju zatvorenog transportnog modela ($\sum a_i = \sum b_j$), da je rang sistema ograničenja jednak $r = m+n-1$ što znači da je **broj nezavisnih ograničenja za jedan manji od njihovog ukupnog broja**.

Pošto je rang sistema ograničenja $r = m+n-1$ to znači da rešenje transportnog problema postoji ako $m+n-1$ vrednosti x_{ij} budu veće od nule. *12

Ukoliko rešenje transportnog problema ima $m+n-1$ vrednosti $x_{ij} > 0$ naziva se *nedegenerisano* a ako je taj broj manji rešenje je *degenerisano*.

Postupak iznalaženja rešenja transportnog problema sastoji se uglavnom iz dva posebna dela. Prvi deo je iznalaženje *početnog bazisnog rešenja*, dok je drugi deo iznalaženje *optimalnog rešenja* na osnovu poboljšanja određenog početnog stanja. *13

Pošto su ograničenja (3) i (4) u obliku jednačina, primenom klasične simplex metode, za dobijanje početnog bazisnog rešenja potrebno je uvesti veštačke promenljive koje bi istovremeno bile i bazisne promenljive. Za dobijanje realnog bazisnog rešenja, svođenje veštačkih promenljivih na nulu, potreban je veliki broj iteracija. Umesto toga iznalaženje početnog bazisnog rešenja sastoji se u primeni heurističkih metoda za određivanje matrice nepoznatih $X=[x_{ij}]$, $x_{ij} > 0$, čiji elementi zadovoljavaju uslove definisane parametrima modela transportnog problema (Tabela II-2) tj. matricom troškova $C=[c_{ij}]$, kapacitetima snabdevanja a_i i potražnjom destinacija b_j .

Metode za iznalaženje početnog bazisnog rešenja:

- Metoda severozapadnog ugla,
- Metoda najmanjih troškova,
- Vogelova aproksimativna metoda,
- Metoda dvojnog prvenstva.

Metoda za iznalaženje optimalnog rešenja:

- Stepping-stone metoda,
- MODI metoda,
- Ford-Fulkersonova metoda (nije potrebno poznavanje početnog bazisnog rešenja),
- Metoda uslovno-optimalnih parova.

Gore pomenute metode, koristeći specifičnu strukturu sistema ograničenja transportnog problema, značajno skraćuju izračunavanje (vreme i broj operacija) u odnosu na klasičnu simplex metodu. Jednom rečju bilo koja kombinacija ovih metoda (za iznalaženje početnog bazisnog rešenja i iznalaženje optimalnog rešenja) naziva se *transportni simplex metod*. Tzv. transportni simplex metod se sastoji od *Inicijalizacije*, *Testa optimalnosti* i *Iteracija* (ako su potrebne). *14

Transportni simplex metod

Inicijalizacija

Cilj inicijalizacije je iznalaženje početnog bazisnog rešenja na osnovu usvojenog kriterijuma – metode.

Uopštena procedura za iznalaženje početnog bazisnog rešenja. Na početku, svi redovi (izvori) i sve kolone (destinacije) u simplex tabeli transportnog zadatka se razmatraju, tj. sve promenljive su kandidati da im se dodeli neka vrednost odnosno da postanu bazisne promenljive. *15

1. Iz redova i kolona koji su još uvek u razmatranju, bira se sledeća bazisna promenljiva tj. promenljiva kojoj će se dodeliti neka vrednost u skladu sa usvojenim kriterijumom.
2. Izabranoj bazisnoj promenljivoj se dodeljuje tačno ona vrednost koja je jednaka preostalom kapacitetu snabdevanja u datom redu ili nezadovoljenoj potražnji u datoj koloni (od ove dve vrednosti dodeljuje se manja).
3. Eliminisanje reda ili kolone iz daljeg razmatranja (eliminiše se red ili kolona sa manjim preostalim kapacitetom snabdevanja odnosno manjom nezadovoljenom potražnjom). Ukoliko red i kolona imaju istu preostalu vrednost kapaciteta snabdevanja odnosno nezadovoljene potražnje po pravilu se za eliminaciju bira red. Data kolona se kasnije koristi za obezbeđivanje degenerisane bazisne promenljive (bazisne promenljive čija je vrednost nula).
4. Ako je u razmatranju ostala samo jedna kolona ili samo jedan red, tada se postupak iznalaženja početnog bazisnog rešenja završava izborom svih preostalih promenljivih (one promenljive koje prethodno nisu izabrane za bazisne i one promenljive koje nisu eliminisane iz daljeg razmatranja eliminacijom njihovih kolona odnosno redova), u redu ili koloni, za bazisne. Bazisnim promenljivama se dodeljuju svi preostali kapaciteti snabdevanja u datom redu ili nezadovoljene potražnje u datoj koloni.

Određivanje početnog dopustivog bazisnog rešenja metodom: Severozapadnog ugla.

Počinje se izborom promenljive x_{11} kao prve bazisne promenljive (ona se nalazi u severozapadnom uglu simplex tabele). Uopšteno, ako je x_{ij} poslednja izabrana bazisna promenljiva, tada će $x_{i,j+1}$ (pomeranje za jednu kolonu desno) biti sledeći izbor za bazisnu promenljivu ako je u izvoru i ostala neraspoređena bilo koja količina (kapacitet snabdevanja). U suprotnom, $x_{i+1,j}$ je sledeći izbor za bazisnu promenljivu (pomeranje za jedan red dole). *16

Na početku, prvoj bazisnoj promenljivoj x_{11} se dodeljuje vrednost na osnovu sledećeg: upoređuje se kapacitet snabdevanja prve fabrike (a_1) sa potražnjom prvog distributivnog centra. Ako je $a_1 > b_1 \rightarrow x_{11} = b_1$ odnosno ako je $a_1 < b_1 \rightarrow x_{11} = a_1$. Konkretno:

$$a_1 = 20 < 40 = b_1 \rightarrow x_{11} = a_1 = 20. \text{ (tabela II-4)}$$

Na ovaj način je iscrpljen kapacitet snabdevanja prve fabrike – izvora i prvi red je eliminisan iz daljeg razmatranja.

Tabela II-4. Metod severozapadnog ugla – korak #1.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)				Kapacitet snabdevanja		
		Distributivni centar (Destinacija)						
		1	2	3				
Fabrika (Izvor)	1	10		12		0		20
		20						
	2	8		4		3		30
	3	6		9		4		20
	4	7		8		5		10
Potražnja		40		10		30		80

Prvi korak ostavlja nezadovoljenu potražnju prvog distributivnog centra u količini od $b'_1 = b_1 - a_1 = 40 - 20 = 20$ kamionskih tovara, što znači da je sledeći izbor za bazisnu promenljivu, promenljiva $x_{1+1,1} = x_{21}$. Pošto je $a_2 = 30 > 20 = b'_1 \rightarrow x_{21} = b'_1 = 20$ kamionskih tovara.

Dodeljivanjem vrednosti $x_{21} = 20$ zadovoljena je potražnja prvog distributivnog centra i prva kolona je eliminisana iz daljeg razmatranja, tabela II-5.

Tabela II-5. Metod severozapadnog ugla – korak #2.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)						Kapacitet snabdevanja
		Distributivni centar (Destinacija)						
		1		2		3		
Fabrika (Izvor)	1	10	20	12		0		20
	2	8	20	4		3		30
	3	6		9		4		20
	4	7		8		5		10
Potražnja		40		10		30		80

Drugi korak, prikazan u tabeli II-5, ostavlja neiskorišćen kapacitet snabdevanja druge fabrike u količini od $a'_2 = a_2 - b'_1 = 30 - 20 = 10$ kamionskih tovara tako da će sledeća bazisna promenljiva biti $x_{2,1+1} = x_{22}$. Kako je $b_2 = a'_2 = 10 \rightarrow x_{22} = 10$.

Preostali kapacitet snabdevanja drugog izvora (red 2) u količini od $a'_2 = 10$ je jednak potražnji drugog distributivnog centra (kolona 2) $b_2 = 10$. Dodeljivanjem vrednosti

$x_{22} = 10$ iscrpljen je kapacitet snabdevanja druge fabrike – izvora i drugi red je eliminisan iz daljeg razmatranja (izbor drugog reda za eliminaciju a ne druge kolone je u skladu sa preporukom 3 opšte procedure za iznalaženje početnog bazisnog rešenja), tabela II-6.

Tabela II-6. Metod severozapadnog ugla – korak #3.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)				Kapacitet snabdevanja		
		Distributivni centar (Destinacija)						
		1	2	3				
Fabrika (Izvor)	1	10		12		0		20
		20						
	2	8		4		3		30
		20		10				
	3	6		9		4		20
	4	7		8		5		10
Potražnja		40		10		30		80

Treći korak, prikazan u tabeli II-6, ostavlja nezadovoljenu potražnju drugog distributivnog centra u količini od $b'_2 = b_2 - a'_2 = 10 - 10 = 0$ kamionskih tovara tako da će sledeća (degenerisana) bazisna promenljiva biti $x_{2+1,2} = x_{32}$.

Kako je preostala potražnja drugog distributivnog centra $b'_2 = 0$ manja od kapaciteta snabdevanja treće fabrike $a_3 = 20$ odnosno $b'_2 < a_3 \rightarrow x_{32} = 0$, tabela II-7.

Tabela II-7. Metod severozapadnog ugla – korak #4.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)				Kapacitet snabdevanja		
		Distributivni centar (Destinacija)						
		1	2	3				
Fabrika (Izvor)	1	10		12		0		20
			20					
	2	8		4		3		30
			20		10			
	3	6		9		4		20
					0			
	4	7		8		5		10
Potražnja		40		10		30		80

Dodeljivanjem vrednosti $x_{32} = 0$ zadovoljena je potražnja drugog distributivnog centra i druga kolona je eliminisana iz daljeg razmatranja.

Pošto je u razmatranju ostala samo treća kolona tj. promenljive x_{33} i x_{43} a suma kapaciteta snabdevanja drugog i trećeg izvora – fabrike je jednaka potražnji trećeg distributivnog centra ($20 + 10 = 30$), to se obe preostale promenljive biraju za bazisne i dodeljuju im se vrednosti $x_{33} = 20$, $x_{43} = 10$.

Dodeljivanjem vrednosti promenljivama x_{33} i x_{43} kompletirana procedura iznalaženja dopustivog početnog bazisnog rešenja. Dopustivo početno bazisno rešenje prikazano je u tabeli II-8.

Tabela II-8. Metod severozapadnog ugla – *dopustivo početno bazisno rešenje*.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)			Kapacitet snabdevanja			
		Distributivni centar (Destinacija)						
		1	2	3				
Fabrika (Izvor)	1	10		12		0		20
			20					
	2	8		4		3		30
			20		10			
	3	6		9		4		20
					0		20	
	4	7		8		5		10
							10	
Potražnja		40		10		30		80

Brojevi u tabeli II-8 predstavljaju vrednosti bazisnih promenljivih dok su sve ostale promenljive (x_{12} , itd.) nebazisne i jednake nuli.

Vrednost funkcije cilja za dopustivo početno bazisno rešenje je:

$$F = 10 \cdot x_{11} + 8 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{22} + 9 \cdot x_{32} + 4 \cdot x_{33} + 5 \cdot x_{43}$$

$$F = 10 \cdot 20 + 8 \cdot 20 + 4 \cdot 10 + 9 \cdot 0 + 4 \cdot 20 + 5 \cdot 10 = \mathbf{530} \times 100 \text{ NJ}$$

Određivanje početnog dopustivog bazisnog rešenja metodom: **Najmanjih troškova**.

Metoda Severozapadnog ugla ne uzima u obzir troškove transporta. Primenom metode Severozapadnog ugla dopustiva početna bazisna rešenja se jednostavno dobijaju ali ukupni transportni troškovi mogu biti veoma veliki. Metoda Najmanjih troškova uzima u obzir troškove transporta da bi se dobilo dopustivo početno bazisno rešenje koje ima što manje ukupne transportne troškove. *17

Metoda najmanjih troškova zasniva se na iznalaženju promenljive x_{ij} kojoj odgovaraju najmanji transportni troškovi c_{ij} . Tada promenljiva x_{ij} postaje bazisna i dodeljuje joj se najveća moguća vrednost, a to je minimum od a_i – kapaciteta snabdevanja i-tog izvora i b_j – potražnje j-te destinacije.

Nakon toga se eliminiše red i ili kolona j i redukuje se kapacitet snabdevanja ili potražnja ne eliminisanog reda (izvora) ili kolone (destinacije) za vrednost x_{ij} . Od preostalih promenljivih, koje nisu u eliminisanom redu ili koloni, ponovo se bira ona sa najmanjim transportnim troškovima i celokupna procedura se ponavlja.

Tabela II-9. Metoda Minimalnih troškova – iteracija #1.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)				Kapacitet snabdevanja		
		Distributivni centar (Destinacija)						
		1	2	3				
Fabrika (Izvor)	1	10		12		0		20
						20		
	2	8		4		3		30
	3	6		9		4		20
	4	7		8		5		10
Potražnja		40		10		30		80

Kao što je prikazano u tabeli II-9 najmanji transportni trošak je $c_{13} = 0$, što znači da se za prvu bazisnu promenljivu bira promenljiva x_{13} kojoj se dodeljuje vrednost 20 ($x_{13} = 20$) $a_1 = 20 < 30 = b_3 \rightarrow x_{13} = a_1 = 20$ kamionskih tovara.

Dodeljivanjem vrednosti $x_{13} = 20$ iscrpljen je kapacitet snabdevanja prve fabrike – izvora i prvi red je eliminisan iz daljeg razmatranja, dok je potražnja trećeg distributivnog centra (destinacije) nezadovoljena u količini od $b'_3 = b_3 - x_{13} = 30 - 20 = 10$ kamionskih tovara.

Tabela II-10. Metoda Minimalnih troškova – iteracija #2.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)				Kapacitet snabdevanja	
		Distributivni centar (Destinacija)					
		1	2	3			
Fabrika (Izvor)	1	10		12		0	20
						20	
	2	8		4		3	30
						10	
	3	6		9		4	20
	4	7		8		5	10
Potražnja		40		10		30	80

Novi minimalni transportni troškovi su $c_{23} = 3$, tako da se za novu bazisnu promenljivu bira promenljiva x_{23} i dodeljuje joj se vrednost 10 ($x_{23} = 10$), jer je $b'_3 = 10 < 30 = a_2 \rightarrow x_{23} = b'_3 = 10$, čime se eliminiše kolona 3 iz daljeg razmatranja.

Dodeljivanjem vrednosti $x_{23} = 10$ zadovoljena je potražnja trećeg distributivnog centra (destinacije), dok je preostali kapacitet snabdevanja druge fabrike – izvora jednak $a'_2 = a_2 - x_{23} = 30 - 10 = 20$ kamionskih tovara, tabela II-10.

Tabela II-11. Metoda Minimalnih troškova – iteracija #3.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)						Kapacitet snabdevanja
		Distributivni centar (Destinacija)						
		1		2		3		
Fabrika (Izvor)	1	10		12		0		20
							20	
	2	8		4		3		30
					10		10	
	3	6		9		4		20
	4	7		8		5		10
Potražnja		40		10		30		80

Od preostalih promenljivih u razmatranju, najmanji transportni trošak ima promenljiva x_{22} ($c_{22} = 4$) kojoj se dodeljuje vrednost 10 ($x_{22} = 10$), jer je $a'_2 = 20 > b_2 = 10 \rightarrow x_{22} = b_2 = 10$, čime se eliminiše kolona 2 iz daljeg razmatranja.

Dodeljivanjem vrednosti $x_{22} = 10$ zadovoljena je potražnja drugog distributivnog centra (destinacije), dok je preostali kapacitet snabdevanja druge fabrike – izvora jednak $a''_2 = a'_2 - x_{22} = 20 - 10 = 10$ kamionskih tovara, tabela II-11.

Suma kapaciteta snabdevanja fabrike – izvora 3 i 4 kao i preostali kapacitet snabdevanja druge fabrike – izvora je jednak potražnji prvog distributivnog centra – destinacije ($20+10+10 = 40$), što znači da se sve tri preostale promenljive biraju za bazisne i dodeljuju im se vrednosti $x_{12} = 10$, $x_{13} = 20$, $x_{14} = 10$.

Dodeljivanjem vrednosti promenljivama x_{12} , x_{13} i x_{14} kompletirana procedura iznalaženja dopustivog početnog bazisnog rešenja. Dopustivo početno bazisno rešenje prikazano je u tabeli II-12.

Tabela II-12. Metoda Minimalnih troškova – dopustivo početno bazisno rešenje.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)			Kapacitet snabdevanja
		Distributivni centar (Destinacija)			
		1	2	3	
Fabrika (Izvor)	1	10	12	0	20
				20	
	2	8	4	3	30
		10	10	10	
	3	6	9	4	20
		20			
	4	7	8	5	10
		10			
Potražnja	40	10	30	80	

Brojevi u tabeli II-12 predstavljaju vrednosti bazisnih promenljivih dok su sve ostale promenljive (x_{12} , itd.) nebazisne i jednake nuli.

Vrednost funkcije cilja za dopustivo početno bazisno rešenje je:

$$F = 0 \cdot x_{13} + 8 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{22} + 3 \cdot x_{23} + 6 \cdot x_{31} + 7 \cdot x_{41}$$

$$F = 0 \cdot 20 + 8 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 10 = \mathbf{340} \times 100 \text{ NJ}$$

Test optimalnosti

Standardni test optimalnosti simplex metode može da se redukuje, u slučaju transportnog problema, na sledeći način:

Test optimalnosti: Dopustivo bazisno rešenje je optimalno ako i samo ako $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ za svako (i, j) takvo da je x_{ij} nebazisna promenljiva. *18

Što znači, da jedino što treba uraditi kod testa optimalnosti je izračunavanje vrednosti u_i i v_j za tekuće dopustivo bazisno rešenje kao i izračunavanje izraza $c_{ij} - u_i - v_j$, na način opisan u narednom tekstu.

U slučaju **bazisnih** promenljivih x_{ij} , zahteva se da izrazi $c_{ij} - u_i - v_j$ budu jednaki nuli, tako da veličine u_i i v_j moraju da zadovolje sistem jednačina:

$$c_{ij} = u_i + v_j \text{ za svako } (i, j) \text{ takvo da je } x_{ij} \text{ bazisna promenljiva.}$$

Pošto transportni problem ima $m + n - 1$ bazisnih promenljivih, to znači da ima i $m + n - 1$ ovih jednačina. Kako je broj nepoznatih (u_i i v_j) $m + n$, jednoj od ovih veličina može se dodeliti proizvoljna vrednost. Izbor te jedne veličine i vrednosti koja će joj se dodeliti ne utiče ni na jedan izraz $c_{ij} - u_i - v_j$ čak iako je x_{ij} nebazisna promenljiva, jedino neznatno utiče na komplikovanost rešavanja sistema jednačina. Pogodan izbor za ovu priliku je neka od veličina u_i i v_j čiji red odnosno kolona ima najviše bazisnih

promenljivih. Izabranom veličini se dodeljuje po pravilu vrednost nula. Zbog jednostavne strukture sistema jednačina, veoma je jednostavno algebarski odrediti vrednosti ostalih veličina u_i i v_j . *19

Test optimalnosti će biti primenjen na početno dopustivo bazisno rešenje dobijeno primenom metode Severozapadnog ugla. Svako bazisnoj promenljivoj x_{ij} se dodeljuje jedna jednačina, tako da je sistem jednačina oblika:

$$\begin{array}{ll} u_1 + v_1 = 10 & \text{za } v_1 = 0, \rightarrow u_1 = 10 \\ u_2 + v_1 = 8 & u_2 = 8 \\ u_2 + v_2 = 4 & \text{za } u_2 = 8, \rightarrow v_2 = -4 \\ u_3 + v_2 = 9 & \text{za } v_2 = -4, \rightarrow u_3 = 13 \\ u_3 + v_3 = 4 & \text{za } u_3 = 13, \rightarrow v_3 = -9 \\ u_4 + v_3 = 5 & \text{za } v_3 = -9, \rightarrow u_4 = 14 \end{array}$$

Pošto su određene vrednosti veličina u_i i v_j , može se primeniti test optimalnosti izračunavajući $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ za sve **nebazisne** promenljive:

$$\begin{array}{l} d_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 12 - 10 - (-4) = 6 \\ d_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 0 - 10 - (-9) = -1 \\ d_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 3 - 8 - (-9) = 4 \\ d_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 6 - 13 - 0 = -7 \\ d_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = 7 - 14 - 0 = -7 \\ d_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 8 - 14 - (-4) = -2 \end{array}$$

Pošto četiri od ovih promenljivih (d_{13} , d_{31} , d_{41} i d_{42}) su negativne, zaključak je da tekuće dopustivo bazisno rešenje nije optimalno. Iz tog razloga sledeći korak transportnog simplex metoda je poboljšanje dopustivog bazisnog rešenja kroz iterativni postupak.

Iteracije

Kao i kod klasičnog simplex metoda, iteracijama u transportnom simplex metodu određuju se: promenljive koje ulaze u bazu (korak 1), promenljive koje napuštaju bazu (korak 2) kao i rezultujuće novo dopustivo bazisno rešenje (korak 3).

Iteracija #1

Korak 1. Kako d_{ij} predstavlja brzinu kojom će se funkcija cilja menjati ako se nebazisna promenljiva x_{ij} povećava, to promenljiva koja ulazi u bazu mora da ima negativnu vrednost za d_{ij} da bi se smanjili ukupni transportni troškovi F . Kandidati za promenljivu koja ulazi u bazu su x_{13} , x_{31} , x_{41} i x_{42} . Od postojećih promenljivih – kandidata, za novu bazisnu promenljivu, bira se ona promenljiva koja ima najveću (po

apsolutnoj vrednosti) negativnu vrednost d_{ij} . Ako više kandidata ima istu najveću (po apsolutnoj vrednosti) negativnu vrednost d_{ij} (kao x_{31} i x_{41}), ona sa najmanjom vrednošću c_{ij} se bira za novu bazisnu promenljivu, što je u ovom slučaju promenljiva x_{31} . *20

Promenljiva koja ulazi u bazu u prvoj iteraciji je x_{31} .

Korak 2. Povećanje vrednosti nove bazisne promenljive, od nule, pokreće lančanu reakciju kompenzujućih promena kod drugih bazisnih promenljivih, u cilju očuvanja zadovoljavanja ograničenja potražnje i kapaciteta snabdevanja. Prva bazisna promenljiva koja se smanji na nulu postaje promenljiva koja napušta bazu. *21

Sa x_{31} kao novom bazisnom promenljivom, lančana reakcija je prikazana u tabeli II-13. Povećanje x_{31} ($x_{31} = \theta$) zahteva smanjenje x_{21} za istu vrednost da bi se održalo ograničenje potražnje u prvoj koloni (prvog distributivnog centra) od 40 kamionskih tovara tj. $x_{21} = 20 - \theta$. Ova promena dalje zahteva povećanje promenljive x_{22} za istu vrednost da bi se održalo ograničenje kapaciteta snabdevanja u drugom redu (druge fabrike) od 30 kamionskih tovara tj. $x_{22} = 10 + \theta$. Prethodna promena dalje zahteva smanjenje x_{32} za isti iznos da bi se održalo ograničenje potražnje u drugoj koloni (drugog distributivnog centra) od 10 kamionskih tovara tj. $x_{32} = 0 - \theta$. Ovo smanjenje x_{32} uspešno završava lančanu reakciju zato što takođe održava i ograničenje kapaciteta snabdevanja u trećem redu (treća fabrika) od 20 kamionskih tovara. (Ekvivalentno lančana reakcija je mogla da se uspostavi i obrnutim putem tj. smanjenjem x_{32} , pa zatim povećanjem x_{22} i na kraju smanjenjem x_{21}).

Tabela II-13. Lančana reakcija izazvana povećanjem vrednosti promenljive x_{31} .

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)			Kapacitet snabdevanja	
		Distributivni centar (Destinacija)				
		1	2	3		
Fabrika (Izvor)	1	10	12	0	20	
		20				
	2	8	$-\theta$	$4 \rightarrow +\theta$	3	30
		20		10		
	3	6	\uparrow	$9 \leftarrow -\theta$	\downarrow 4	20
		$+\theta$		0	20	
	4	7	8	5	10	
				10		
Potražnja		40	10	30	80	

Rezultat: ćelije (3, 1) i (2, 2) postaju „ćelije primaoci“, svaka od njih prima dodatnu količinu od „ćelije davaoca“ (2, 1) i (3, 2). Ove ćelije su u tabeli II-13 označene znakovima plus i minus.

VAŽNO: osim promenljive koja ulazi u bazu, sve ćelije primaoci i sve ćelije davaoci u lančanoj reakciji moraju se podudarati sa bazisnim promenljivama u tekućem dopustivom bazisnom rešenju. Uopšteno, uvek postoji bar jedna lančana reakcija (u bilo kom pravcu) koja može uspešno da se završi a da se pri tom ne naruše ograničenja potražnje i kapaciteta snabdevanja, pri povećanju vrednosti nove bazisne promenljive.

Promenljiva koja napušta bazu se određuje iz sledećeg sistema jednačina:

$$x_{21} = 20 - \theta \quad x_{22} = 10 + \theta \quad x_{32} = 0 - \theta$$

odakle se može odrediti koja bazisna promenljiva će prva postati jednaka nuli pri povećanju vrednosti θ tj. povećanju nove bazisne promenljive $x_{31} = \theta$.

U ovom slučaju vrednost za θ mora biti jednaka nuli, zato što ako bi se bilo koji pozitivan dodelio θ to bi narušilo uslov nenegativnosti za promenljivu x_{32} . Konačno, promenljiva koja napušta bazu biće x_{32} i $\theta = 0$.

Korak 3.

Promenljiva koja ulazi u bazu će imati vrednost $x_{31} = \theta = 0$ a promenljive x_{21} i x_{22} će imati iste vrednosti kao i pre tj. 20 i 10 respektivno.

$$x_{21} = 20 - \theta = 20 - 0 = 20; \quad x_{22} = 10 + \theta = 10 + 0 = 10.$$

Vrednost funkcije cilja F ostaje ista jer se novoj bazisnoj promenljivoj nije dodelila pozitivna vrednost tj.:

$$F = 10 \cdot x_{11} + 8 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{22} + 6 \cdot x_{31} + 4 \cdot x_{33} + 5 \cdot x_{43}$$

$$F = 10 \cdot 20 + 8 \cdot 20 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 0 + 4 \cdot 20 + 5 \cdot 10 = \mathbf{530} \times 100 \text{ NJ}$$

Novo dopustivo bazisno rešenje prikazano je u tabeli II-14.

Tabela II-14. Novo dopustivo bazisno rešenje. Iteracija # 1.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)			Kapacitet snabdevanja
		Distributivni centar (Destinacija)			
		1	2	3	
Fabrika (Izvor)	1	10	12	0	20
		20			
	2	8	4	3	30
		20	10		
	3	6	9	4	20
		0		20	
	4	7	8	5	10
				10	
Potražnja		40	10	30	80

Test optimalnosti

Test optimalnosti za novo dopustivo bazisno rešenje, dobijeno Iteracijom #1, podrazumeva sledeće:

– za bazisne promenljive sistem jednačina se postavlja kao:

$$\begin{array}{ll} u_1 + v_1 = 10 & u_3 + v_1 = 6 \\ u_2 + v_1 = 8 & u_3 + v_3 = 4 \\ u_2 + v_2 = 4 & u_4 + v_3 = 5 \end{array}$$

izborom $v_1 = 0$, vrednosti ostalih veličina su: $v_2 = -4$, $v_3 = -2$, $u_1 = 10$, $u_2 = 8$, $u_3 = 6$ i $u_4 = 7$.

– za sve nebazisne promenljive izrazi $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ imaju sledeće vrednosti:

$$\begin{array}{l} d_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 12 - 10 - (-4) = 6 \\ d_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 0 - 10 - (-2) = -8 \\ d_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 3 - 8 - (-2) = -3 \\ d_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 9 - 6 - (-4) = 7 \\ d_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = 7 - 7 - 0 = 0 \\ d_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 8 - 7 - (-4) = 5 \end{array}$$

Pošto su dve od ovih promenljivih (d_{13} i d_{23}) negativne, zaključak je da tekuće dopustivo bazisno rešenje nije optimalno. Zbog toga je potrebno izvesti novu iteraciju u cilju dobijanja boljeg dopustivog bazisnog rešenja.

Iteracija #2

Korak 1. Najveća negativna vrednost d_{ij} (po apsolutnoj vrednosti) je za promenljivu x_{13} ($d_{13} = -8$), tako da promenljiva koja ulazi u bazu u drugoj iteraciji je x_{13} .

Korak 2. Lančana reakcija izazvana povećanjem nove bazisne promenljive x_{13} je prikazana u tabeli II-15.

Tabela II-15. Lančana reakcija izazvana povećanjem vrednosti promenljive x_{13} .

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)					Kapacitet snabdevanja	
		Distributivni centar (Destinacija)						
		1	2	3				
Fabrika (Izvor)	1	10	$-\theta$	12		0		20
			20				$+\theta$	
	2	8		4		3		30
			20		10			
	3	6	$+\theta$	9		4	$-\theta$	20
			0				20	
	4	7		8		5		10
							10	
Potražnja		40		10		30		80

Promenljiva koja napušta bazu dobija se iz sledećeg sistema jednačina:

$$x_{11} = 20 - \theta \quad x_{31} = 0 + \theta \quad x_{33} = 20 - \theta.$$

U ovom slučaju vrednost za θ može maksimalno biti 20, zato što tada promenljive x_{11} i x_{33} postaju jednake nuli. U skladu sa gornjim sistemom jednačina bilo koja od promenljivih x_{11} i x_{33} mogu da budu promenljive koje napuštaju bazu. Za promenljivu koja napušta bazu izabrana je promenljiva x_{33} i $\theta = 20$.

Korak 3.

Promenljiva koja ulazi u bazu će imati vrednost $x_{13} = \theta = 20$ dok će promenljive x_{11} , x_{31} i x_{33} imati sledeće vrednosti:

$$x_{11} = 20 - \theta = 20 - 20 = 0$$

$$x_{31} = 0 + \theta = 0 + 20 = 20$$

$$x_{33} = 20 - \theta = 20 - 20 = 0.$$

Vrednost funkcije cilja F za novi plan transporta tj. novo dopustivo bazisno rešenje je:

$$F = 10 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{13} + 8 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{22} + 6 \cdot x_{31} + 5 \cdot x_{43}$$

$$F = 10 \cdot 0 + 0 \cdot 20 + 8 \cdot 20 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 20 + 5 \cdot 10 = \mathbf{370} \times 100 \text{ NJ}$$

Novo dopustivo bazisno rešenje prikazano je u tabeli II-16.

Tabela II-16. Novo dopustivo bazisno rešenje. Iteracija # 2.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)			Kapacitet snabdevanja			
		Distributivni centar (Destinacija)						
		1	2	3				
Fabrika (Izvor)	1	10		12		0		20
			0				20	
	2	8		4		3		30
			20		10			
	3	6		9		4		20
			20					
	4	7		8		5		10
							10	
Potražnja		40		10		30		80

Test optimalnosti

Test optimalnosti za novo dopustivo bazisno rešenje, dobijeno Iteracijom #2, podrazumeva sledeće:

– za bazisne promenljive sistem jednačina se postavlja kao:

$$u_1 + v_1 = 10 \quad u_2 + v_2 = 4$$

$$u_1 + v_3 = 0 \quad u_3 + v_1 = 6$$

$$u_2 + v_1 = 8 \quad u_4 + v_3 = 5$$

izborom $v_1 = 0$, vrednosti ostalih promenljivih su: $v_2 = -4$, $v_3 = -10$, $u_1 = 10$, $u_2 = 8$, $u_3 = 6$ i $u_4 = 15$.

– za sve nebazisne promenljive izrazi $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ imaju sledeće vrednosti:

$$d_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 12 - 10 - (-4) = 6$$

$$d_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 3 - 8 - (-10) = 5$$

$$d_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 9 - 6 - (-4) = 7$$

$$d_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 4 - 6 - (-10) = 8$$

$$d_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = 7 - 15 - 0 = -8$$

$$d_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 8 - 15 - (-4) = -3$$

Pošto su dve od ovih promenljivih (d_{41} i d_{42}) negativne, zaključak je da tekuće dopustivo bazisno rešenje nije optimalno. Zbog toga je potrebno izvesti novu iteraciju u cilju dobijanja boljeg dopustivog bazisnog rešenja.

Iteracija #3

Korak 1. Najveća negativna vrednost d_{ij} (po apsolutnoj vrednosti) je za promenljivu x_{41} ($d_{41} = -8$), tako da promenljiva koja ulazi u bazu u trećoj iteraciji je x_{41} .

Korak 2. Lančana reakcija izazvana povećanjem nove bazisne promenljive x_{41} je prikazana u tabeli II-17.

Tabela II-17. Lančana reakcija izazvana povećanjem vrednosti promenljive x_{41} .

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)				Kapacitet snabdevanja	
		Distributivni centar (Destinacija)					
		1	2	3			
Fabrika (Izvor)	1	10	$-\theta$	12	0	$+\theta$	20
			\leftarrow			\rightarrow	
			0			20	
	2	8		4	3		30
			20	10			
	3	6		9	4		20
			20				
	4	7		8	5	$-\theta$	10
		$+\theta$			\rightarrow	10	
Potražnja		40	10	30			80

Promenljiva koja napušta bazu dobija se iz sledećeg sistema jednačina:

$$x_{11} = 0 - \theta \quad x_{13} = 20 + \theta \quad x_{43} = 10 - \theta.$$

U ovom slučaju vrednost za θ mora biti jednaka nuli, zato što ako bi se bilo koji pozitivan dodelio θ to bi narušilo uslov nenegativnosti za promenljivu x_{11} . Konačno, promenljiva koja napušta bazu biće x_{11} i $\theta = 0$.

Korak 3.

Promenljiva koja ulazi u bazu će imati vrednost $x_{41} = \theta = 0$ dok će promenljive x_{11} , x_{13} i x_{43} imati sledeće vrednosti:

$$x_{11} = 0 - \theta = 0 - 0 = 0$$

$$x_{13} = 20 + \theta = 20 + 0 = 20$$

$$x_{43} = 10 - \theta = 10 - 0 = 10.$$

Vrednost funkcije cilja F ostaje ista jer se novoj bazisnoj promenljivoj nije dodelila pozitivna vrednost tj.:

$$F = 0 \cdot x_{13} + 8 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{22} + 6 \cdot x_{31} + 5 \cdot x_{41} + 5 \cdot x_{43}$$

$$F = 0 \cdot 20 + 8 \cdot 20 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 0 + 5 \cdot 10 = \mathbf{370} \times 100 \text{ NJ}$$

Novo dopustivo bazisno rešenje prikazano je u tabeli II-18.

Tabela II-18. Novo dopustivo bazisno rešenje. Iteracija # 3.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)						Kapacitet snabdevanja
		Distributivni centar (Destinacija)						
		1		2		3		
Fabrika (Izvor)	1	10		12		0		20
							20	
	2	8		4		3		30
			20		10			
	3	6		9		4		20
			20					
	4	7		8		5		10
			0				10	
Potražnja		40		10		30		80

Test optimalnosti

Test optimalnosti za novo dopustivo bazisno rešenje, dobijeno Iteracijom #3, podrazumeva sledeće:

– za bazisne promenljive sistem jednačina se postavlja kao:

$$u_1 + v_3 = 0 \quad u_3 + v_1 = 6$$

$$u_2 + v_1 = 8 \quad u_4 + v_1 = 7$$

$$u_2 + v_2 = 4 \quad u_4 + v_3 = 5$$

izborom $v_1 = 0$, vrednosti ostalih promenljivih su: $v_2 = -4$, $v_3 = -2$, $u_1 = 2$, $u_2 = 8$, $u_3 = 6$ i $u_4 = 7$.

– za sve nebazisne promenljive izrazi $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ imaju sledeće vrednosti:

$$d_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 10 - 2 - 0 = 8$$

$$d_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 12 - 2 - (-4) = 14$$

$$d_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 3 - 8 - (-2) = -3$$

$$d_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 9 - 6 - (-4) = 7$$

$$d_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 4 - 6 - (-2) = 0$$

$$d_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 8 - 7 - (-4) = 5$$

Pošto je jedna od ovih promenljivih (d_{23}) negativna, zaključak je da tekuće dopustivo bazisno rešenje nije optimalno. Zbog toga je potrebno izvesti novu iteraciju u cilju dobijanja boljeg (optimalnog) dopustivog bazisnog rešenja.

Iteracija #4

Korak 1. Jedina negativna vrednost d_{ij} je za promenljivu x_{23} , ($d_{23} = -3$) tako da je nova promenljiva koja ulazi u bazu za četvrtu iteraciju x_{23} .

Korak 2. Lančana reakcija izazvana povećanjem nove bazisne promenljive x_{23} je prikazana u tabeli II-19.

Tabela II-19. Lančana reakcija izazvana povećanjem vrednosti promenljive x_{23} .

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)				Kapacitet snabdevanja
		Distributivni centar (Destinacija)				
		1	2	3		
Fabrika (Izvor)	1	10	12	0	20	20
	2	8 ↓ 20 ↓ +θ	4 ← 10 → 8 → 0	3 → +θ ↓ 5 → -θ ↓ 10		30
	3	6	9	4		20
	4	7	8	5		10
	Potražnja	40	10	30		80

Promenljiva koja napušta bazu dobija se iz sledećeg sistema jednačina:

$$x_{21} = 20 - \theta \quad x_{41} = 0 + \theta \quad x_{43} = 10 - \theta.$$

U ovom slučaju vrednost za θ može maksimalno biti 10, zato što tada promenljiva x_{43} postaje jednaka nuli. U skladu sa gornjim sistemom jednačina samo promenljiva x_{43} može da bude promenljiva koje napuštaju bazu. Konačno promenljiva koja napušta bazu je x_{43} i $\theta = 10$.

Korak 3.

Promenljiva koja ulazi u bazu će imati vrednost $x_{23} = \theta = 10$ dok će promenljive x_{21} , x_{41} i x_{43} imati sledeće vrednosti:

$$x_{21} = 20 - \theta = 20 - 10 = 10$$

$$x_{41} = 0 + \theta = 0 + 10 = 10$$

$$x_{43} = 10 - \theta = 10 - 10 = 0.$$

Vrednost funkcije cilja F za novi plan transporta tj. novo dopustivo bazisno rešenje je:

$$F = 0 \cdot x_{13} + 8 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{22} + 3 \cdot x_{23} + 3 \cdot x_{31} + 7 \cdot x_{41}$$

$$F = 0 \cdot 20 + 8 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 10 = \mathbf{340} \times 100 \text{ NJ}$$

Novo dopustivo bazisno rešenje prikazano je u tabeli II-20.

Tabela II-20. Novo dopustivo bazisno rešenje. Iteracija # 4.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)			Kapacitet snabdevanja
		Distributivni centar (Destinacija)			
		1	2	3	
Fabrika (Izvor)	1	10	12	0	20
				20	
	2	8	4	3	30
		10	10	10	
	3	6	9	4	20
		20			
	4	7	8	5	10
		10			
Potražnja		40	10	30	80

Test optimalnosti

Test optimalnosti za novo dopustivo bazisno rešenje, dobijeno Iteracijom #4, podrazumeva sledeće:

– za bazisne promenljive sistem jednačina se postavlja kao:

$$u_1 + v_3 = 0 \quad u_2 + v_3 = 3$$

$$u_2 + v_1 = 8 \quad u_3 + v_1 = 6$$

$$u_2 + v_2 = 4 \quad u_4 + v_1 = 7$$

izborom $u_2 = 0$, vrednosti ostalih promenljivih su: $v_1 = 8$, $v_2 = 4$, $v_3 = 3$, $u_1 = -3$, $u_3 = -2$ i $u_4 = -1$.

– za sve nebazisne promenljive izrazi $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ imaju sledeće vrednosti:

$$d_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 10 - (-3) - 8 = 5$$

$$d_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 12 - (-3) - 4 = 11$$

$$d_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 9 - (-2) - 4 = 7$$

$$d_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 4 - (-2) - 3 = 3$$

$$d_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 8 - (-1) - 4 = 5$$

$$d_{43} = c_{43} - u_4 - v_3 = 5 - (-1) - 3 = 3$$

Pošto su sve vrednosti za d_{ij} pozitivne, zaključak je da je tekuće dopustivo bazisno rešenje **optimalno**.

Optimalnom planu transporta između fabrika (izvora) i distributivnih centara (destinacija), prikazanom u tabeli II-20, odgovaraju minimalni ukupni troškovi transporta u iznosu od: **340** $\times 100$ NJ.

Optimalni plan transporta je isti kao i početno dopustivo bazisno rešenje dobijeno metodom Najmanjih troškova.

U narednom tekstu biće prikazan postupak rešavanja otvorenog transportnog problema.

Radni primer - kapaciteti snabdevanja veći od potražnje

Postavka zadatka je praktično ista kao i u prethodnom slučaju, tj. grašak se konzervira u četiri fabrike ($m=4$) odakle se kamionima transportuje u tri distributivna centra ($n=3$). Proizvodnja u fabrikama ostaje ista dok se potražnja u jednom od distributivnih centara smanjila. Količine konzerviranog graška koje svaka od fabrika proizvodi kao i potražnje pojedinih distributivnih centara (izraženi preko broja napunjenih kamiona), zajedno sa cenom prevoza po kamionu za svaku kombinaciju fabrika – distributivni centar, prikazani su u tabeli II-21.

Tabela II-21. Transportni podaci za preduzeće P&T, kapaciteti snabdevanja veći od potražnje.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)			Kapacitet snabdevanja
		Distributivni centar (Destinacija)			
		1	2	3	
Fabrika (Izvor)	1	10	12	0	20
	2	8	4	3	30
	3	6	9	4	20
	4	7	8	5	10
Potražnja		35	10	30	

Potražnja=75 kamiona

Kapacitet snabdevanja=80 kamiona

Problem se, kao i u prethodnom slučaju, sastoji u određivanju takvog plana transporta (koju količinu transportovati iz koje fabrike u koji distributivni centar) koji će minimizirati ukupne troškove transporta.

Kao što se iz tabele II-21 vidi ukupni kapacitet snabdevanja iznosi 80 kamiona konzerviranog graška, dok je ukupna potražnja distributivnih centara jednaka 70 kamiona konzerviranog graška. Pošto ukupni kapacitet snabdevanja nije jednak potražnji distributivnih centara ovde je reč o otvorenom transportnom problemu.

Da bi se otvoreni transportni problem mogao rešavati potrebno ga je svesti na zatvoreni transportni problem, tako što se u ovom slučaju uvodi fiktivna destinacija u koju se fiktivno transportuje višak kapaciteta snabdevanja. U stvari ta količina robe koja se transportuje u fiktivnu destinaciju predstavlja količinu robe koja ostaje u datom izvoru snabdevanja.

Na osnovu prethodnog, uvodi se fiktivna destinacija B_4 ($n+1=3+1$) čija je potražnja jednaka $b_4 = 5$ ($80 - 75 = 5$) kamiona dok je cena transporta iz bilo kog izvora snabdevanja u do fiktivne destinacije B_4 jednaka nuli tj. $c_{i,4} = 0$ ($i=1,2,3,4$). Na ovaj način, originalni otvoreni transportni problem je sveden na fiktivni zatvoreni transportni problem čiji su parametri prikazani u tabeli II-22.

Tabela II-22. Parametri svedenog (fiktivnog) transportnog problema preduzeća P&T.

	Cena transporta po kamionu (×100 NJ)				Kapacitet snabdevanja	
	Distributivni centar (Destinacija)					
	1	2	3	4 (fiktivna)		
Fabrika (Izvor)	1	10	12	0	0	20
	2	8	4	3	0	30
	3	6	9	4	0	20
	4	7	8	5	0	10
Potražnja		35	10	30	5	80

Postavka zadatka je sledeća: minimizovati funkciju cilja

$$F = 10 \cdot x_{11} + 12 \cdot x_{12} + 0 \cdot x_{13} + 0 \cdot x_{14} + 8 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{22} + 3 \cdot x_{23} + 0 \cdot x_{24} + 6 \cdot x_{31} + 9 \cdot x_{32} + 4 \cdot x_{33} + 0 \cdot x_{34} + 7 \cdot x_{41} + 8 \cdot x_{42} + 5 \cdot x_{43} + 0 \cdot x_{44}$$

pri ograničenjima:

$$\begin{array}{rcl}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & & = 20 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & = 30 \\
 & & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 20 \\
 & & & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 10 \\
 x_{11} & + x_{21} & + x_{31} & + x_{41} & = 35 \\
 & x_{12} & + x_{22} & + x_{32} & + x_{42} & = 10 \\
 & & x_{13} & + x_{23} & + x_{33} & + x_{43} & = 30 \\
 & & & x_{14} & + x_{24} & + x_{34} & + x_{44} & = 5
 \end{array}$$

i uslovima nenegativnosti:

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4).$$

Za rešavanje gore postavljenog transportnog problema se koristi transportni simpleks metod.

Prvi korak u rešavanju je **određivanje početnog dopustivog bazisnog rešenja**. Izgled početnog dopustivog bazisnog rešenja, primenom metode najmanjih troškova, prikazan je u tabeli II-23.

Tabela II-23. Početno dopustivo bazisno rešenje. Metoda najmanjih torškova.

	Cena transporta po kamionu (×100 NJ)								Kapacitet snabdevanja
	Distributivni centar (Destinacija)								
	1		2		3		4 (fiktivna)		
Fabrika (Izvor)	1	10		12		0		0	20
						20			
	2	8		4		3		0	30
		5		10		10		5	
	3	6		9		4		0	20
		20							
	4	7		8		5		0	10
		10							
Potražnja	35		10		30		5		80

Vrednost funkcije cilja za dopustivo početno bazisno rešenje je:

$$F = 0 \cdot x_{13} + 8 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{22} + 3 \cdot x_{23} + 0 \cdot x_{24} + 6 \cdot x_{31} + 7 \cdot x_{41}$$

$$F = 0 \cdot 20 + 8 \cdot 5 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 0 \cdot 5 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 10 = \mathbf{300} \times 100 \text{ NJ}$$

Test optimalnosti za na početno dopustivo bazisno rešenje.

Svakoј bazisnoj promenljivoј x_{ij} se dodeljuje jedna jednačina, tako da je sistem jednačina oblika:

$$u_1 + v_3 = 0 \quad \text{za } v_3 = 3, \rightarrow u_1 = -3$$

$$u_2 + v_1 = 8 \quad \text{za } u_2 = 0, \rightarrow v_1 = 8$$

$$u_2 + v_2 = 4 \quad \text{za } u_2 = 0, \rightarrow v_2 = 4$$

$$u_2 + v_3 = 3 \quad \text{za } u_2 = 0, \rightarrow v_3 = 3$$

$$u_2 + v_4 = 0 \quad \text{za } u_2 = 0, \rightarrow v_4 = 0$$

$$u_3 + v_1 = 6 \quad \text{za } v_1 = 8, \rightarrow u_3 = -2$$

$$u_4 + v_1 = 5 \quad \text{za } v_1 = 8, \rightarrow u_4 = -1$$

Pošto su određene vrednosti veličina u_i i v_j , može se primeniti test optimalnosti izračunavajući $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ za sve **nebazisne** promenljive:

$$d_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 10 - (-3) - 8 = 5$$

$$d_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 12 - (-3) - 4 = 11$$

$$d_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 0 - (-3) - 0 = 3$$

$$d_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 9 - (-2) - 4 = 7$$

$$d_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 4 - (-2) - 3 = 3$$

$$d_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 0 - (-2) - 0 = 2$$

$$d_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 8 - (-1) - 4 = 5$$

$$d_{43} = c_{43} - u_4 - v_3 = 5 - (-1) - 3 = 3$$

$$d_{44} = c_{44} - u_4 - v_4 = 0 - (-1) - 0 = 1$$

Pošto su sve vrednosti za d_{ij} pozitivne, zaključak je da je tekuće dopustivo bazisno rešenje **optimalno**.

Kako postoji količina robe koja se transportuje iz drugog izvora (fabrike) do četvrte (fiktivne) destinacije $x_{24} = 5$ kamiona, to znači da će ta količina robe ostati u drugom izvoru (fabrici) i neće se transportovati do destinacija.

Optimalnom planu transporta između fabrika (izvora) i distributivnih centara (destinacija), prikazanom u tabeli II-23, odgovaraju minimalni ukupni troškovi transporta u iznosu od: **300** ×100 NJ.

Optimalni plan transporta je isti kao i početno dopustivo bazisno rešenje dobijeno metodom Najmanjih troškova.

Radni primer - potražnja veća od kapaciteta snabdevanja

Postavka zadatka je praktično ista kao i u prethodnim slučajevima, tj. grašak se konzervira u četiri fabrike ($m=4$) odakle se kamionima transportuje u tri distributivna centra ($n=3$). Proizvodnja u fabrikama ostaje ista dok se potražnja u jednom od distributivnih centara povećala. Količine konzerviranog graška koje svaka od fabrika proizvodi kao i potražnje pojedinih distributivnih centara (izraženi preko broja napunjenih kamiona), zajedno sa cenom prevoza po kamionu za svaku kombinaciju fabrika – distributivni centar, prikazani su u tabeli II-24.

Tabela II-24. Transportni podaci za preduzeće P&T, potražnja veća od kapaciteta snabdevanja.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)			Kapacitet snabdevanja
		Distributivni centar (Destinacija)			
		1	2	3	
Fabrika (Izvor)	1	10	12	0	20
	2	8	4	3	30
	3	6	9	4	20
	4	7	8	5	10
Potražnja		35	25	30	

Potražnja=95 kamiona

Kapacitet snabdevanja=80 kamiona

Problem se, kao i u prethodnim slučajevima, sastoji u određivanju takvog plana transporta (koju količinu transportovati iz koje fabrike u koji distributivni centar) koji će minimizirati ukupne troškove transporta.

Kao i u prethodnom slučaju otvoreni transportni problem treba svesti na zatvoreni transportni problem, tako što se u ovom slučaju uvodi fiktivna fabrika (Izvor) iz koga

se fiktivno transportuje povećana potražnja. Količina robe koja se transportuje iz fiktivne fabrike (Izvora) do odgovarajućih destinacija predstavlja u stvari nezadovoljenu potražnju date destinacije.

Na osnovu prethodnog, uvodi se fiktivna fabrika (Izvor) A_5 ($m+1=4+1$) čija je potražnja jednaka $a_5 = 15$ ($95 - 80 = 15$) kamiona dok je cena transporta iz fiktivne fabrike (Izvora) A_5 do bilo koje destinacije jednaka nuli tj. $c_{5,j} = 0$ ($j=1,2,3$). Na ovaj način, originalni otvoreni transportni problem je sveden na fiktivni zatvoreni transportni problem čiji su parametri prikazani u tabeli II-25.

Tabela II-25. Parametri svedenog (fiktivnog) transportnog problema preduzeća P&T.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)			Kapacitet snabdevanja
		Distributivni centar (Destinacija)			
		1	2	3	
Fabrika (Izvor)	1	10	12	0	20
	2	8	4	3	30
	3	6	9	4	20
	4	7	8	5	10
	5 (fiktivna)	0	0	0	15
Potražnja		40	25	30	95

Postavka zadatka je sledeća: minimizovati funkciju cilja

$$F = 10 \cdot x_{11} + 12 \cdot x_{12} + 0 \cdot x_{13} + 8 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{22} + 3 \cdot x_{23} + 6 \cdot x_{31} + 9 \cdot x_{32} + 4 \cdot x_{33} + 7 \cdot x_{41} + 8 \cdot x_{42} + 5 \cdot x_{43} + 0 \cdot x_{51} + 0 \cdot x_{52} + 0 \cdot x_{53}$$

pri ograničenjima:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 30$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 20$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 10$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} = 15$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 40$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 25$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 30$$

i uslovima nenegativnosti:

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5; j = 1, 2, 3).$$

Za rešavanje gore postavljenog transportnog problema se koristi transportni simpleks metod.

Prvi korak u rešavanju je **određivanje početnog dopustivog bazisnog rešenja**. Izgled početnog dopustivog bazisnog rešenja, primenom metode najmanjih troškova, prikazan je u tabeli II-26.

Tabela II-26. Početno dopustivo bazisno rešenje. Metoda najmanjih torškova.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)			Kapacitet snabdevanja
		Distributivni centar (Destinacija)			
		1	2	3	
Fabrika (Izvor)	1	10	12	0	20
	2	8	4	3	30
	3	6	9	4	20
	4	7	8	5	10
	5 (fiktivna)	0	0	0	15
		5		10	
			25		
Potražnja		40	25	30	95

Vrednost funkcije cilja za dopustivo početno bazisno rešenje je:

$$F = 0 \cdot x_{13} + 8 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{22} + 6 \cdot x_{31} + 7 \cdot x_{41} + 0 \cdot x_{51} + 0 \cdot x_{53}$$

$$F = 0 \cdot 20 + 8 \cdot 5 + 4 \cdot 25 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 10 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 10 = \mathbf{330} \times 100 \text{ NJ}$$

Test optimalnosti za na početno dopustivo bazisno rešenje.

Svakoј bazisnoj promenljivoј x_{ij} se dodeljuje jedna jednačina, tako da je sistem jednačina oblika:

$$\begin{array}{ll} u_1 + v_3 = 0 & \text{za } v_3 = 0, \rightarrow u_1 = 0 \\ u_2 + v_1 = 8 & \text{za } v_1 = 0, \rightarrow u_2 = 8 \\ u_2 + v_2 = 4 & \text{za } u_2 = 8, \rightarrow v_2 = -4 \\ u_3 + v_1 = 6 & \text{za } v_1 = 0, \rightarrow u_3 = 6 \\ u_4 + v_1 = 7 & \text{za } v_1 = 0, \rightarrow u_4 = 7 \\ u_5 + v_1 = 0 & \text{za } v_1 = 0, \rightarrow u_5 = 0 \\ u_5 + v_3 = 0 & \text{za } u_5 = 0, \rightarrow v_3 = 0 \end{array}$$

Na osnovu vrednosti veličina u_i i v_j , može se primeniti test optimalnosti izračunavajući $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ za sve **nebazisne** promenljive:

$$d_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 10 - 0 - 0 = 10$$

$$d_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 12 - 0 - (-4) = 16$$

$$d_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 3 - 8 - 0 = -5$$

$$d_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 9 - 6 - (-4) = 7$$

$$d_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 4 - 6 - 0 = -2$$

$$d_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 8 - 7 - (-4) = 5$$

$$d_{43} = c_{43} - u_4 - v_3 = 5 - 7 - 0 = -2$$

$$d_{52} = c_{52} - u_5 - v_2 = 0 - 0 - (-4) = 4$$

Pošto su tri promenljive (d_{23} , d_{33} i d_{43}) negativne, zaključak je da tekuće dopustivo bazisno rešenje nije optimalno. Sledeći korak transportnog simplex metoda je poboljšanje dopustivog bazisnog rešenja kroz iterativni postupak.

Iteracija #1

Korak 1. Kandidati za promenljivu koja ulazi u bazu su x_{23} , x_{32} i x_{43} . Promenljiva koja ulazi u bazu u prvoj iteraciji je x_{23} , jer $d_{23} = -5$ ima najveću (po apsolutnoj vrednosti) negativnu vrednost.

Korak 2. Sa $x_{23} = \theta$ kao novom bazisnom promenljivom, lančana reakcija je prikazana u tabeli II-27.

Tabela II-27. Lančana reakcija izazvana povećanjem vrednosti promenljive x_{23} .

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)						Kapacitet snabdevanja
		Distributivni centar (Destinacija)						
		1		2		3		
Fabrika (Izvor)	1	10		12		0		20
	2	8	$\leftarrow \theta$	4		3		30
	3	6		9		4		20
	4	7		8		5		10
	5 (fiktivna)	0	$\downarrow + \theta$	0		0	$\rightarrow - \theta$	15
			5				10	
	Potražnja	40		25		30		95

Promenljiva koja napušta bazu dobija se iz sledećeg sistema jednačina:

$$x_{21} = 5 - \theta \quad x_{51} = 5 + \theta \quad x_{53} = 10 - \theta.$$

U ovom slučaju vrednost za θ može maksimalno biti 5, zato što tada promenljive x_{21} postaje jednaka nuli, što znači da promenljiva x_{21} napušta bazu izabrana i $\theta = 5$.

Korak 3. Promenljiva koja ulazi u bazu će imati vrednost $x_{23} = \theta = 5$ dok će promenljive x_{51} i x_{53} imati sledeće vrednosti:

$$x_{21} = 5 - \theta = 5 - 5 = 0, \quad x_{51} = 5 + \theta = 5 + 5 = 10, \quad x_{53} = 10 - \theta = 10 - 5 = 5.$$

Novo dopustivo bazisno rešenje prikazano je u tabeli II-28.

Tabela II-28. Novo dopustivo bazisno rešenje. Iteracija # 1.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)				Kapacitet snabdevanja		
		Distributivni centar (Destinacija)						
		1	2	3				
Fabrika (Izvor)	1	10		12		0	20	20
	2	8		4		3		30
				25			5	
	3	6		9		4		20
			20					
	4	7		8		5		10
			10					
	5 (fiktivna)	0		0		0		15
		10				5		
Potražnja		40		25		30		95

Vrednost funkcije cilja F za novi plan transporta tj. novo dopustivo bazisno rešenje je:

$$F = 0 \cdot x_{13} + 4 \cdot x_{22} + 3 \cdot x_{23} + 6 \cdot x_{31} + 7 \cdot x_{41} + 0 \cdot x_{51} + 0 \cdot x_{53}$$

$$F = 0 \cdot 20 + 4 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 10 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 5 = \mathbf{305} \times 100 \text{ NJ.}$$

Test optimalnosti za novo dopustivo bazisno rešenje, dobijeno Iteracijom #1.

Svakoј bazisnoj promenljivoј x_{ij} se dodeljuje jedna jednačina, tako da je sistem jednačina oblika:

$$u_1 + v_3 = 0 \quad \text{za } v_3 = 0, \rightarrow u_1 = 0$$

$$u_2 + v_2 = 4 \quad \text{za } u_2 = 3, \rightarrow v_2 = 1$$

$$u_2 + v_3 = 3 \quad \text{za } v_3 = 0, \rightarrow u_2 = 3$$

$$u_3 + v_1 = 6 \quad \text{za } v_1 = 0, \rightarrow u_3 = 6$$

$$u_4 + v_1 = 7 \quad \text{za } v_1 = 0, \rightarrow u_4 = 7$$

$$u_5 + v_1 = 0 \quad \text{za } v_1 = 0, \rightarrow u_5 = 0$$

$$u_5 + v_3 = 0 \quad \text{za } u_5 = 0, \rightarrow v_3 = 0$$

Na osnovu vrednosti veličina u_i i v_j , može se primeniti test optimalnosti izračunavajući $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ za sve **nebazisne** promenljive:

$$d_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 10 - 0 - 0 = 10$$

$$d_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 12 - 0 - 1 = 11$$

$$d_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 8 - 3 - 0 = 5$$

$$d_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 9 - 6 - 1 = 2$$

$$d_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 4 - 6 - 0 = -2$$

$$d_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 8 - 7 - 1 = 0$$

$$d_{43} = c_{43} - u_4 - v_3 = 5 - 7 - 0 = -2$$

$$d_{52} = c_{52} - u_5 - v_2 = 0 - 0 - 1 = -1$$

Pošto su tri promenljive (d_{33} , d_{43} i d_{52}) negativne, zaključak je da tekuće dopustivo bazisno rešenje nije optimalno. Zbog toga je potrebno izvesti novu iteraciju u cilju dobijanja boljeg (optimalnog) dopustivog bazisnog rešenja.

Iteracija #2

Korak 1. Kandidati za promenljivu koja ulazi u bazu su x_{33} , x_{43} i x_{52} . Promenljive d_{33} i d_{43} imaju istu najveću (po apsolutnoj vrednosti) negativnu vrednost tj. $d_{33} = d_{43} = -2$. Kako je $c_{33} < c_{43}$ ($4 < 5$) nova bazisna promenljiva je x_{33} .

Korak 2. Sa $x_{233} = \theta$ kao novom bazisnom promenljivom, lančana reakcija je prikazana u tabeli II-29.

Tabela II-29. Lančana reakcija izazvana povećanjem vrednosti promenljive x_{33} .

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)			Kapacitet snabdevanja
		Distributivni centar (Destinacija)			
		1	2	3	
Fabrika (Izvor)	1	10	12	0	20
	2	8	4	3	30
	3	6	9	4	20
	4	7	8	5	10
	5 (fiktivna)	0	0	0	15
	Potražnja	40	25	30	95

Promenljiva koja napušta bazu dobija se iz sledećeg sistema jednačina:

$$x_{31} = 20 - \theta \quad x_{51} = 10 + \theta \quad x_{53} = 5 - \theta.$$

U ovom slučaju vrednost za θ može maksimalno biti 5, zato što tada promenljive x_{53} postaje jednaka nuli, što znači da promenljiva x_{53} napušta bazu izabrana i $\theta = 5$.

Korak 3. Promenljiva koja ulazi u bazu će imati vrednost $x_{33} = \theta = 5$ dok će promenljive x_{31} i x_{51} imati sledeće vrednosti:

$$x_{31} = 20 - \theta = 20 - 5 = 15, x_{51} = 10 + \theta = 10 + 5 = 15, x_{53} = 5 - \theta = 5 - 5 = 0.$$

Novo dopustivo bazisno rešenje prikazano je u tabeli II-30.

Tabela II-30. Novo dopustivo bazisno rešenje. Iteracija # 2.

		Cena transporta po kamionu (×100 NJ)				Kapacitet snabdevanja		
		Distributivni centar (Destinacija)						
		1	2	3				
Fabrika (Izvor)	1	10		12		0	20	20
	2	8		4		3		
					25		5	
	3	6		9		4		20
			15				5	
	4	7		8		5		10
			10					
	5 (fiktivna)	0		0		0		15
		15						
Potražnja		40		25		30		95

Vrednost funkcije cilja F za novi plan transporta tj. novo dopustivo bazisno rešenje je:

$$F = 0 \cdot x_{13} + 4 \cdot x_{22} + 3 \cdot x_{23} + 6 \cdot x_{31} + 4 \cdot x_{33} + 7 \cdot x_{41} + 0 \cdot x_{51}$$

$$F = 0 \cdot 20 + 4 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 15 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 10 + 0 \cdot 15 = \mathbf{295} \times 100 \text{ NJ.}$$

Test optimalnosti za novo dopustivo bazisno rešenje, dobijeno Iteracijom #2.

Svakoj bazisnoj promenljivoj x_{ij} se dodeljuje jedna jednačina, tako da je sistem jednačina oblika:

$$u_1 + v_3 = 0 \quad \text{za } v_3 = -2, \rightarrow u_1 = 2$$

$$u_2 + v_2 = 4 \quad \text{za } u_2 = 5, \rightarrow v_2 = -1$$

$$u_2 + v_3 = 3 \quad \text{za } v_3 = -2, \rightarrow u_2 = 5$$

$$u_3 + v_1 = 6 \quad \text{za } v_1 = 0, \rightarrow u_3 = 6$$

$$u_3 + v_3 = 4 \quad \text{za } u_3 = 6, \rightarrow v_3 = -2$$

$$u_4 + v_1 = 7 \quad \text{za } v_1 = 0, \rightarrow u_4 = 7$$

$$u_5 + v_1 = 0 \quad \text{za } v_1 = 0, \rightarrow u_5 = 0$$

Na osnovu vrednosti veličina u_i i v_j , može se primeniti test optimalnosti izračunavajući $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ za sve **nebazisne** promenljive:

$$d_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 10 - 2 - 0 = 8$$

$$d_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 12 - 2 - (-1) = 11$$

$$d_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 8 - 5 - 0 = 3$$

$$d_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 9 - 6 - (-1) = 4$$

$$d_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 8 - 7 - (-1) = 2$$

$$d_{43} = c_{43} - u_4 - v_3 = 5 - 7 - (-2) = 0$$

$$d_{52} = c_{52} - u_5 - v_2 = 0 - 0 - (-1) = 1$$

$$d_{53} = c_{53} - u_5 - v_3 = 0 - 0 - (-2) = 2$$

Pošto su sve vrednosti za d_{ij} pozitivne, zaključak je da je tekuće dopustivo bazisno rešenje **optimalno**.

Kako postoji količina robe koja se transportuje iz petog fiktivnog izvora (fabrike) do prve destinacije $x_{51} = 15$ kamiona, to znači da se ta količina robe u stvarnosti neće transportovati do prve destinacije tj. da će potražnja prve destinacije ostati nezadovoljena. U prvu destinaciju će se transportovati količina robe u iznosu od 25 kamiona, dok će kapaciteti ostalih destinacija biti zadovoljeni.

Optimalnom planu transporta između fabrika (izvora) i distributivnih centara (destinacija), prikazanom u tabeli II-30, odgovaraju minimalni ukupni troškovi transporta u iznosu od: **295** $\times 100$ NJ.

Pitanja:

1. Definicija transportnog problema.
2. Grafička prezentacija transportnog problema.
3. Osnovna karakteristika troškova distribucije proizvoda iz bilo kojeg izvora u bilo koju destinaciju.
4. Parametri modela transportnog problema.
5. Formulacija transportnog problema kao zadatka LP.
6. Struktura koeficijenata u ograničenjima.
7. Koji uslov treba da zadovolji transportni problem da bi bio "zatvoren".
8. U kojim slučajevima je transportni problem "otvoren".
9. Skup ograničenja otvorenog transportnog problema u slučaju kada su kapaciteti izvora veći od potražnje.
- 9a. Skup ograničenja otvorenog transportnog problema u slučaju kada je potražnja veća od kapaciteta izvora.
10. Svođenje otvorenog transportnog problema u slučaju kada su kapaciteti izvora veći od potražnje na zatvoreni transportni problem.
- 10a. Svođenje otvorenog transportnog problema u slučaju kada je potražnja veća od kapaciteta izvora na zatvoreni transportni problem.
11. Cena transporta iz bilo kog izvora snabdevanja do fiktivne destinacije.
- 11a. Cena transporta iz fiktivnog izvora do bilo koje fiktivne destinacije.
12. Kada postoji rešenje transportnog problema, šta je degenerisano a šta nedegenerisano rešenje transportnog problema.
13. Postupak iznalaženja rešenja transportnog problema.
14. Iz čega se sastoji transportni simplex metod.
15. Uopštena procedura za iznalaženje početnog bazisnog rešenja.
16. Kriterijum za određivanje bazisnih promenljivih metodom Severozapadnog ugla.
17. Kriterijum za određivanje bazisnih promenljivih metodom Najmanjih troškova.
18. Test optimalnosti za tekuće dopustivo bazisno rešenje.
19. Način određivanja nepoznatih (u_i i v_j).
20. Kriterijum za izbor nove bazisne promenljive.
21. Kriterijum za izbor promenljive koja napušta bazu.