UPRAVLJANJE ZALIHAMA – DETERMINISTIČKI I STOHASTIČKI MODELI

STOHASTIČKI MODELI – Potražnja definisana diskretnom raspodelom verovatnoća

Model upravljanja zalihama sa slučajnom potražnjom (***7)

Potražnja u sistemu snabdevanja određenim artiklom ima stohastički (slučajni) karakter i zadaje se diskretnim zakonom raspodele verovatnoća $p(x)$. Ako je potražnja **x** manja od nivoa zaliha **y** tada su troškovi nabavke C_1, u slučaju da je potražnja **x** veća od nivoa zaliha tada su troškovi nabavke – interventne nabavke C_2. Troškovi skladištenja su daleko manji od C_1 i C_2 i zanemaruju se. Proces upravljanja zalihama **ne zavisi od vremena**. Troškovi C_1 su daleko manji nego troškovi C_2. Troškovi C_1 i C_2 predstavljaju cenu nabavke po jedinici artikla (rezervnog dela). (*5)

Model se primenjuje za obezbeđivanje rezervnih delova za složene uređaje. Nabavka rezervnih delova zajedno sa mašinom vrši se po ceni C_1, dok se interventna nabavka realizuje po ceni C_2. Verovatnoća da će potražnja biti **x** data je diskretnim zakonom raspodele verovatnoća $p(x)$. Trošenje zaliha je pojedinačno (diskretno). (*5)

Funkcija ukupnih troškova je oblika:

$$F(y) = C_1 \cdot \sum_{x=0}^{y} p(x)\cdot(y-x) + C_2 \cdot \sum_{x=y+1}^{\infty} p(x)\cdot(x-y). \quad (*6)$$

Minimum funkcije ukupnih troškova postoji za y^* koje zadovoljava sledeću nejednačinu:

$$P\left(x \le y^* - 1\right) < \frac{C_2}{C_1 + C_2} < P\left(x \le y^*\right).$$

<u>Dokaz:</u>
Zamenom **y+1** umesto **y** u izrazu za funkciju cilja dobija se:

$$F(y+1) = C_1 \cdot \sum_{x=0}^{y+1} p(x)\cdot(y+1-x) + C_2 \cdot \sum_{x=y+2}^{\infty} p(x)\cdot(x-y-1),$$

$$F(y+1)=C_1\cdot\sum_{x=0}^{y}p(x)\cdot(y+1-x)+C_1\cdot p(y+1)\cdot(y+1-y-1)+$$

$$+C_2\cdot\sum_{x=y+1}^{\infty}p(x)\cdot(x-y-1)-C_2\cdot p(y+1)\cdot(y+1-y-1)$$

$$F(y+1)=C_1\cdot\sum_{x=0}^{y}p(x)\cdot(y-x)+C_1\cdot\sum_{x=0}^{y}p(x)+$$

$$+C_2\cdot\sum_{x=y+1}^{\infty}p(x)\cdot(x-y)-C_2\cdot\sum_{x=y+1}^{\infty}p(x)$$

Zamenom $\sum_{x=y+1}^{\infty}p(x)=1-\sum_{x=0}^{y}p(x)$ u prethodni izraz dobija se:

$$F(y+1)=C_1\cdot\sum_{x=0}^{y}p(x)\cdot(y-x)+C_2\cdot\sum_{x=y+1}^{\infty}p(x)\cdot(x-y)+(C_1+C_2)\cdot\sum_{x=0}^{y}p(x)-C_2$$

odnosno:

$$F(y+1)=F(y)+(C_1+C_2)\cdot\sum_{x=0}^{y}p(x)-C_2.$$

Na isti način dobija se i izraz za $F(y-1)$:

$$F(y-1)=F(y)-(C_1+C_2)\cdot\sum_{x=0}^{y-1}p(x)+C_2.$$

Ako je y^* optimalna količina zaliha za koju su ukupni troškovi minimalni tada je zadovoljena sledeća nejednakost:

$$F(y^*-1)>F(y^*)<F(y^*+1) \text{ ili}$$

$$F(y^*)-(C_1+C_2)\cdot\sum_{x=0}^{y^*-1}p(x)+C_2>F(y^*)<F(y^*)+(C_1+C_2)\cdot\sum_{x=0}^{y^*}p(x)-C_2.$$

Da bi važila gornja nejednakost moraju biti ispunjeni sledeći uslovi:

$$-(C_1+C_2)\cdot\sum_{x=0}^{y^*-1}p(x)+C_2>0$$

$$+(C_1+C_2)\cdot\sum_{x=0}^{y^*}p(x)-C_2>0$$

Rešavanjem gornje dve nejednačine dobija se:

$$\sum_{x=0}^{y^*-1} p(x) < \frac{C_2}{(C_1 + C_2)}$$

$$\sum_{x=0}^{y^*} p(x) > \frac{C_2}{(C_1 + C_2)}$$

Ako se gornje dve nejednakosti napišu kao jedna dobija se:

$$\sum_{x=0}^{y^*-1} p(x) < \frac{C_2}{(C_1 + C_2)} < \sum_{x=0}^{y^*} p(x), \text{ odnosno}$$

$$P\left(x \le y^* - 1\right) < \frac{C_2}{C_1 + C_2} < P\left(x \le y^*\right),$$

čime je dokaz završen.

Opšti model upravljanja zalihama sa slučajnom potražnjom (***11)

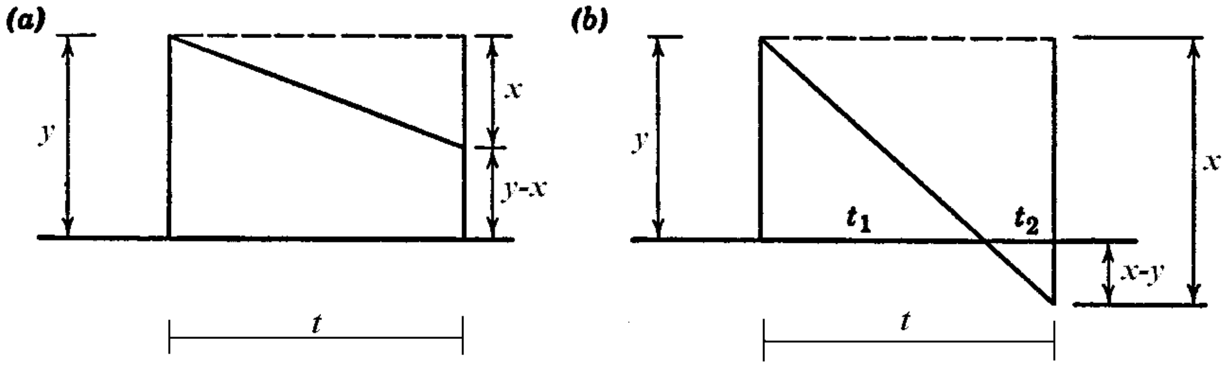
Model je sličan prethodnom s tim što je trošenje zaliha kontinualno. Intenzitet trošenja zaliha tj. brzina trošenja zaliha je konstantna. Potražnja se zadovoljava kontinualno. Intenzitet nabavke zaliha je približno konstantan (vrši se u približno istim vremenskim intervalima **t**) ali veličina porudžbine nije konstantna. Smatra se da je isporuka porudžbine trenutna.

Zahtevi za artiklima (zalihama, rezervnim delovima) u određenom vremenskom intervalu definišu se preko diskretnog zakona raspodele verovatnoća $p(x)$. (*8)

Oznake koje se koriste u modelu su sledeće:

- y – nivo zaliha u sistemu,
- x – potražnja,
- C_1 – troškovi držanja (nabavka+čuvanje) zaliha po jedinici artikla; potražnja manja od zaliha,
- C_2 – troškovi nezadovoljene potražnje (interventne nabavke, penali) po jedinici artikla; potražnja veća od zaliha,
- $p(x)$ – verovatnoća da će potražnja biti x jedinica.

Promena zaliha u sistemu može se prikazati kao: (slika 2)



Slika 2. Načini promene zaliha u sistemu. (*9)

I slučaj (a): Nivo zaliha u sistemu je veći od potražnje (y>x), slika 2a.

Srednji nivo zaliha, u intervalu **t**, u ovom slučaju iznosi:

$$y - \frac{x}{2}.$$

Verovatnoća da će potražnja biti **x** jedinica je $p(x)$, odakle sledi da su troškovi za interval **t** u I slučaju (a) jednaki:

$$C_1 \cdot \sum_{x=0}^{y} p(x) \cdot \left(y - \frac{x}{2} \right).$$

II slučaj (b): Nivo zaliha u sistemu je manji od potražnje (y<x), slika 2b.

U ovom slučaju samo u podintervalu $\mathbf{t_1}$ je moguće zadovoljiti potražnju, tada je srednji nivo zaliha jednak:

$$\frac{y}{2} \cdot \frac{t_1}{t} = \frac{y}{2} \cdot \frac{y}{x} = \frac{y^2}{2 \cdot x}.$$

Za drugi deo intervala **t**, podinterval $\mathbf{t_2}$, javljaju se troškovi usled nedostatka zaliha.

Srednji nivo nedostajućih zaliha je jednak:

$$\frac{(x-y)}{2} \cdot \frac{t_2}{t} = \frac{(x-y)}{2} \cdot \frac{(x-y)}{x} = \frac{(x-y)^2}{2 \cdot x}.$$

Troškovi za interval **t** u II slučaju (b), ako je $p(x)$ verovatnoća da će potražnja biti **x** jedinica, su:

$$\sum_{x=y+1}^{\infty} \left[C_1 \cdot \frac{y^2}{2 \cdot x} + C_2 \cdot \frac{(x-y)^2}{2 \cdot x} \right] \cdot p(x).$$

Funkcija ukupnih troškova za interval **t** je data sledećim izrazom (a)+(b):

$$F(y)=C_1\cdot\sum_{x=0}^{y}p(x)\cdot\left(y-\frac{x}{2}\right)+\sum_{x=y+1}^{\infty}\left[C_1\cdot\frac{y^2}{2\cdot x}+C_2\cdot\frac{(x-y)^2}{2\cdot x}\right]\cdot p(x).\quad(*10)$$

Optimalni nivo zaliha za interval **t**, dobija se nalaženjem minimuma funkcije ukupnih troškova F(y). U tu svrhu potrebno je u funkciju ukupnih troškova umesto y zameniti y+1 odnosno y–1.

$$F(y+1)=C_1\cdot\sum_{x=0}^{y+1}p(x)\cdot\left(y+1-\frac{x}{2}\right)+\sum_{x=y+2}^{\infty}\left[C_1\cdot\frac{(y+1)^2}{2\cdot x}+C_2\cdot\frac{(x-y-1)^2}{2\cdot x}\right]\cdot p(x)$$

Sređivanjem gornjeg izraza postepeno po sabircima dobija se:

$$C_1\cdot\sum_{x=0}^{y+1}p(x)\cdot\left(y+1-\frac{x}{2}\right)=C_1\cdot\sum_{x=0}^{y}p(x)\cdot\left(y+1-\frac{x}{2}\right)+C_1\cdot\left(y+1-\frac{y+1}{2}\right)\cdot p(y+1)=$$

$$=C_1\cdot\sum_{x=0}^{y}p(x)\cdot\left(y-\frac{x}{2}\right)+C_1\cdot\sum_{x=0}^{y}p(x)+C_1\cdot\frac{y+1}{2}\cdot p(y+1)$$

$$\sum_{x=y+2}^{\infty}\left[C_1\cdot\frac{(y+1)^2}{2\cdot x}+C_2\cdot\frac{(x-y-1)^2}{2\cdot x}\right]\cdot p(x)=$$

$$\sum_{x=y+1}^{\infty}\left[C_1\cdot\frac{(y+1)^2}{2\cdot x}+C_2\cdot\frac{(x-y-1)^2}{2\cdot x}\right]\cdot p(x)-$$

$$-C_1\cdot\frac{(y+1)^2}{2\cdot(y+1)}\cdot p(y+1)-C_2\cdot\frac{(y+1-y-1)}{2\cdot(y+1)}\cdot p(y+1)$$

$$\sum_{x=y+1}^{\infty}\left[C_1\cdot\frac{y^2}{2\cdot x}+C_1\cdot\frac{2\cdot y+1}{2\cdot x}+C_2\cdot\frac{(x-y)^2}{2\cdot x}+C_2\cdot\frac{-2\cdot(x-y)+1}{2\cdot x}\right]\cdot p(x)-$$

$$-C_1\cdot\frac{y+1}{2}\cdot p(y+1)$$

$$\sum_{x=y+1}^{\infty}\left[C_1\cdot\frac{y^2}{2\cdot x}+C_2\cdot\frac{(x-y)^2}{2\cdot x}\right]\cdot p(x)+\sum_{x=y+1}^{\infty}\left[\frac{C_1}{x}\cdot\left(y+\frac{1}{2}\right)+\frac{C_2}{x}\cdot\left(y+\frac{1}{2}\right)\right]\cdot p(x)-$$

$$-C_2\cdot\sum_{x=y+1}^{\infty}p(x)-C_1\cdot\frac{y+1}{2}\cdot p(y+1)$$

Konačan izraz za F(y+1) glasi:

$$F(y+1)=F(y)+C_1\cdot\sum_{x=0}^{y}p(x)+\left(y+\frac{1}{2}\right)\cdot\sum_{x=y+1}^{\infty}\left[(C_1+C_2)\cdot\frac{p(x)}{x}\right]-C_2\cdot\left[1-\sum_{x=0}^{y}p(x)\right]$$

odnosno:

$$F(y+1)=F(y)+(C_1+C_2)\cdot\sum_{x=0}^{y}p(x)+\left(y+\frac{1}{2}\right)\cdot(C_1+C_2)\cdot\sum_{x=y+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x}-C_2$$

$$F(y+1)=F(y)+(C_1+C_2)\cdot\left[P(x\le y)+\left(y+\frac{1}{2}\right)\cdot\sum_{x=y+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x}\right]-C_2.$$

Sa G(y) označava se sledeći deo prethodnog izraza:

$$G(y)=P(x\le y)+\left(y+\frac{1}{2}\right)\cdot\sum_{x=y+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x},$$

što dovodi do sažetog izraza za F(y+1) kao:

$$F(y+1)=F(y)+(C_1+C_2)\cdot G(y)-C_2.$$

Na sličan način stavljajući y–1 u jednačinu za ukupne troškove F(y) dobija se:

$$F(y-1)=F(y)-(C_1+C_2)\cdot G(y-1)+C_2.$$

Na osnovu dve poslednje jednačine proizilazi da će minimum funkcije ukupnih troškova biti za onu vrednost y^* koja zadovoljava sledeće nejednakosti:

$$F(y^*-1)>F(y^*)<F(y^*+1) \text{ ili}$$

$$F(y^*)-(C_1+C_2)\cdot G(y^*-1)+C_2>F(y^*)<F(y^*)+(C_1+C_2)\cdot G(y^*)-C_2.$$

Da bi važila gornja nejednakost moraju biti ispunjeni sledeći uslovi:

$$(C_1+C_2)\cdot G(y^*)-C_2>0, \text{ odnosno } G(y^*)>\frac{C_2}{(C_1+C_2)}$$

$$-(C_1+C_2)\cdot G(y^*-1)+C_2>0, \text{ odnosno } G(y^*-1)<\frac{C_2}{(C_1+C_2)},$$

ili

$$G(y^*-1)<\frac{C_2}{(C_1+C_2)}<G(y^*).$$

Ako je: $G(y^*) = \frac{C_2}{(C_1 + C_2)}$, tada će optimalna vrednost za y biti ili y^* ili $y^* + 1$.

Ako je: $G(y^* - 1) = \frac{C_2}{(C_1 + C_2)}$, tada će optimalna vrednost za y biti ili $y^* - 1$ ili y^*.

PITANJA:

5. Karakteristike i primena Modela upravljanja zalihama sa slučajnom potražnjom.
6. Funkcija ukupnih troškova Modela upravljanja zalihama sa slučajnom potražnjom.
7. Model upravljanja zalihama sa slučajnom potražnjom.
8. Karakteristike Opšteg modela upravljanja zalihama sa slučajnom potražnjom.
9. Dijagram Opšteg modela upravljanja zalihama sa slučajnom potražnjom.
10. Funkcija ukupnih troškova Opšteg modela upravljanja zalihama sa slučajnom potražnjom.
11. Opšti model upravljanja zalihama sa slučajnom potražnjom.