Zadatak 03:

Preduzeće nabavlja novu mašinu. Element preko koga se vrši automatsko upravljanje mašinom je veoma složen i skup, tako da je potrebno pri kupovini mašine nabaviti i nekoliko ovih elemenata kao rezervne delove. Cena nabavke jednog elementa pri kupovini sa mašinom je $C_1 = 6500$ NJ, dok je cena interventne nabavke ovog elementa $C_1 = 125000$ NJ. Kako se ovi elementi ne mogu koristiti za druge mašine odrediti optimalnu količinu elemenata (rezervnih delova) koje treba nabaviti zajedno sa mašinom. Podaci o učestalosti kvarova datog elementa su dati u tabeli (na uzorku od 100 mašina).

Utrošak elemenata *(x)*	0	1	2	3	4	5	>6
Broj mašina na kojima je izvršena zamena *(x)* elemenata	85	7	3	3	1	1	0
p(x)	0,85	0,07	0,03	0,03	0,01	0,01	0

Rešenje:

Pošto su podaci o učestalosti kvarova datog elementa zadati preko diskretnog zakona raspodele verovatnoća $p(x)$ a kako su troškovi nabavke elemenata pri kupovini sa mašinom manji od troškova interventne nabavke $C_1 < C_2$, dok se troškovi skladištenja zanemaruju, za određivanje optimalnih ukupnih troškova čuvanja zaliha koristi se *model upravljanja zalihama sa slučajnom potražnjom*.

Funkcija ukupnih troškova, u zavisnosti od broja elemenata koji se kupuju zajedno sa mašinom y, je oblika:

$$F(y) = C_1 \cdot \sum_{x=0}^{y} p(x) \cdot (y - x) + C_2 \cdot \sum_{x=y+1}^{\infty} p(x) \cdot (x - y)$$

Optimalni broj elemenata koje treba nabaviti zajedno sa mašinom y^* određuje se na osnovu minimalnih ukupnih troškova kao:

$F(0) = 12500 \cdot [0{,}07 \cdot 1 + 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}03 \cdot 3 + 0{,}01 \cdot 4 + 0{,}01 \cdot 5] = 38750$ NJ

$F(1) = 6500 \cdot 0{,}85 \cdot 1 + 12500 \cdot [0{,}03 \cdot 1 + 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}01 \cdot 3 + 0{,}01 \cdot 4] = 25525$ NJ

$F(2) = 6500 \cdot [0{,}85 \cdot 2 + 0{,}07 \cdot 1] + 12500 \cdot [0{,}03 \cdot 1 + 0{,}01 \cdot 2 + 0{,}01 \cdot 3] = 21505$ NJ

$F(3) = 6500 \cdot [0{,}85 \cdot 3 + 0{,}07 \cdot 2 + 0{,}03 \cdot 1] + 12500 \cdot [0{,}01 \cdot 1 + 0{,}01 \cdot 2] = \mathbf{21430}$ NJ

$F(4) = 6500 \cdot [0{,}85 \cdot 4 + 0{,}07 \cdot 3 + 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}01 \cdot 1] + 12500 \cdot [0{,}01 \cdot 1] = 25300$ NJ

$F(5) = 6500 \cdot [0{,}85 \cdot 5 + 0{,}07 \cdot 4 + 0{,}03 \cdot 3 + 0{,}01 \cdot 2 + 0{,}01 \cdot 1] = 30485$ NJ.

Minimalni ukupni troškovi iznose *21430* NJ i dobijenu su za $y=3$, što znači da je optimalan broj elemenata koje treba kupiti pri kupovini nove mašine $y^* = 3$.

Zadatak je moguće rešiti direktno koristeći minimum funkcije ukupnih troškova koji za y^* (optimalni broj elemenata koje treba nabaviti zajedno sa mašinom) zadovoljava sledeću nejednačinu:

$$P(x \le y^* - 1) < \frac{C_2}{C_1 + C_2} < P(x \le y^*),$$

gde $P(x \le y) = \sum_{x=0}^{y} p(x)$ predstavlja funkciju raspodele verovatnoća odnosno kumulativni zakon raspodele verovatnoća zamene datog elementa na mašini.

Kumulativni zakon raspodele verovatnoća diskretne slučajne promenljive *x* određuje se kao:

y	0	1	2	3	4	5	>6
x	85	7	3	3	1	1	0
p(x)	0,85	0,07	0,03	0,03	0,01	0,01	0
P(x≤y)	0,85	0,92	0,95	0,98	0,99	1	÷

Odnos troškova nabavke elementa $C_2/(C_1 + C_2)$ iznosi:

$$\frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{125000}{6500 + 125000} = 0{,}9505.$$

Zamenjujući dobijene vrednosti u gornju nejednačinu dobija se da se odnos $C_2/(C_1 + C_2)$ nalazi između vrednosti kumulativnog zakona raspodele za $y=2$ i $y=3$, odnosno:

$$P(x \le 2) = 0{,}95 < 0{,}9505 < 0{,}98 = P(x \le 3),$$

što znači da je optimalan broj elemenata koje treba kupiti pri kupovini mašine $y^* = 3$, dok ukupni troškovi u tom slučaju iznose:

$$F(y^* = 3) = 6500 \cdot [0{,}85 \cdot 3 + 0{,}07 \cdot 2 + 0{,}03 \cdot 1] + 12500 \cdot [0{,}01 \cdot 1 + 0{,}01 \cdot 2]$$

$$F(y^* = 3) = \mathbf{21430} \text{ NJ.}$$

Zadatak 03a:

Za podatke iz prethodnog zadatka, pod pretpostavkom da troškovi interventne nabavke nisu poznati, proceniti troškove interventne nabavke ukoliko se sa mašinom kupuju samo dva elementa preko kojih se vrši automatsko upravljanje mašinom.

Rešenje:

Procena troškova interventne nabavke C_2 vrši se na osnovu nejednačine preko koje se određuje minimum funkcije ukupnih troškova, tj.:

$$P(x \leq y-1) < \frac{C_2}{C_1 + C_2} < P(x \leq y).$$

gde je $y=2$ – broj elemenata koji se kupuju zajedno sa mašinom.

Za vrednosti kumulativnog zakona raspodele za $y=1 \rightarrow P(x \leq 1) = 0{,}92$ i $y=2 \rightarrow P(x \leq 2) = 0{,}95$ i troškove nabavke elementa pri kupovini zajedno sa mašinom $C_1 = 6500$ NJ, dobija se nejednačina preko koje se procenjuju troškovi interventne nabavke C_2:

$$0{,}92 < \frac{C_2}{6500 + C_2} < 0{,}95.$$

Donja granica troškova interventne nabavke iznosi:

$$\frac{C_2}{6500 + C_2} = 0{,}92 \rightarrow C_2 = \frac{0{,}92 \cdot 6500}{1 - 0{,}92} = 74750 \text{ NJ},$$

dok gornja granica troškova interventne nabavke iznosi:

$$\frac{C_2}{6500 + C_2} = 0{,}95 \rightarrow C_2 = \frac{0{,}95 \cdot 6500}{1 - 0{,}95} = 123500 \text{ NJ}.$$

Procena je da se troškovi interventne nabavke C_2, u slučaju kupovine samo dva elementa pri kupovini mašine, nalaze u intervalu:

$$74500 < C_2 < 123500 \text{ NJ}.$$

Zadatak 04:

Potrebno je optimizirati nivo zaliha određenog rezervnog dela. Potrošnja rezervnih delova je ravnomerna ali stohastičke prirode. Popuna zaliha se vrši na početku svakog meseca dok se vreme popune zaliha se može zanemariti. Statističkom analizom su utvrđene verovatnoće za pojedine obime potražnje rezervnog dela u toku meseca i dati su tabelarno. Troškovi skladištenja po jedinici rezervnog dela u toku meseca su $C_1 = 250$ NJ a troškovi negativnih zaliha iznose $C_2 = 650$ NJ. Odrediti optimalni nivo zaliha y^* i iznos minimalnih ukupnih troškova $F(y^*)$.

Potreban broj rez. delova u toku meseca *(x)*	2	3	4	5	6	7	8
Verovatnoća potražnje *(x)* rez. delova – *p(x)*	0	0,1	0,2	0,35	0,25	0,1	0

Rešenje:

Kako je potrošnja rezervnih delova ravnomerna (kontinualna) i stohastičke je prirode i pošto je intenzitet nabavke rezervnih delova konstantan a vreme popune zaliha se može zanemariti za određivanje optimalnog nivoa zaliha odnosno optimalnih ukupnih troškova čuvanja zaliha koristi se *opšti model upravljanja zalihama sa slučajnom potražnjom*.

Optimalni nivo zaliha y^* dobija se nalaženjem minimuma funkcije ukupnih troškova *F(y)*, tj.

$$F(y) = C_1 \cdot \sum_{x=0}^{y} p(x) \cdot \left(y - \frac{x}{2} \right) + \sum_{x=y+1}^{\infty} \left[C_1 \cdot \frac{y^2}{2 \cdot x} + C_2 \cdot \frac{(x-y)^2}{2 \cdot x} \right] \cdot p(x),$$

odnosno iz nejednačine:

$$G(y^* - 1) < \frac{C_2}{(C_1 + C_2)} < G(y^*)$$

gde je:

$$G(y) = P(x \le y) + \left(y + \frac{1}{2} \right) \cdot \sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}.$$

Radi lakšeg izračunavanja i bolje preglednosti postupak izračunavanja funkcije *G(y)* biće prikazan tabelarno. (*y* – nivo zaliha)

y	x	$p(x)$	$\frac{p(x)}{x}$	$\sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}$	$(y+\frac{1}{2}) \cdot \sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}$	$P(x \le y)$	$G(y)=P(x \le y)+ +(y+\frac{1}{2}) \cdot \sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}$
2	2	0	0	0,2093	0,5233	0	0,5233
3	3	0,1	0,0333	0,1760	0,6160	0,1	0,7160
4	4	0,2	0,0500	0,1260	0,5670	0,3	0,8670
5	5	0,35	0,0700	0,0560	0,3080	0,65	0,9580
6	6	0,25	0,0417	0,0143	0,0930	0,9	0,9930
7	7	0,1	0,0143	0	0	1	1
8	8	0	0	0	0	1	1

Odnos troškova skladištenja i negativnih zaliha rezervnih delova $C_2/(C_1+C_2)$ iznosi:

$$\frac{C_2}{C_1+C_2}=\frac{650}{250+650}=0{,}7222.$$

Zamenjujući dobijene vrednosti u gornju nejednačinu dobija se da se odnos $C_2/(C_1+C_2)$ nalazi između vrednosti funkcije *G(y)* za *y=3* i *y=4*, odnosno:

$$G(3)=0{,}7160<0{,}7222<0{,}8670=G(4),$$

što znači da je optimalan nivo zaliha koje treba držati u skladištu svakog meseca $y^*=4$, dok ukupni troškovi u tom slučaju iznose:

$$F(y^*=4)=250 \cdot \sum_{x=0}^{4} p(x) \cdot \left(4-\frac{x}{2}\right)+\sum_{x=5}^{\infty}\left[250 \cdot \frac{4^2}{2 \cdot x}+650 \cdot \frac{(x-4)^2}{2 \cdot x}\right] \cdot p(x)$$

$$F(y^*=4)=162{,}5+252+118{,}79=\mathbf{533{,}29}\ \text{NJ}.$$