Zadatak 3.1

Mašinska radionica ima 6 radnih mesta - mašina koje opslužuje viljuškar. Broj zahteva za korišćenjem viljuškara u toku jednog sata iznosi 16 (Poasonov tok). Prosečno vreme opsluživanja jednog radnog mesta viljuškarom je 3 minuta. Raspodela vremena opsluživanja je eksponencijalna. Odrediti efikasnost sistema opsluživanja, procenat vremena zauzetosti viljuškara i gubitak zbog čekanja mašine usled zauzetosti viljuškara, ako svaki minut nerada mašine košta 5000 din.

Rešenje:

Opisani sistem se može modelirati kao zatvoreni sistem opsluživanja sa jednim kanalom za opsluživanje i populacijom od 6 jedinica, sa vremenom između dva uzastopna zahteva za opsluživanjem i vremenom opsluživanja koja su raspodeljena po eksponencijalnoj raspodeli, tj. M/M/1//6.

broj kanala za opsluživanje:	$c = 1$,
ukupan broj jedinica:	$N = 6$,
srednji intenzitet dolaska paketa:	$\lambda = 16$ zahteva na sat,
srednji intenzitet opsluživanja paketa:	$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{ops}} = \frac{1}{3}$ opsluženih mašina u minuti,
	$\mu = 20$ opsluženih mašina na sat,
koeficijent iskorišćenja kanala za opsluživanje:	$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} = \frac{16}{1 \cdot 20} = \frac{4}{5} = 0.8$

Kada se traži određivanje efikasnosti sistema opsluživanja, potrebno je odrediti osnovne karakteristike (parametre) sistema (L, L_q, W, W_q). Da bismo izračunali parametre koji nam se traže, neophodno je odrediti verovatnoće stanja sistema:

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{(N-k)!} \cdot (\frac{\lambda}{\mu})^k} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{(N-k)!} \cdot (\rho)^k} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{6} \frac{6!}{(6-k)!} \cdot (0.8)^k} \\
&= \frac{1}{6!(\frac{1}{6!} + \frac{0.8}{5!} + \frac{0.8^2}{4!} + \frac{0.8^3}{3!} + \frac{0.8^4}{2!} + \frac{0.8^5}{1!} + \frac{0.8^6}{0!})} \\
&= \frac{1}{720(\frac{1}{720} + \frac{0.8}{120} + \frac{0.64}{24} + \frac{0.512}{6} + \frac{0.4096}{2} + \frac{0.32768}{1} + \frac{0.262144}{0})} \\
&= \frac{1}{1 + 4.8 + 19.2 + 61.44 + 147.456 + 235.9296 + 188.74368} \\
&= \frac{1}{658.56928} = 0.00152
\end{aligned}
$$

Ostale verovatnoće stanja za k=1,2,..,N se izračunavaju iz izraza:

$$
\begin{aligned}
p_k &= \frac{N!}{(N-k)!} \cdot (\frac{\lambda}{\mu})^k \cdot p_0 \\
p_1 &= \frac{6!}{5!} \cdot (0.8)^1 \cdot 0.00152 = 6 \cdot 0.8 \cdot 0.00152 = 0.0073 \\
p_2 &= \frac{6!}{4!} \cdot (0.8)^2 \cdot 0.00152 = 30 \cdot 0.64 \cdot 0.00152 = 0.0292 \\
p_3 &= \frac{6!}{3!} \cdot (0.8)^3 \cdot 0.00152 = 120 \cdot 0.512 \cdot 0.00152 = 0.0934 \\
p_4 &= \frac{6!}{2!} \cdot (0.8)^4 \cdot 0.00152 = 360 \cdot 0.4096 \cdot 0.00152 = 0.2241 \\
p_5 &= \frac{6!}{1!} \cdot (0.8)^5 \cdot 0.00152 = 720 \cdot 0.32768 \cdot 0.00152 = 0.3586 \\
p_6 &= \frac{6!}{0!} \cdot (0.8)^6 \cdot 0.00152 = 720 \cdot 0.262144 \cdot 0.00152 = 0.2867
\end{aligned}
$$

Srednji broj jedinica koje su ispostavile zahtev za opsluživanjem (L):

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{k=0}^{N} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{6} k \cdot p_k = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 \\
L &= 0.0073 + 2 \cdot 0.0292 + 3 \cdot 0.0934 + 4 \cdot 0.2241 + 5 \cdot 0.3586 + 6 \cdot 0.2867 \\
&= 0.0073 + 0.0584 + 0.2802 + 0.8964 + 1.7930 + 1.7202 = 4.76
\end{aligned}
$$

Srednji broj zahteva koji čekaju na opsluživanje (L_q):

$$L_q = N - (1 - p_0)(1 + \frac{\mu}{\lambda}) = 6 - (1 - 0.00152)(1 + \frac{5}{4}) = 6 - 2.2 = 3.80$$

Srednje vreme čekanja zahteva na opsluživanje (W_q):

$$W_q = \frac{L_q}{\overline{\lambda}} = \frac{3.80}{19.99} = 0.19 \text{ h} = 11.4 \text{ min}$$

-gde je:

$$
\begin{aligned}
\overline{\lambda} &= \lambda \cdot \sum_{k=0}^{6} (6-k) p_k = 16(6p_0 + 5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5) \\
&= 16(6 \cdot 0.00152 + 5 \cdot 0.0073 + 4 \cdot 0.0292 + 3 \cdot 0.0934 + 2 \cdot 0.2241 + 0.3586) \\
&= 16 \cdot 1.2494 = 19.99
\end{aligned}
$$

Srednje vreme nefunkcionisanja jedinice (W):

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.19 + 0.05 = 0.24 \text{ h} = 14.4 \text{ min}$$

Viljuškar će biti zauzet u svim stanjima sistema osim u onom kada nema zahteva za opsluživanjem (p_o). Udeo vremena u kojem je viljuškar zauzet biće jednak srednjem koeficijentu zauzetosti kanala za oplsuživanje ($\frac{c_z}{c}$):

$$\frac{c_z}{c} = \frac{1 - p_0}{c} = \frac{1 - 0.00152}{1} = 0.99848$$

-gde je c_z srednji broj zauzetih viljuškara

Dakle, viljuškar će biti zauzet 99.85% radnog vremena.

Potom, potrebno je izračunati novčani gubitak usled izgubljene produktivnosti, tj. koliko se u proseku zarade gubi zbog vremena za koje mašina ne radi (koje provede u sistemu opsluživanja). Kako bismo odredili izgubljenu zaradu, potrebno je definisati očekivane troškove čekanja $E(TC)$, tj. funkciju troškova čekanja. Troškovi čekanja će biti definisani u $g(n)$ formi, za linearan slučaj:

$$E(TC) = C_w \cdot \sum_{k=o}^{6} k \cdot p_k = C_w \cdot L$$

-gde su C_w troškovi čekanja po jedinici vremena za svaku mašinu i iznose 5000 $\frac{\text{din}}{\text{min}}$.

Izgubljena zarada nastala usled neproduktivnosti - izgubljene proizvodnje iznosi:

$$C_{iz}^{c=1} = E(TC) = C_w \cdot L = 5000 \cdot 4.76 = 23800 \, \frac{\text{din}}{\text{min}}$$

Zadatak 3.2

Ispitati kako će uvođenje još jednog viljuškara u razmatrani zadatak 4 uticati na efikasnost sistema opsluživanja mašina i troškove prouzrokovane zastojem.

Rešenje:

Opisani sistem se može modelirati kao zatvoreni sistem opsluživanja sa dva kanala za opsluživanje i populacijom od 6 jedinica, sa vremenom između dva uzastopna zahteva za opsluživanjem i vremenom opsluživanja koja su raspodeljena po eksponencijalnoj raspodeli, tj. M/M/2//6.

broj kanala za opsluživanje:	$c = 2$,
ukupan broj jedinica:	$N = 6$,
srednji intenzitet dolaska paketa:	$\lambda = 16$ zahteva na sat,
srednji intenzitet opsluživanja paketa:	$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{ops}} = \frac{1}{3}$ opsluženih mašina u minuti,
	$\mu = 20$ opsluženih mašina na sat,
koeficijent iskorišćenja kanala za opsluživanje:	$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} = \frac{16}{1 \cdot 20} = \frac{4}{5} = 0.8$

Srednji broj jedinica koje su ispostavile zahtev za opsluživanjem (L):

$$L = \sum_{k=0}^{N} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{6} k \cdot p_k = 0p_0 + 1p_1 + ... + 6p_6 = 3.62$$

Srednji broj zahteva koji čekaju na opsluživanje (L_q):

$$L_q = \sum_{k=1}^{N-c} k \cdot p_{c+k} = \sum_{k=1}^{4} k \cdot p_{2+k} = 1p_3 + 2p_4 + 3p_5 + 4p_6 = 1.72$$

Srednje vreme čekanja zahteva na opsluživanje (W_q):

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} = \frac{L_q}{(N-L)\lambda} = 0.045 \text{ h} = 2.7 \text{ min}$$

Srednje vreme nefunkcionisanja jedinice (W):

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.095 \text{ h} = 5.7 \text{ min}$$

Verovatnoće stanja dvokanalnog zatvorenog sistema izračunavaju se putem izraza za višekanalni sistem opsluživanja sa ograničenim izvorom jedinica:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c} \binom{N}{k} \cdot (\frac{\lambda}{\mu})^k + \sum_{r=1}^{N-c} \frac{1}{c^r \cdot (N-c-r)!} \cdot (\frac{\lambda}{\mu})^{c+r}}$$
$$= \frac{1}{\sum_{k=0}^{2} \binom{6}{k} \cdot (\frac{4}{5})^k \ + \sum_{r=1}^{4} \frac{1}{2^r \cdot (4-r)!} \cdot (\frac{4}{5})^{2+r}} = 0.0143$$

$$p_k = \binom{N}{k} \cdot (\frac{\lambda}{\mu})^k \cdot p_0, k = 1, 2 \text{ i}$$
$$p_{c+r} = \frac{N!}{c! \cdot (N-c-r)!} \cdot (\frac{\lambda}{\mu})^c \cdot (\frac{\lambda}{c \cdot \mu})^r, r \in [1, 4].$$

$$p_1 = \binom{N}{1} p_0 \frac{\lambda}{\mu} = 0.0687$$
$$p_2 = \binom{N}{2} p_0 (\frac{\lambda}{\mu})^2 = 0.1375$$
$$p_3 = \frac{N(N-1)(N-2)}{c!} p_0 (\frac{\lambda}{\mu})^2 \frac{\lambda}{\mu \cdot c} = 0.2199$$
$$p_4 = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{c!} p_0 (\frac{\lambda}{\mu})^2 (\frac{\lambda}{\mu \cdot c})^2 = 0.2639$$
$$p_5 = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)}{c!} p_0 (\frac{\lambda}{\mu})^2 (\frac{\lambda}{\mu \cdot c})^3 = 0.2111$$
$$p_6 = \frac{N!}{c!} p_0 (\frac{\lambda}{\mu})^2 (\frac{\lambda}{\mu \cdot c})^4 = 0.0844$$

Srednji broj zauzetih kanala za opsluživanje (srednji broj zauzetih viljuškara):

$c_z = 0p_0 + 1p_1 + 2p_3 ... + 2p_6 = p_1 + 2(1 - p_0 - p_1) = 0.0687 + 2(1 - 0.0143 - 0.0687) = 1.9027$

Srednji koeficijent zauzetosti kanala za opsluživanje (viljuškara) je:

$$\frac{c_z}{c} = \frac{1.9027}{2} = 0.9514$$

To znači da je 95% radnog vremena svaki od viljuškara zauzet.
Novčani ubitak zbog čekanja mašina usled zauzetosti viljuškara je:

$$C_{iz}^{c=2} = L \cdot C_w = 3.62 \cdot 5000 = 18100 \frac{\text{din}}{\text{min}}$$

U odnosu na jednokanalni sistem (zadatak 4) troškovi zastoja su manji za:

$$\Delta C_{iz}^{c=2} = 23800 - 18100 = 5700 \frac{\text{din}}{\text{min}}$$

Zadatak 3.3

Viljuškari u regalnom skladištu obavljaju poslove unosa paleta u skladište. Viljuškari zahvataju palete sa rolganga, na kome ima mesta za tri palete, odakle ih odvoze i unose u regale. Rolgang predstavlja vezu između proizvodnog pogona, u kojem se gotovi proizvodi paletizuju, i skladišta koji su fizički odvojeni pregradnim zidom. Srednji ciklus viljuškara na unosu paleta u regale iznosi $\bar{t}_{ops} = 127.56$ sekundi. Iz proizvodnog pogona prosečno svakih $\bar{t}_d = 45$ sekundi na rolgang se postavlja po jedna paleta.

Odrediti potreban broj viljuškara tako da srednji broj paleta na rolgangu bude manji od 2 (dva).

Rešenje:

Pod pretpostavkom da je dolazni proces – Poasonov proces i da je srednje vreme opsluživanja raspodeljeno po eksponencijalnoj raspodeli, ovaj sistem opsluživanja se može modelirati kao višekanalni sistem opsluživanja sa tri mesta u redu, tj. sistem opsluživanja M/M/c/(c+3).

broj kanala za opsluživanje:	$c =?$ - potrebno odrediti
broj mesta u redu:	$m = 3$,
srednji intenzitet dolaska paleta:	$\lambda = \frac{1}{\bar{t}_d} = \frac{1}{45} = 0.0222$ paleta u sekundi, $\lambda = 1.3333$ jedinice u minuti,
srednji intenzitet opsluživanja paleta:	$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{ops}} = \frac{1}{127.56} = 0.00784$ paleta u sekundi $\rightarrow \mu = 0.4704$ jedinice u minuti.

Rolgang u ovom slučaju predstavlja red. Srednji broj jedinica (paleta) u redu za višekanalni sistem sa ograničenim redom određuje se na osnovu izraza:

$$L_q = \rho \cdot p_c \cdot \frac{1 - \rho^m \cdot [m \cdot (1 - \rho) + 1]}{(1 - \rho)^2}$$

Iz zadatog uslova sledi da je potrebno odrediti c tako da L_q mora biti manje od 2. Ono što takođe mora važiti jeste da koeficijent iskorišćenja kapaciteta kanala opsluživanja (ρ) mora biti manji ili jednak 1, te važi:

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} \leq 1 \ \rightarrow c \geq \frac{\lambda}{1 \cdot \mu}$$

$$c \geq \frac{1.3333}{1 \cdot 0.4704} = 2.8344 \rightarrow \text{ usvaja se } c = 3$$

Sada je jasno da će sistem biti višekanalni, sa minimum tri viljuškara (kanala za opsluživanje), maksimalnog koeficijenta iskorišćenja kapaciteta $\rho = \frac{1.3333}{3 \cdot 0.4704} = 0.9448$.

Dalji postupak rešavanja zadatka sastoji se u proračunu potrebnih verovatnoća stanja sistema (p_0 i p_c) za usvojeni broj kanala opsluživanja, sve dok se ne dobije srednji broj jedinica u redu manji od 2.

Za c=3

$$p_c = p_k = \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} p_0, \text{ za k=c, odnosno k=3}$$

$$p_3 = \frac{(3 \cdot 0.9448)^3}{3!} p_0 = 0.1738$$

-gde je p_0 verovatnoća da u sistemu nema jedinica

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c} \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot \rho \frac{1-\rho^m}{1-\rho}} = 0.0458$$

Srednji broj jedinica koje čekaju u redu, sa usvojena tri viljuškara, određuje se iz sledećeg izraza:

$$\begin{aligned} L_q &= \rho \cdot p_3 \cdot \frac{1-\rho^3 \cdot [3 \cdot (1-\rho)+1]}{(1-\rho)^2} \\ &= 0.9448 \cdot 0.1738 \cdot \frac{1-0.9448^3 \cdot [3 \cdot (1-0.9448)+1]}{(1-0.9448)^2} \\ &= 0.9142 \end{aligned}$$

Srednji broj paleta na rolgangu jeste 0.9142, što ispunjava uslov $L_q < 2$. Dakle, potreban broj viljuškara jeste 3 (tri).

Zadatak 3.4

U blok skladište lima koje radi u jednoj smeni (efektivno vreme rada $t_{ef} = 7.5$ sati) dolazi prosečno 30 kamiona na dan (Poasson-ov dolazni tok). Nosivost kamiona kojima se dovoze paketi lima je 20 tona. Dimenzije paketa lima su: $6000 \times 1000 \times 100$ mm. Istovar kamiona obavlja bočni viljuškar i pakete lima odlaže na prijemni deo blok skladišta. Kapacitet prijemnog dela blok skladišta je 5 paketa. Dalju manipulaciju paketa obavlja mosna dizalica. Srednje vreme trajanja ciklusa mosne dizalice na unošenju i uskladištenju paketa lima iznosi t_{ops}=2 min. Vreme trajanja opsluživanja je raspodeljeno po eksponencijalnoj raspodeli. Odrediti:

(a) Procenat paketa lima koji zbog zauzetosti prijemnog dela skladišta moraju biti odloženi na drugo mesto,

(b) Srednji broj paketa lima u prijemnom delu blok skladišta, i

(c) Verovatnoću da je prijemni deo blok skladišta prazan.

Rešenje:

Prijemni deo blok skladišta se može modelirati kao jednokanalni sistem opsluživanja sa ograničenim redom, gde mosna dizalica predstavlja kanal za opsluživanje, kapacitet prijemnog dela, od pet paletnih mesta, predstavlja red dok paketi lima predstavljaju jedinice koje zahtevaju opsluživanje. Kako je dolazni tok kamiona u blok skladište Poasson-ov i kako su vremena trajanja opsluživanja mosnom dizalicom raspodeljena po eksponencijalnoj raspodeli, prijemni deo blok skladišta može se modelirati kao jednokanalni sistem opsluživanja sa ograničenim redom, tj. sistem opsluživanja M/M/1/6.

Srednji intenzitet dolaska jedinica – paketa lima u blok skladište (λ) određuje se na osnovu mase paketa i broja dolazaka kamiona.

Masa paketa lima m_p određuje se kao:

$$m_p = l \times b \times h \times \gamma = 60 \times 10 \times 1 \times 7.5 = 4500 \text{ kg}$$

-gde je:
-dimenzije paketa: $60 \times 10 \times 1$ dm
-specifična masa lima: $\gamma = 7.5 \, \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

Broj paketa lima na kamionu (n_p) je:

$$n_p = \frac{G_k}{m_p} = \frac{10000}{4.5} = 4.44 \text{ , usvaja se } n_p = 4 \text{ paketa,}$$

-gde je $G_k = 10000$ kg - nosivost kamiona.

Srednji intenzitet dolaska paketa lima na dan određuje se kao:

$$\lambda = n_k \cdot n_p = 30 \cdot 4 = 120\ \frac{\text{paketa}}{\text{dan}}$$

-gde je $n_k = 4$ - srednji broj kamiona koji doveze pakete lima u jednom danu.

Srednji intenzitet dolaska paketa lima na sat dobija se kada se srednji intenzitet dolaska paketa lima na dan podeli sa efektivnim vremenom rada, tj.:

$$\lambda = \frac{120}{t_{ef}} = \frac{120}{7.5} = 16\ \ \text{paketa/sat}$$

broj kanala za opsluživanje:	$c = 1$,
broj mesta u redu:	$m = 5$,
srednji intenzitet dolaska paketa:	$\lambda = 16$ paketa na sat,
srednji intenzitet opsluživanja paketa:	$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{ops}} = \frac{1}{2}$ paketa u minuti $\rightarrow$
	$\mu = 30$ paketa na sat,
koeficijent iskorišćenja kanala za opsluživanje(intenzitet protoka):	$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} = \frac{16}{1 \cdot 30} = 0.5333$

(a) Procenat paketa lima, koji zbog zauzetosti prijemnog dela skladišta moraju biti odloženi na drugo mesto, predstavlja u stvari verovatnoću da će jedinica koja dolazi u sistem dobiti otkaz, tj. neće biti prihvaćena u sistem. Paket lima neće moći da se odloži na prijemni deo blok skladišta u slučaju da se jedan paket lima opslužuje, a njih pet se već nalaze u prijemnom delu, tj. kada u sistemu ima ukupno šest paketa lima. Verovatnoća otkaza P_{otk} u ovom slučaju definisana je verovatnoćom stanja sistema p_6 koja se za jednokanalni sistem sa ograničenim redom izračunava se na osnovu sledećeg izraza:

$$P_{otk} = p_i = \rho^i \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = \rho^6 \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = 0.5333^6 \cdot \frac{1-0.5333}{1-0.5333^7} = 0.0109$$

što znači da približno 1.1% od ukupnog broja paketa lima neće biti moguće odložiti na prijemni deo blok skladišta.

(b) Srednji broj paketa lima u prijemnom delu blok skladišta predstavlja srednji broj jedinica u redu L_q i određuje se na osnovu izraza:

$$L_q = \rho^2 \cdot \frac{1-\rho^m \cdot [m \cdot (1-\rho)+1]}{(1-\rho)\cdot(1-\rho^{m+2})} = 0.5283$$

(c) Prijemni deo blok skladišta je prazan u slučaju kada se u sistemu nalazi samo jedan paket lima koji se opslužuje i u slučaju kada u sistemu nema paketa limova. Verovatnoća da je prijemni deo blok skladišta je prazan određuje se kao zbir verovatnoća stanja sistema p_0 i p_1. Verovatnoće stanja sistema izračunavaju se na osnovu izraza:

$$p_i = \rho^i \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = 0.5333^i \cdot \frac{1-0.5333}{1-0.5333^{5+1}}$$

i za $i = 0$ i 1 iznose:

$$p_0 = 0.4725$$
$$p_1 = 0.2520$$

što znači da je verovatnoća da je prijemni deo blok skladišta prazan 0.7245 ili 72.45 %.