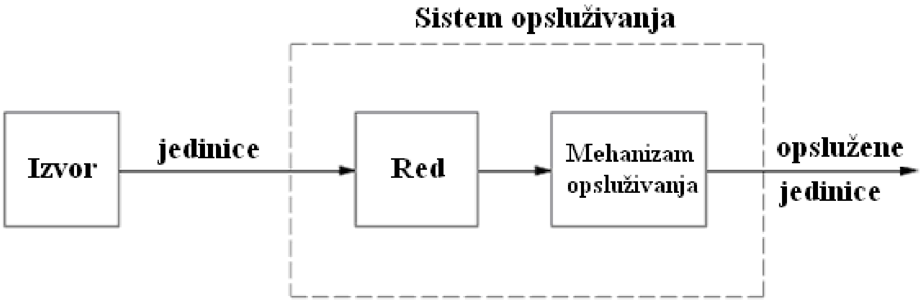
STRUKTURA MODELA SISTEMA OPSLUŽIVANJA

Elementarni proces opsluživanja

Elementarni proces opsluživanja, primenjen u najvećem broju modela opsluživanja je sledeći: *Jedinice (klijenti, korisnici itd.),* koje zahtevaju opsluživanje, se generišu u vremenu iz *Izvora*. Jedinice ulaze u *Sistem opsluživanja* i staju u *Red*. U posebnim slučajevima, jedinice iz reda se prihvataju na opsluživanje iz reda po nekom pravilu zvanom *disciplina u redu*. *Mehanizam opsluživanja* tada pruža zahtevano opsluživanje datoj jedinici, nakon čega jedinica napušta sistem opsluživanja. Elementarni proces opsluživanja je prikazan na slici 1.



Slika 1. Elementarni proces opsluživanja.

Izvor (jedinica)

Osnovna karakteristika izvora jedinica je njegova veličina. Veličina izvora predstavlja ukupan broj jedinica koje mogu zahtevati opsluživanje u vremenu tj. ukupan broj određenih potencijalnih jedinica (klijenata). Ovaj broj potencijalnih jedinica predstavlja tzv. **dolaznu populaciju.**

Veličina izvora može da se pretpostavi da bude konačna ili beskonačna. U slučaju kada je izvor jedinica beskonačan analiza ulaznog procesa je daleko lakša i zato se pretpostavka beskonačnog izvora jedinica usvaja za svaki model sistema opsluživanja koji eksplicitno ne zahteva suprotno tj. konačan izvor jedinica. Slučaj kada je izvor jedinica konačan je mnogo složeniji za analizu zato što broj jedinica u sistemu opsluživanja utiče na broj potencijalnih jedinica izvan sistema u svakom vremenskom trenutku. Drugim rečima pretpostavka konačnog izvora jedinica mora se uvesti, ako na intenzitet kojim izvor generiše nove jedinice značajno utiče broj jedinica u sistemu opsluživanja.

Druga značajna karakteristika izvora je statistički model po kome se generiše dolazak jedinica u sistem. Uobičajena pretpostavka je da se dolazak jedinica u sistem opsluživanja predstavlja tzv. Poason–ovim procesom. Karakteristika Poason-ovog dolaznog procesa, jedinica u sistem opsluživanja, je ta da je broj jedinica *(x)* koji u nekom vremenskom intervalu *(t)* dođu u sistem definisan Poason-ovom raspodelom:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{(\lambda \cdot t)^x \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{x!}, x = 0,1,2, \ldots ,n$$

Ovo je slučaj kada se dolasci jedinica u sistem opsluživanja događaju na slučajan način ali sa konstantnim prosečnim intenzitetom *(λ)*, bez obzira na to koliko je jedinica već u sistemu (što zahteva beskonačan izvor jedinica).

Druga značajna karakteristika Poason-ovog dolaznog procesa (proizilazi iz prve) je da su vremena između dva uzastopna dolaska jedinica u sistem opsluživanja raspodeljena po Eksponencijalnoj raspodeli:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \quad t \geq 0.$$

gde je: λ – intenzitet dolaska jedinica u sistem opsluživanja.

Poason-ov dolazni proces jedinica u sistem opsluživanja naziva se još i prost dolazni tok jedinica u sistem opsluživanja.

Red

Red je mesto gde jedinice čekaju pre nego što budu opslužene. Red se karakteriše maksimalnim dopuštenim brojem jedinica koje može jednovremeno da prihvati. Redovi mogu biti konačne ili beskonačne veličine u zavisnosti od broja jedinica koje mogu da prihvate. Pretpostavka da je red beskonačan je standardna kod većine modela sistema opsluživanja, čak i u situacijama kada postoji relativno velika gornja granica dopuštenog broja jedinica u redu jer uzimanje u obzir velike gornje granice broja jedinica u redu dodatno komplikuje analizu sistema opsluživanja.

U slučaju kada je gornja granica broja jedinica u redu dovoljno mala, što znači da bi se ona relativno često dostizala, neophodno je pretpostaviti pri modeliranju sistema opsluživanja konačan red.

Disciplina u redu

Disciplina u redu se odnosi na redosled kojim se jedinice u redu prihvataju na opsluživanje. Na primer, disciplina može da bude: first-in-first-out (**FIFO**), last-in-first-out (**LIFO**), na slučajan način, u skladu sa definisanim prioritetom itd. **FIFO** disciplina se obično pretpostavlja u modelima sistema opsluživanja, osim ako samim modelom nije definisano suprotno.

Mehanizam opsluživanja

Mehanizam opsluživanja se sastoji od jednog ili više modula (faza) opsluživanja, gde svaki modul sadrži jedan ili više paralelnih kanala za opsluživanje. Ako u sistemu opsluživanja ima više od jednog modula za opsluživanje, tada jedinice (klijenti) bivaju opsluživani u više faza. U jednom od modula za opsluživanje, jedinicu na opsluživanje prihvata jedan od paralelnih kanala za opsluživanje i kompletno je opslužuje. Model sistema opsluživanja mora da definiše broj modula (faza) opsluživanja kao i broj kanala za opsluživanje u svakom od modula. Najjednostavniji modeli sistema opsluživanja sastoje se od jednog modula opsluživanja i jednog ili više kanala za opsluživanje.

Vreme koje protekne od trenutka kada je jedinica prihvaćena na opsluživanje pa do završetka opsluživanja, naziva se **vreme opsluživanja**. Svaki model sistema opsluživanja mora da definiše raspodelu verovatnoća vremena opsluživanja za svaki kanal za opsluživanje. Uobičajena je pretpostavka da svi kanali za opsluživanje u jednom modulu (fazi) opsluživanja imaju istu raspodelu vremena opsluživanja.

Raspodela vremena opsluživanja koja se najčešće upotrebljava u praksi je Eksponencijalna raspodela:

$$f(t)=\mu\cdot e^{-\mu\cdot t},\quad t\geq 0.$$

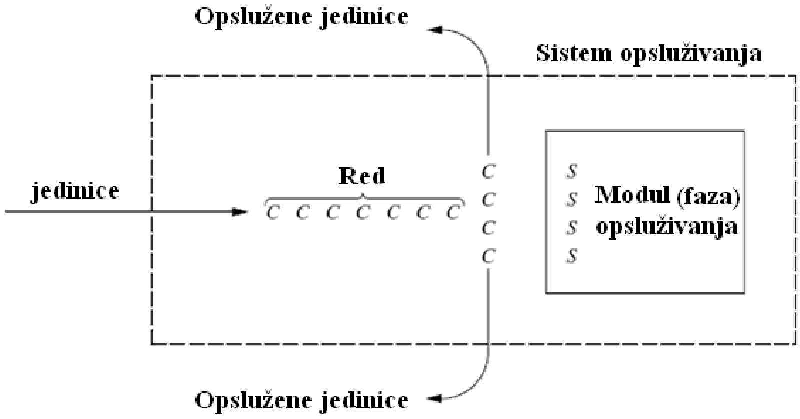
gde je: μ – intenzitet opsluživanja.

Ostale značajne raspodele kojima se može opisati vreme trajanja opsluživanja su: Erlang-ova raspodela, Normalna raspodela kao i konstantno vreme opsluživanja.

Elementarni proces opsluživanja

Jedan red (koji s vremena na vreme može biti prazan) se formira ispred jednog modula za opsluživanje, koji sadrži jedan ili više kanala za opsluživanje. Svaka jedinica, generisana od strane izvora beskonačne veličine, se opslužuje jednim kanalom za opsluživanje, verovatno posle određenog vremena provedenog u redu.

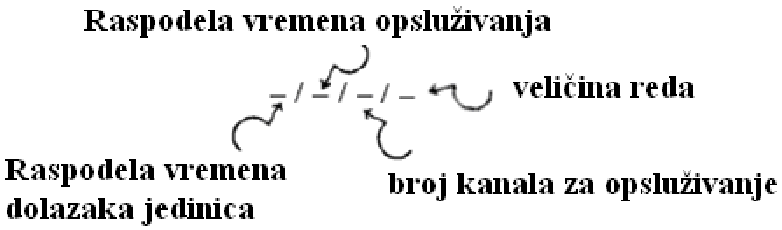
Kanal za opsluživanje ne mora da bude samo jedna osoba, može da bude grupa ljudi, npr. ekipa za popravke koja udružuje snage i zajednički istovremeno vrši opsluživanje jedinice. Dalje, kanali za opsluživanje ne moraju biti ljudi. U mnogo slučajeva kanal za opsluživanje je mašina, vozilo, elektronski uređaj itd. Takođe jedinice u redu ne moraju biti ljudi, na primer mogu biti delovi (palete) koji čekaju odgovarajuću operaciju date mašine, ili mogu biti kola koja čekaju ispred naplatne rampe.



Slika 2. Elementarni sistem opsluživanja (*C* – jedinice; *S* – kanali za opsluživanje).

Za formiranje modela sistema opsluživanja nije neophodno da fizički postoji red ispred fizičkog modula za opsluživanje. Jedinice koje formiraju “red” mogu umesto toga biti razmeštene u nekoj oblasti i čekati da kanal za opsluživanje “dođe” do njih, npr. mašine koje čekaju na popravak. Jedan ili više kanala za opsluživanje dodeljeni datoj oblasti predstavljaju modul opsluživanja za tu oblast.

U najvećem broju slučajeva u modelima sistema opsluživanja se pretpostavlja da su vremena između dolazaka jedinica u sistem međusobno nezavisna i identično raspodeljena, kao i da su vremena opsluživanja međusobno nezavisna i identično raspodeljena. Takvi modeli sistema opsluživanja označavaju se na sledeći način (*Kendall*):



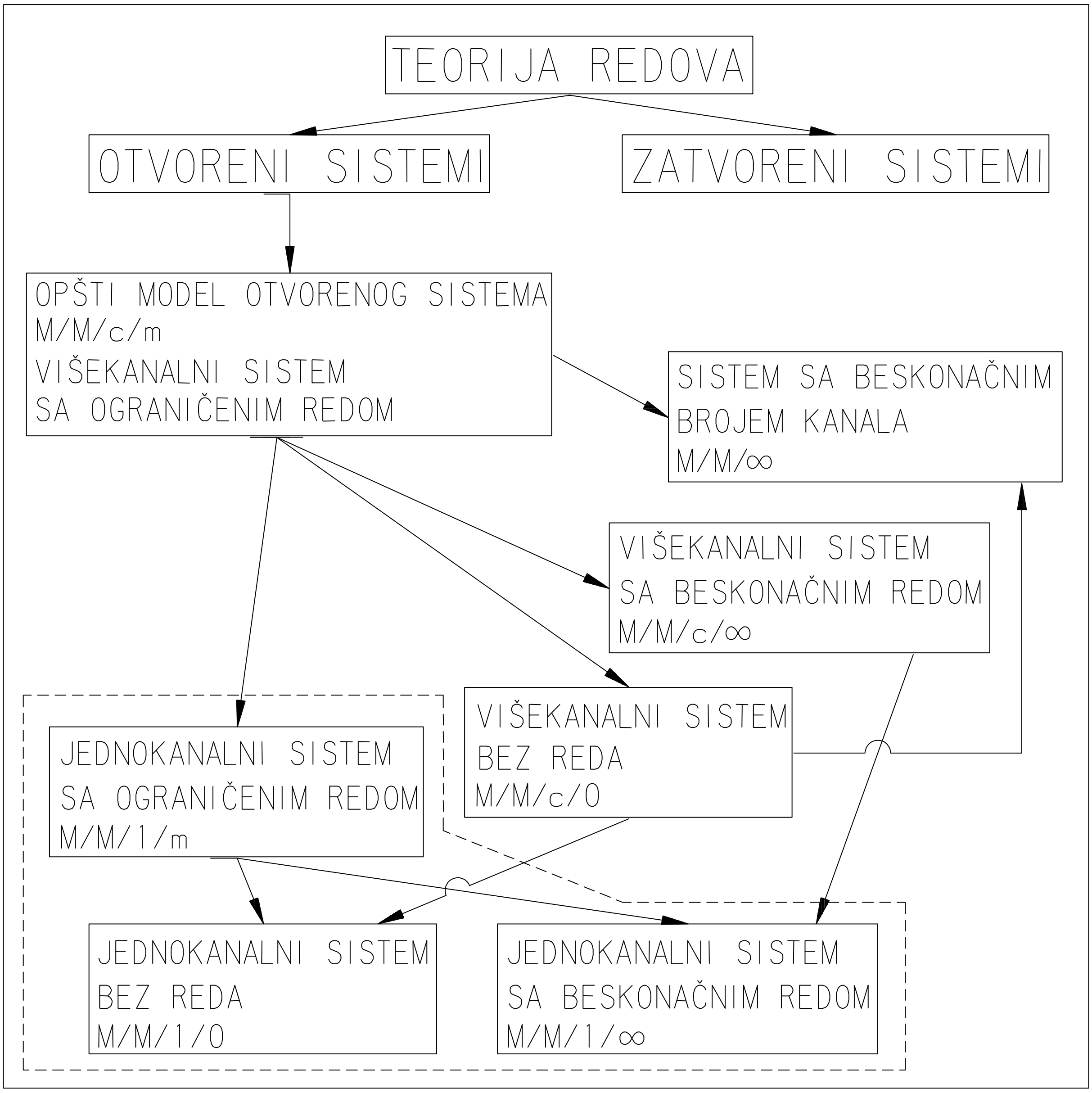
gde su oznake raspodela vremena dolazaka jedinica u sistem i vremena opsluživanja sledeće:
M = eksponencijalna raspodela,
N = Normalna raspodela,
E_k = Erlang-ova raspodela sa parametrom k,
D = konstantna vremena.

Oznake za broj kanala za opsluživanje i broj mesta u redu su brojevi za konačan broj kanala odnosno mesta u redu i simbol “∞” kada je broj kanala odnosno mesta u redu beskonačan.

Osnovna podela sistema opsluživanja je na tzv. “otvorene” i “zatvorene” sisteme opsluživanja. Izvor jedinica koje zahtevaju opsluživanje kod otvorenog sistema se nalazi van granica sistema i beskonačan je. Izvor kod zatvorenih sistema je konačan tj. izvor predstavljaju same jedinice koje se nalaze u sistemu i zahtevaju opsluživanje, tako da intenzitet zahteva za opsluživanjem zavisi od stanja sistema tj. od toga koliko je jedinica već zahtevalo opsluživanje.

OPŠTI MODEL M/M/c/m OTVORENOG SISTEMA OPSLUŽIVANJA

Opšti model otvorenog sistema opsluživanja predstavlja višekanalni sistem opsluživanja sa ograničenim redom i iz koga proizilaze svi ostali modeli kako je to prikazano na slici 4. Ovaj opšti model obeležava sa M/M/c/m.

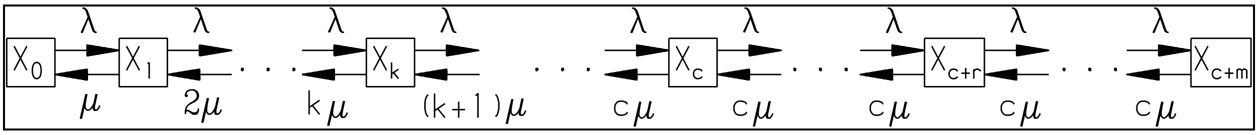


Slika 4. Klasifikacija modela sistema opsluživanja – teorije redova.

Karakteristike ovog modela sistema su:
– sistem ima *c* kanala za opsluživanje,
– sistem ima *m* mesta u redu,

– dolazni tok jedinica je prost sa intenzitetom λ,
– tok opsluženih jedinica iz svakog kanala je prost sa intenzitetom μ,
– jedinice se iz reda na opsluživanje prihvataju po pravilu “prva prispela - prva opslužena” (FIFO disciplina).

Stanje sistema se određuje na osnovu broja jedinica u sistemu, dijagram stanja sistema je dat na slici 5.



Slika 5. Dijagram stanja višekanalnog sistema opsluživanja.

Razlikuju se tri grupe stanja sistema sa stanovišta statusa jedinice koja zahteva opsluživanje i to:
– u trenutku dolaska jedinice na opsluživanje u sistemu ima od 0 do (c-1) jedinica, jedinica se tada prihvata u sistem i direktno ide na opsluživanje.
– u trenutku dolaska jedinice na opsluživanje u sistemu ima od c do (c+m-1) jedinica, jedinica se tada prihvata u sistem, staje u red i čeka na opsluživanje.
– u trenutku dolaska jedinice na opsluživanje u sistemu ima (c+m) jedinica (sistem je pun), tada se jedinica ne prihvata u sistem već biva odbijena.

Sistem se može naći u nekom od sledećih stanja:
– X_0 - u sistemu nema jedinica, svi kanali su slobodni i u redu nema jedinica,
– X_k (k=1,2, ... ,c) - u sistemu se nalazi *k* jedinica i sve se opslužuju, u redu nema jedinica,
– X_{c+r} (r=1,2, ... ,m) - u sistemu se nalazi (c+r) jedinica od kojih se *c* jedinica opslužuje a *r* jedinica se nalazi u redu i čeka na opsluživanje.

Na osnovu dijagrama stanja (slika 5.) postavlja se sistem diferencijalnih jednačina promene verovatnoća stanja sistema u vremenu. (p_i = P(X=i), i=1,2, ... ,c+m)

$$p_0'(t) = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t);$$

. . . .

$$p_k'(t) = -[\lambda + k \cdot \mu] \cdot p_k(t) + \lambda \cdot p_{k-1}(t) + (k+1) \cdot \mu \cdot p_{k+1}(t); \quad \text{za k=1,2, ... ,(c-1)}$$

. . . .

$$p_{c+r}'(t) = -[\lambda + c \cdot \mu] \cdot p_{c+r}(t) + \lambda \cdot p_{c+r-1}(t) + c \cdot \mu \cdot p_{c+r+1}(t); \quad \text{za r=0,1,2, ... ,(m-1)}$$

. . . .

$$p_{c+m}'(t) = -c \cdot \mu \cdot p_{c+m}(t) + \lambda \cdot p_{c+m-1}(t); \qquad (1)$$

U stacionarnom režimu rada koji podrazumeva da je: λ = const., μ = const., $t \to \infty$ tj. $p_i'(t) = 0$ (i=0,1,2, ... ,c+m) sistem diferencijalnih jednačina (1) prelazi u sistem algebarskih jednačina.

$$
\begin{aligned}
&0 = -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1; \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&0 = \lambda \cdot p_{k-1} - [\lambda + k \cdot \mu] \cdot p_k + (k+1) \cdot \mu \cdot p_{k+1}; \qquad \text{za } k=1,2, \ldots ,(c-1) \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&0 = \lambda \cdot p_{c+r-1} - [\lambda + c \cdot \mu] \cdot p_{c+r} + c \cdot \mu \cdot p_{c+r+1}; \qquad \text{za } r=0,1,2, \ldots ,(m-1) \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&0 = \lambda \cdot p_{c+m-1} - c \cdot \mu \cdot p_{c+m};
\end{aligned} \tag{2}
$$

Uvođenjem parametra ρ koji predstavlja opterećenje kanala za opsluživanje i gde je:

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} \tag{3}$$

i normirajućeg uslova (zbir svih verovatnoća stanja mora biti jednak jedinici):

$$\sum_{k=0}^{c} p_k + \sum_{r=1}^{m} p_{c+r} = 1; \tag{4}$$

kao rešenje sistema algebarskih jednačina (2) dobija se zakon raspodele verovatnoća stanja višekanalnog sistema opsluživanja sa ograničenim redom tj. opšti zakon raspodele verovatnoća stanja otvorenih sistema opsluživanja. Zakon raspodele verovatnoća stanja je u osnovi funkcija četiri parametra: broja kanala (c), broja mesta u redu (m), intenziteta dolaznog toka (λ) i intenziteta opsluživanja (μ). Zamenom parametara λ, μ i c parametrom ρ (3) dobija se da je opšti zakon raspodele verovatnoća stanja otvorenih sistema funkcija tri parametra i to: c, m i ρ.

$$
P(X = i) = P_{c,m,\rho,i} = \begin{cases} \dfrac{(c \cdot \rho)^i}{i!} \cdot p_0; \text{ za } i = 1,2,\ldots,c \\[2ex] \dfrac{\rho^{i-c} \cdot (c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot p_0; \text{ za } i = c+1, c+2, \ldots, c+m \end{cases} \tag{5}
$$

gde je:

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{c} \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot \rho \cdot \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho}} \tag{6}$$

Osnovne karakteristike višekanalnog sistema opsluživanja su:

- Verovatnoća opsluživanja (P_{ops}),
- Srednji broj zauzetih kanala (c_z),
- Verovatnoća postojanja reda (P_{pr}),
- Srednji broj jedinica u redu (N_w),
- Srednji broj jedinica u sistemu (N_{ws}),
- Srednje vreme koje jedinica provede u redu (t_w),
- Srednje vreme koje jedinica provede u sistemu (t_{ws}).

Verovatnoća opsluživanja (P_{ops})

Verovatnoća opsluživanja predstavlja verovatnoću da će jedinica koja zahteva opsluživanje biti prihvaćena u sistem (i biti opslužena) tj. neće biti odbijena. Jedinica će biti prihvaćena u sistem ako ima makar jedno mesto u redu prazno. Verovatnoća opsluživanja se izračunava na sledeći način:

$$P_{ops} = \sum_{i=0}^{c+m-1} p_i = 1 - p_{c+m} = 1 - \rho^m \cdot p_c ;$$

Srednji broj zauzetih kanala (c_z)

Srednji broj zauzetih kanala predstavlja očekivani broj kanala za opsluživanje koji rade. Srednji broj zauzetih kanala se izračunava na sledeći način:

$$c_z = \sum_{k=0}^{c} k \cdot p_k + c \cdot \sum_{r=1}^{m} p_{c+m} = p_0 \cdot \sum_{k=0}^{c} k \cdot \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + c \cdot \rho \cdot \frac{1-\rho^m}{1-\rho} \cdot p_c ;$$

Verovatnoća postojanja reda (P_{pr})

Verovatnoća postojanja reda predstavlja verovatnoću da ima jedinica u redu koje čekaju na opsluživanje. To su stanja sistema kada ima $c+1$ ili više jedinica u sistemu tj. X_{c+1}, X_{c+2}, ..., X_{c+m}. Verovatnoća postojanja reda se izračunava na sledeći način:

$$P_{pr} = p_{c+1} + p_{c+2} + ... + p_{c+m} = 1 - p_0 - p_1 -,...,- p_c \text{, tj.:}$$

$$P_{pr} = \sum_{r=1}^{m} p_{c+r} = p_c \cdot \sum_{r=1}^{m} \rho^r = p_c \cdot \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho};$$

Srednji broj jedinica u redu (N_w)

Srednji broj jedinica u redu predstavlja očekivanu veličinu reda. Da bi se odredio srednji broj jedinica u redu potrebno je definisati slučajnu promenljivu "broj jedinica u redu" (X_w) i njenu raspodelu verovatnoća. Raspodela verovatnoća slučajne promenljive X_w je:

$$X_w : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & m \\ p_0^r & p_1^r & p_2^r & \cdots & p_m^r \\ \sum_{k=0}^{c} p_k & p_{c+1} & p_{c+2} & \cdots & p_{c+m} \end{pmatrix}$$

gde je:
p_i (i=0,1, ...,c+m) – verovatnoće stanja sistema,
p_i^r (i=0,1, ...,m) – verovatnoće da ima 0,1,2, ...,m jedinica u redu, i
0,1,2, ...,m – realizacije slučajne promenljive X_w.

Srednji broj jedinica u redu izračunava se kao matematičko očekivanje slučajne promenljive X_w.

$$N_w = \sum_{i=0}^{m} i \cdot p_i^r = 0 \cdot \sum_{k=0}^{c} p_k + 1 \cdot p_{c+1} + 2 \cdot p_{c+2} + \ldots + m \cdot p_{c+m}, \text{ tj.}$$

$$N_w = \sum_{r=1}^{m} r \cdot p_{c+r} = p_c \cdot \sum_{r=1}^{m} r \cdot \rho^r = p_c \cdot \rho \cdot (1 + 2 \cdot \rho + 3 \cdot \rho^2 +,\ldots,+ m \cdot \rho^{m-1});$$ [1]

$$N_w = \rho \cdot p_c \cdot \frac{1 - \rho^m \cdot [m \cdot (1-\rho) + 1]}{(1-\rho)^2}.$$

Srednji broj jedinica u sistemu (N_{ws})

Srednji broj jedinica u sistemu predstavlja očekivani broj jedinica u sistemu, i može se odrediti kao matematičko očekivanje slučajne promenljive čija je raspodela verovatnoća definisana izrazom (5) tj. opštim zakonom raspodele verovatnoća stanja otvorenih sistema opsluživanja:

---

[1] Zbir prvih *m* članova geometrijskog reda: $1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^m = \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho}$,

prvi izvod gornjeg izraza: $1 + 2 \cdot \rho + 3 \cdot \rho^2 + \ldots + m \cdot \rho^{m-1} = \frac{1-\rho^m \cdot [m \cdot (1-\rho) + 1]}{(1-\rho)^2}$.

$$N_{ws} = \sum_{i=0}^{c+m} i \cdot p_i = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + ... + (c+m) \cdot p_{c+m},$$

Srednji broj jedinica u sistemu takođe se može dobiti kao:

$$N_{ws} = c_z + N_w .$$

Srednje vreme koje jedinica provede u redu (t_w)

Srednje vreme koje jedinica provede u redu predstavlja očekivano vreme koje jedinica provede u redu i može se dobiti direktno primenom *Little* – ove formule tj. kada se srednji broj jedinica u redu (N_w) podeli sa intenzitetom dolaska jedinica u sistem ($\bar{\lambda}$):

$$t_w = \frac{N_w}{\bar{\lambda}} .$$

gde je:

$$\bar{\lambda} = \lambda \cdot (1 - p_{c+m})$$

Srednje vreme koje jedinica provede u sistemu (t_{ws})

Srednje vreme koje jedinica provede u sistemu predstavlja očekivano vreme koje jedinica provede u sistemu i može se dobiti direktno primenom *Little* – ove formule tj. kada se srednji broj jedinica u sistemu (N_{ws}) podeli sa intenzitetom dolaska jedinica u sistem ($\bar{\lambda}$):

$$t_{ws} = \frac{N_{ws}}{\bar{\lambda}} .$$

gde je:

$$\bar{\lambda} = \lambda \cdot (1 - p_{c+m})$$