



Продуктивност фактора производње

- Вежба 1 -

Асистент: Мартина Перишић, маг. инж. маш.

Имејл: mperisic@mas.bg.ac.rs

Кабинет: 404

Термин за консултације: четвртак, 13.00 часова



Подсетимо се теорије!



Производња је организовани процес трансформисања производних ресурса у производе или услуге.

Производне ресурсе можемо поделити у три категорије:

1. Рад
2. Капитал
3. Земљу

Ресурси су ограничени, а циљ је њиховом комбинацијом извући максимум.

Исход производње је **обим производње (Q)**.



Обим производње Q

Обим производње (Q) се може представити као функција фактора производње:

$$Q = Q(K, L)$$

где је K – удео фактора капитала у производњи и
 L – удео фактора рада у производњи.

Различите комбинације фактора могу дати исте или различите нивое производње. Како би се лакше сагледало који нивои фактора дају одређене нивое производње, користи се матрица производње два производна фактора (input – output table for production function).





Матрица производње два производна фактора

<i>L</i> \ <i>K</i>	1	2	3	4	5
1	10	14	17	20	22
2	14	20	24	28	32
3	17	24	30	27	39
4	20	28	40	40	45
5	22	32	39	36	39

$$Q = 17 \rightarrow 17 = f(3L, 1K)$$

$$Q = 17 \rightarrow 17 = f(1L, 3K)$$



Просечна продуктивност

Просечна продуктивност је показатељ који говори колика је количина производа по јединици утрошеног варијабилног фактора. Она се добија преко једнакости:

$$AP_L = \frac{Q}{L} \rightarrow \text{Просечна продуктивност фактора РАД}$$

Просечна продуктивност је увек позитиван број!





Маргинална (гранична) продуктивност

Маргинална продуктивност би представљала „бољи“ показатељ продуктивности и она показује колико се укупна количина производа променила са променом производног фактора за једну његову јединицу. Добија се преко израза:

$$MP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

Може ли маргинална продуктивност да буде негативна?



- У кратком року, један фактор је фиксан, а други варијабилан!
- Када се фиксира један од два производна фактора, онда се може сагледати продуктивност другог производног фактора, односно колико је фактора потребно за производњу одређеног нивоа производње.
- Ако се фиксира капитал- K , а рад - L пусти да варира:

	K	1	2	3	4	5
L						
1		10	14	17	20	22
2		14	20	24	28	32
3		17	24	30	27	39
4		20	28	40	40	45
5		22	32	39	36	39



Просечна продуктивност фактора рад (фактор капитал је фиксиран)

$K \backslash L$	1	2	3	4	5
1	10	14	17	20	22
2	14	20	24	28	32
3	17	24	30	27	39
4	20	28	40	40	45
5	22	32	39	36	39

Q	L	AP_L	MP_L
0	0	-	-
20	1	20	20
28	2	14	8
27	3	9	-1
40	4	10	13
36	5	7,20	-4



Када је реч о капиталу...

Просечна продуктивност **капитала** (рад је фиксиран):

$$AP_K = \frac{Q}{K}$$

- Маргинална продуктивност **капитала** (рад је фиксиран):

$$MP_K = \frac{\Delta Q}{\Delta K}$$



Када се рад фиксира на нивоу $L=3$

L	K	1	2	3	4	5
1		10	14	17	20	22
2		14	20	24	28	32
3		17	24	30	27	39
4		20	28	40	40	45
5		22	32	39	36	39

Q	K	AP_K	MP_K
0	0	-	-
17	1	17	17
24	2	12	7
30	3	10	6
27	4	6,75	-3
39	5	7,80	-12



Задатак:

Q	L	AP_L	MP_L
0	0	-	-
10	1		
22	2		
45	3		
52	4		
50	5		



Решење

Q	L	AP_L	MP_L
0	0	-	-
10	1	10	10
22	2	11	12
45	3	15	23
52	4	13	7
50	5	10	-2



Еластичност укупног производа



Еластичност укупног производа на промену варијабилног фактора је релативна промена укупног нивоа производње у односу на релативну промену варијабилног фактора. Другим речима за колико се процената промени обим производње, ако се варијабилни фактор промени за 1%.

Уколико се узме да је рад (L) тај варијабилни фактор, онда је еластичност укупног производа дата као:

$$\varepsilon_L = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{MP_L}{AP_L}$$

Уколико се за варијабилни фактор узме капитал (K), тада је еластичност укупног производа:

$$\varepsilon_K = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta K}{K}} = \frac{\Delta Q}{\Delta K} \cdot \frac{K}{Q} = \frac{MP_K}{AP_K}$$



Ако је капитал варијабилни фактор, попунити табелу:

Q	K	AP_K	MP_K	ϵ_K
0	0	-	-	-
3	1			
8	2			
12	3			
15	4			
14	5			



Q	K	AP_K	MP_K	ϵ_K
0	0	-	-	-
3	1	3	3	1,00
8	2	4	5	1,25
12	3	4	4	1,00
15	4	3,75	3	0,80
14	5	2,80	-1	-0,36



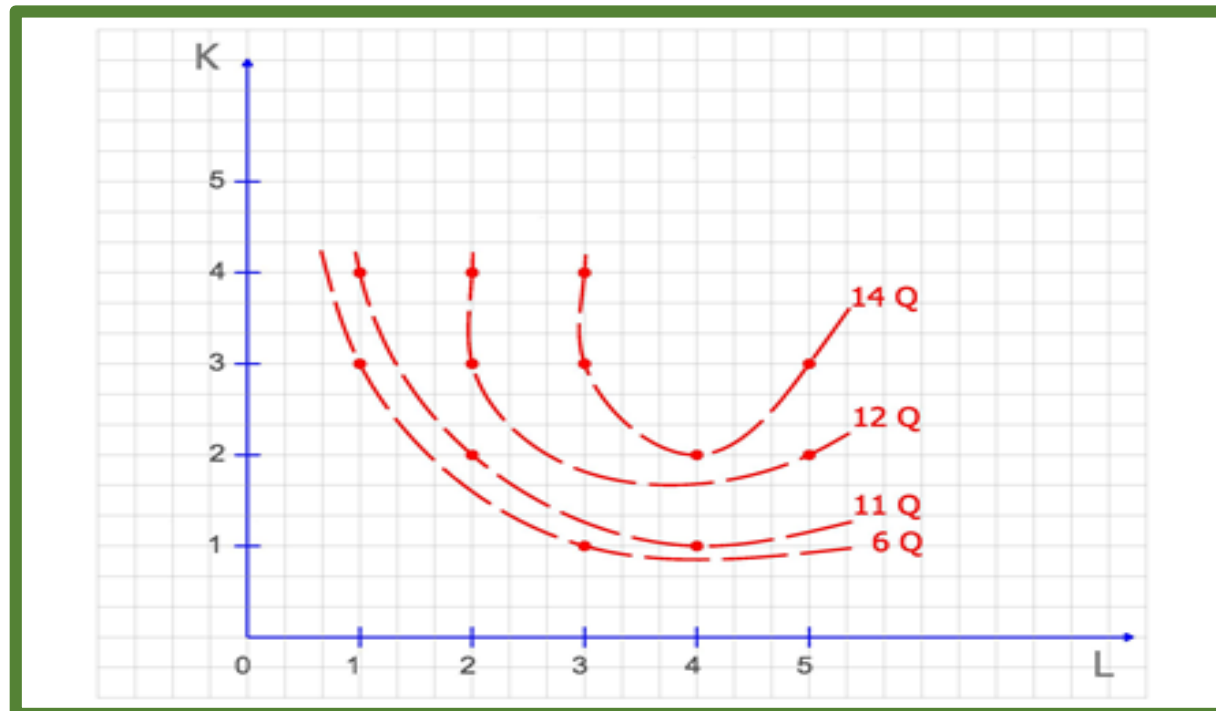
- ✓ Ако послодавац пусти у рад трећу машину за колико се % променио обим производње?
- ✓ Ако се пусти у рад и четврта машина како ће то утицати на промену обима производње?
- ✓ Шта се дешава када се покрене пета машина?





Изокванте

Изокванта је крива којом се повезују различите комбинације производних фактора, а које дају исти ниво производње.



Изокванте са слике:
14Q, 12Q, 11Q, 6Q



Гранична стопа техничке супституције (*MRTS*)

MRTS (Marginal Rate of Technical Substitution) показује по којој стопи се један фактор може заменити другим, а да се при томе остане на истом нивоу производње – на истој изокванти, односно по којој стопи би технологија била вољна да тргује/супституише један фактор другим када се крећемо дуж исте изокванте, тј. при истом обиму производње.

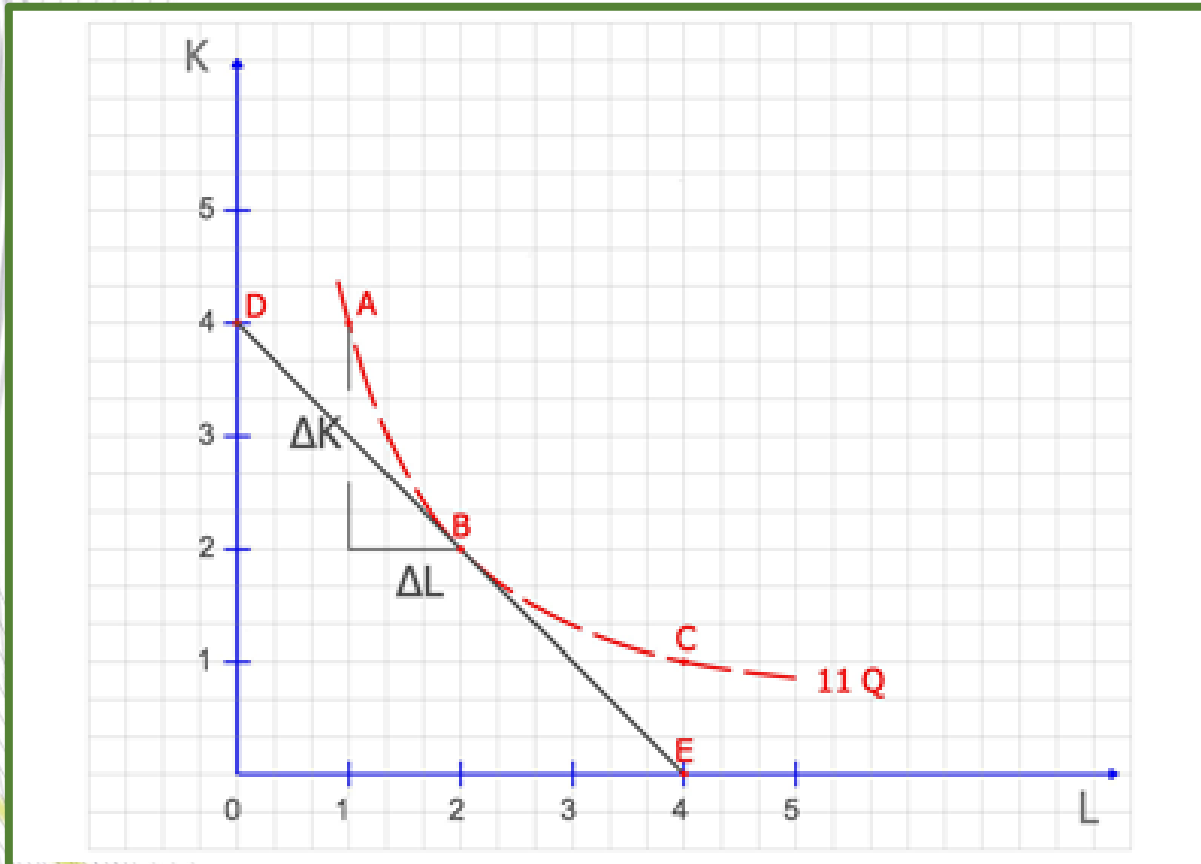
Математички, *MRTS* је коефицијент нагиба тангенте на изокванту.

$$MRTS = \frac{\Delta K}{\Delta L}$$



Гранична стопа техничке супституције (*MRTS*)

- Како је изокванта функција која је конвексна ка координатном почетку, нагиб њене тангенте је увек негативан. Зашто?
- Једначина праве гласи: $y = n \pm kx$. Конкретно, ако права са x осом заклапа туп угао, следи $-kx$. Супротно, од тога је $+kx$. Када се уради први извод изокванте добија се тангента која са десним остатком x осе заклапа туп угао (опадајућа функција), па је коефицијент правца тангенте негативан. Параметар n је одсечак на y оси.



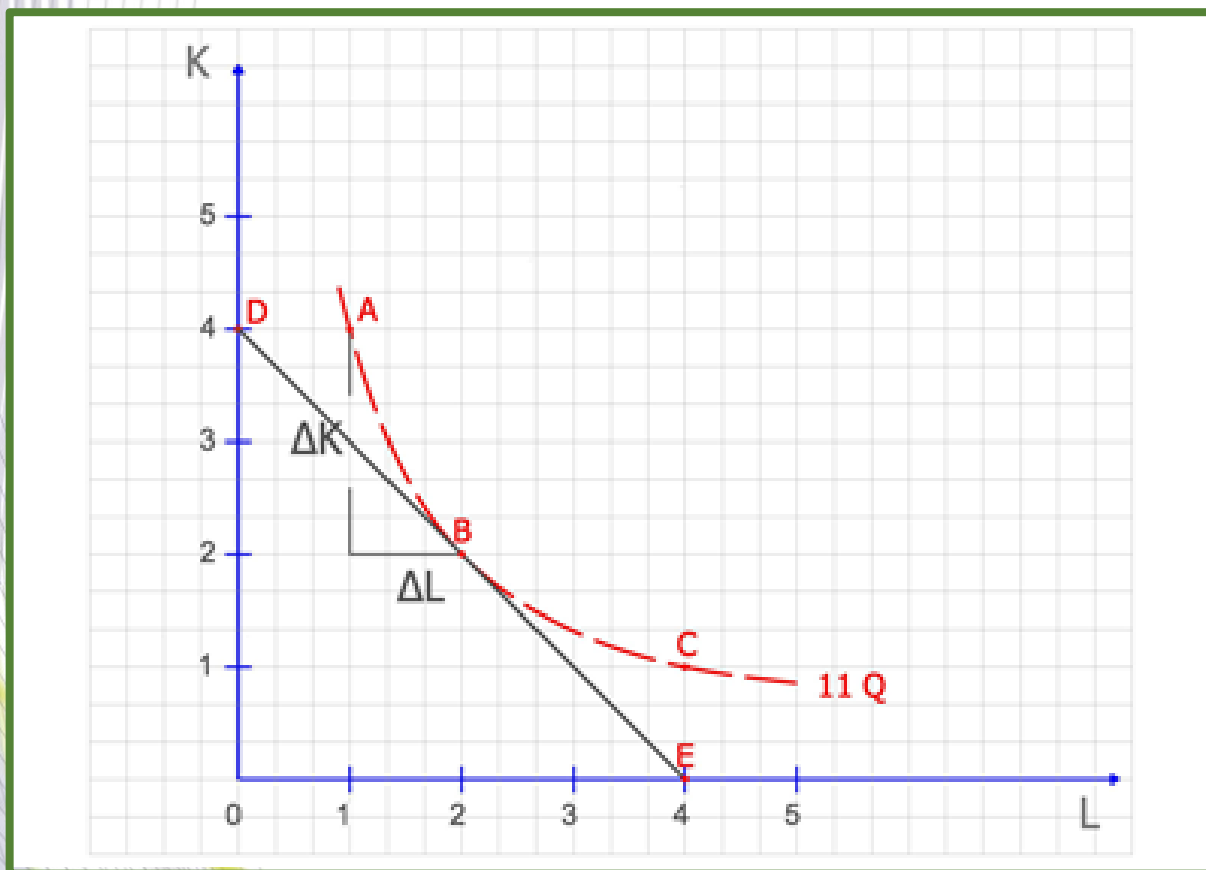
У тангентној тачки се налази оптималан избор.

У тој тачки (тачка B) MRTS је апсолутна вредност коефицијента смера тангенте.

Задатак:



1. Одредити граничну стопу техничке супституције на изокванти $11Q$ између тачака A и B .
2. Одредити $MRTS$ на изокванти $11Q$ између тачака B и C .
3. Одредити $MRTS$ на изокванти $11Q$ у тачки B .





1. У тачки A : $4K$ и $1L$, у тачки B : $2K$ и $2L$, дакле прелази се из $4K$ у $2K$ и из $1L$ у $2L$, па је

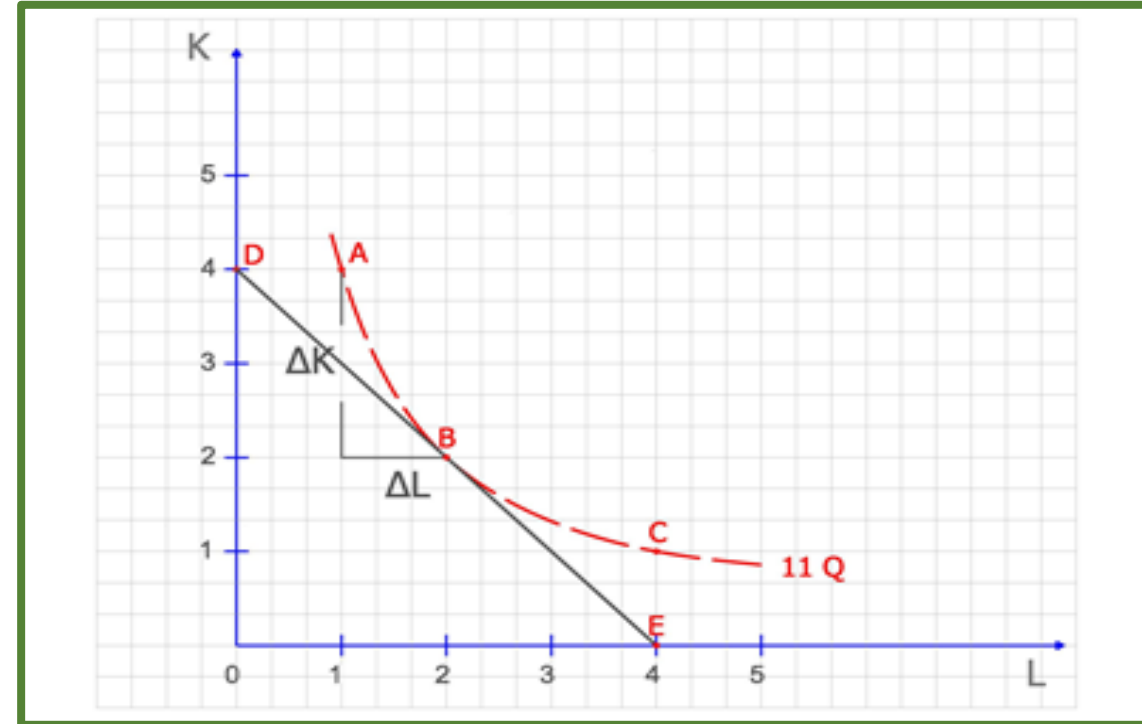
$$MRTS = \left| \frac{4K - 2K}{1L - 2L} \right| = \left| -\frac{2K}{L} \right| = 2$$

2. Тачка C комбинује $1K$ и $4L$. Дакле, из $2K$ (у тачки B) $2K$ прелази се на $1K \rightarrow$

$$MRTS = \left| \frac{2K - 1K}{2L - 4L} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

3. Тачка D се дели тачком E . Тангента у тачки B заклапа $\max 4K$ (D) и $\max 4L$ (E), те се дели $4K$ са $4L \rightarrow$

$$MRTS = \frac{4K}{4L} = 1$$



Ако је $MRTS$ константна дуж целе изокванте, тада су фактори производње савршени супститути.



Трошкови производње

- Одабир самог нивоа производње у великој мери зависи и од **расположивог буџета послодавца**. Претпоставља се да послодавац цео свој буџет (новац који има на располагању) улаже у производњу, те њиме ангажује факторе производње – **рад** и **капитал**. На овај начин се формирају **трошкови производње**. Дакле потребно је произвести одређени ниво од **Q** производа и за то је потребно **ангажовати K** капитала и **L** рада. На располагању је **C** новца. **Од чега зависи да ли ће се тај ниво достићи?**

Тачан одговор је од **цене фактора**.

Израз за решавање овог проблема је: $C = w \cdot L + r \cdot K$, где су **w** износ **наднице (цена рада)** и **r** камата (цена капитала).

Сада је потребно дефинисати појам *изотрошковне линије*.



Изотрошковна линија

Изотрошковна линија је функција која повезује све оне комбинације фактора производње који коштају исто.

Израчунава се као:

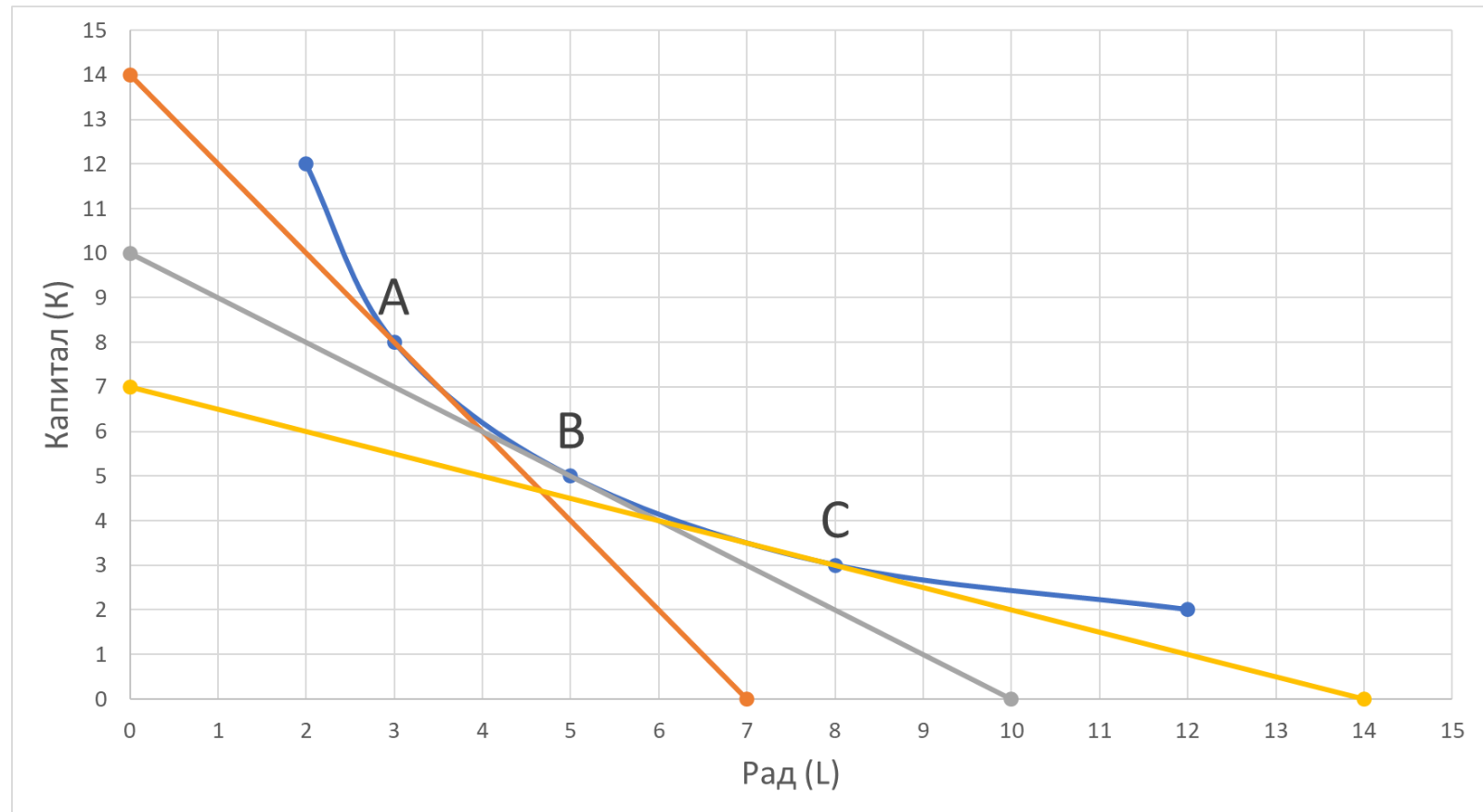
$K = \frac{c}{r} - \frac{w}{r} \cdot L$, где је $\frac{w}{r}$ коефицијент правца изотрошковне линије.

Оптимални ниво производње се дешава у тачки у којој је изотрошковна линија тангента на изокванту. У тој тачки важи:

$$MTRS = \frac{w}{r}$$

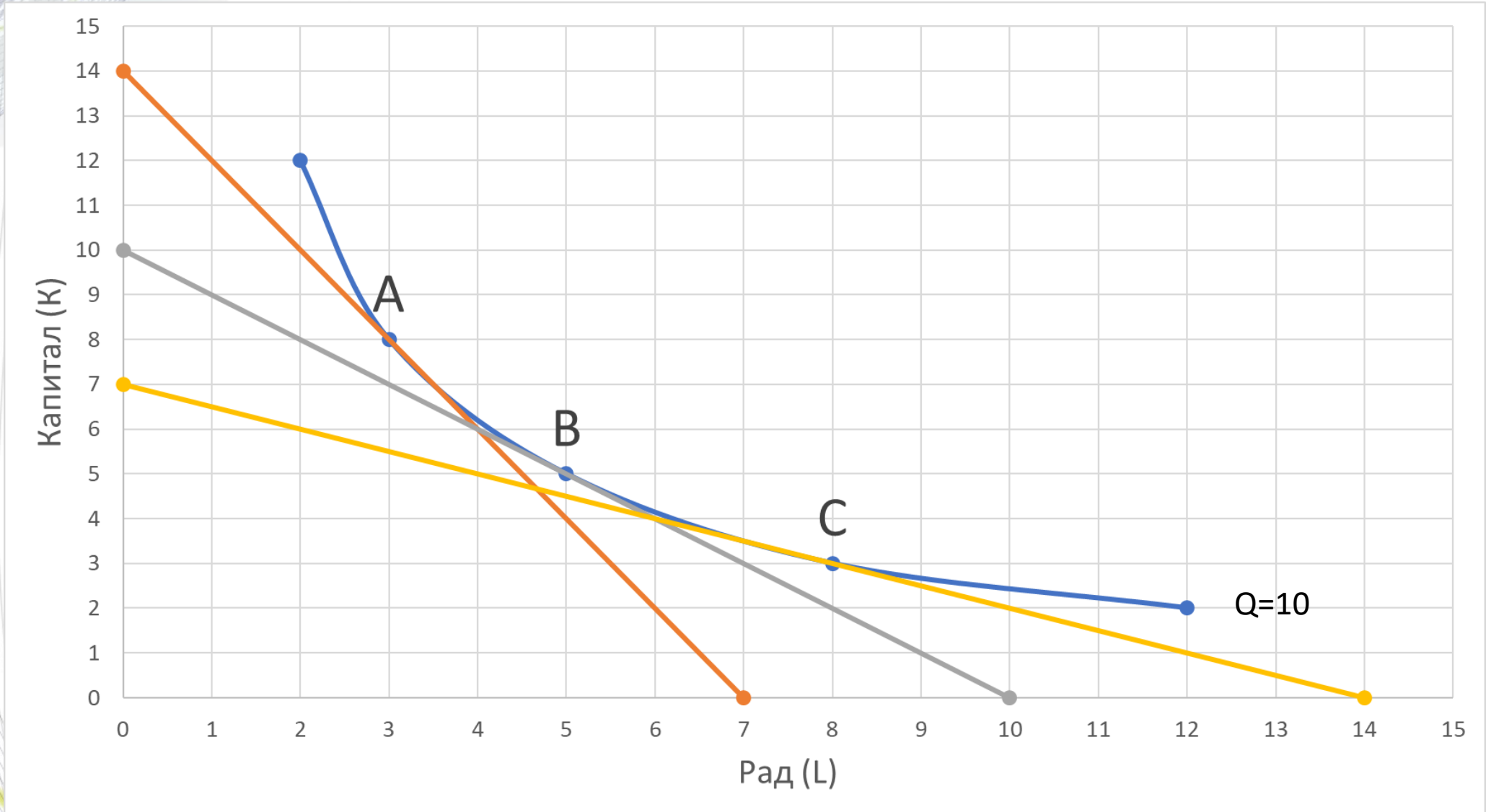


Различите изотрошковне линије на истој ИЗОКВАНТИ





1. Ако укупан трошак износи 1500, а $MRTS = 1$ колико износе цене фактора рада и капитала?
2. Израчунати $MRTS$ у тачки А. На основу тога одредити однос цене фактора производње, а затим и саме цене фактора, ако знамо да укупни трошкови износе 1500.
3. Ако је цена рада $w = 10$, а цена капитала $r = 20$, одредити оптималну комбинацију фактора, као и укупне трошкове производње.





1. $MRTS = |-1| = 1$ важи за тангенту, тј. Изотрошковну линију у тачки B . Са графика се може видети да је за производњу $10Q$ при тој изотрошковној линији потребно ангажовати 5 јединица капитала и 5 јединица рада. Овај задатак се решава на два начина.

Први начин преко функције укупног трошка C :

$$C = w \cdot L + r \cdot K,$$
$$1500 = w \cdot 5 + r \cdot K.$$

Како је: $MRTS = 1$, и $\frac{w}{r} = 1 \Rightarrow w = r$,

па је $C = w \cdot L + r \cdot K \rightarrow$

$$1500 = w \cdot 5 + w \cdot 5 \rightarrow 1500 = 10w \rightarrow w = 150.$$

Други начин преко дефиниције изотрошковних линија:

$\frac{1500}{10} = 150 \Rightarrow w = 150$; случај када се при тим ценама купује само рад. Аналогно, када се купује капитал добија се вредност за r .



2. Са графика се добија да је у тачки А, $MRTS = |-2| = 2$. То се добија када се 14 (максимални ниво капитала који досеже наранџаста изотрошковна линија) подели са 7 (максимални ниво рада који досеже иста изотрошковна крива). Тада је:

$$w = \frac{1500}{7} = 214,29$$
$$r = \frac{1500}{14} = 107,14$$



3. Овде је потребно на основу $MRTS$ одредити о којој изотрошковној линији је реч. У овом случају то је жута изотрошковна линија. Зашто је ово важно?

Тек када се одреди на коју изотрошковну линију се $MRTS$ односи, добиће се информација коју је тачку са графика потребно посматрати, односно који су оптимални фактори.

$MRTS$ се рачуна преко цене фактора: $w=10$ и $r=20$.

$$\Rightarrow \frac{w}{r} = \frac{1}{2} \text{ и ту је } \frac{7K}{14L} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow C = 10 \cdot 8 + 20 \cdot 3 = 140$$



Ако је tg угла тангенте на изокванту 1,33, количина утрошеног капитала 20, а укупни трошкови производње 1300 и цена капитала 15, одредити ниво рада.