Zadatak 1.1

Projektovati sistem za istovar vagona pomoću uređaja za kipovanje. U toku časa dolazi 20 vagona na istovar (Poasonov tok). Proces kipovanja na jednom uređaju za kipovanje vagona traje 5 min (konstantno vreme trajanja opsluživanja). Posle istovara ruda se otprema u pogon, preko istovarnog bunkera, dodavača i sistema trka.

Za dati sistem:

(a) Odrediti broj vagona koji čeka na utovar i srednje vreme koje vagon provede u sistemu.

(b) Ispitati kako se menjaju vremena čekanja u redu i vremena koje jedinica provede u sistemu, ako se definišu dva modula u okviru datog sistema.

Rešenje:

(a) Projektovanje bilo koje vrste sistema opsluživanja, u najvećem broju slučajeva, prevashodno podrazumeva definisanje parametara sistema kao što su broj kanala opsluživanja (c), srednji intenzitet opsluživanja (μ) i srednji intenzitet dolaska jedinica u sistem (λ). Kako su nam poslednja dva parametra zadata tekstom zadatka, jasno je da je prvobitno potrebno odrediti optimalan broj kanala za opsluživanje.

Da bi sistem mogao da funkcioniše, neophodno je da njegov koeficijent iskorišćenja kanala za opsluživanje (ρ) ne bude veći od jedinice. U ovom slučaju, ρ se može nazvati i intenzitetom protoka materijala kroz sistem, a izraz koji za njega važi je:

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu}$$

-gde je:

λ - srednji broj vagona koji dođu na ospluživanje u jedinici vremena ($\lambda = 20\ \frac{\text{vag}}{\text{h}}$),
μ - srednji broj opsluženih vagona u jedinici vremena,

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{ops}} = \frac{1}{5}\,\frac{\text{vagona}}{\text{min}} = \frac{1}{5}\,\frac{\text{vagona}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{60}{1}\,\frac{\cancel{\text{min}}}{\text{h}} = 12\,\frac{\text{vagona}}{\text{h}}$$

c - broj uređaja za kipovanje.

Kada je $\rho > 1$, to znači da naši kapaciteti opsluživanja nisu dovoljni da iznesu zadato opterećenje, tj. uvek će pristizati više jedinica nego što sistem može da opsluži u jedinici vremena. Dakle, potrebno je pronaći minimalan broj kanala za koje je $\rho \leq 1$.

Za $c = 1$:

$$\rho = \frac{20}{1 \cdot 12} = 1.66$$

Za $c = 2$:

$$\rho = \frac{20}{2 \cdot 12} = \frac{20}{24} = 0.825$$

Dakle, sistemu će biti potrebna dva uređaja za kipovanje, tj. usvaja se $c = 2$.

Kako se dolazni tok vagona na istovar ponaša po Poasonovom toku i kako su vremena trajanja opsluživanja raspodeljena po eksponencijalnoj raspodeli, sistem se može modelirati kao otvoreni dvokanalni sistem opsluživanja sa neograničenim jedinstvenim redom, tj. sistem opsluživanja M/M/2/∞. Red čekanja vagona se formira na delu koloseka ispred skretnice za razdvajanje istog zbog dva mesta istovara.

Broj vagona koji čeka na istovar ili srednji broj jedinica u redu čekanja, kod višekanalnog sistema sa beskonačnim redom, određuje se nalaženjem granične vrednosti, kad $m \to \infty$, sledećeg izraza:

$$\begin{aligned} L_q &= \lim_{m \to \infty} \rho \cdot p_c \cdot \frac{1 - \rho^m \cdot [m \cdot (1-\rho) + 1]}{(1-\rho)^2} = p_c \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \\ &= 0.13 \cdot \frac{0.825}{(1-0.825)^2} = 3.5 \end{aligned}$$

-gde je p_c (c=2) verovatnoća da se u sistemu nalaze dve jedinice (vagona), tj. da su oba kanala za opsluživanje zauzeta:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{(c \cdot \rho)^i}{i!} \cdot p_0, \text{za i=2}, \\ p_c = p_2 &= \frac{(2 \cdot 0.825)^2}{2!} \cdot 0.096 = 0.13 \end{aligned}$$

- p_0 (verovatnoća da u sistemu neće biti jedinica) kod višekanalnog sistema sa beskonačnim redom određuje se nalaženjem granične vrednosti, kad $m \to \infty$, izraza :

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{m \to \infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^{c} \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot \rho \cdot \frac{1-\rho^m}{1-\rho}} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{c} \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{2} \frac{(2 \cdot 0.825)^k}{k!} + \frac{(2 \cdot 0.825)^2}{2!} \cdot \frac{0.825}{1-0.825}} = 0.096 \end{aligned}$$

Srednje vreme koje vagon provede u sistemu dato je izrazom:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.175 + 0.083 = 0.2583 \text{ h} = 15.5 \text{ min}$$

- gde je W_q srednje vreme koje jedinica provede u redu, i ono je definisano tzv. *Little* - ovom formulom:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3.5}{20} = 0.175 \text{ h} = 10.5 \text{ min}$$

(b) U okviru zadatog sistema moguće je definisati dva modula, umesto jednog, što je do sada bio slučaj. To praktično znači da sistem može da se posmatra kao dva posebna jednokanalna sistema opsluživanja sa neograničenim redom čekanja, pri čemu bi se red čekanja sa vagonima formirao ispred svakog uređaja za kipovanje. Za ovakav sistem od dva jednokanalna reda čekanja parametri su:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{2} = 10 \, \frac{\text{vagona}}{\text{h}}$$
$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} = \frac{10}{12} = 0.833$$

Srednji broj vagona koji čeka na istovar ili srednji broj jedinica u redu čekanja dobija se nalaženjem granične vrednosti, kada $m \to \infty$, sledećeg izraza:

$$L_{q1} = \lim_{m \to \infty} \rho^2 \cdot \frac{1 - \rho^m \cdot [m \cdot (1 - \rho) + 1]}{(1 - \rho)(1 - \rho^{m+2})} = \frac{\rho_1^2}{1 - \rho_1} = \frac{0.833^2}{1 - 0.833} = 4.16$$

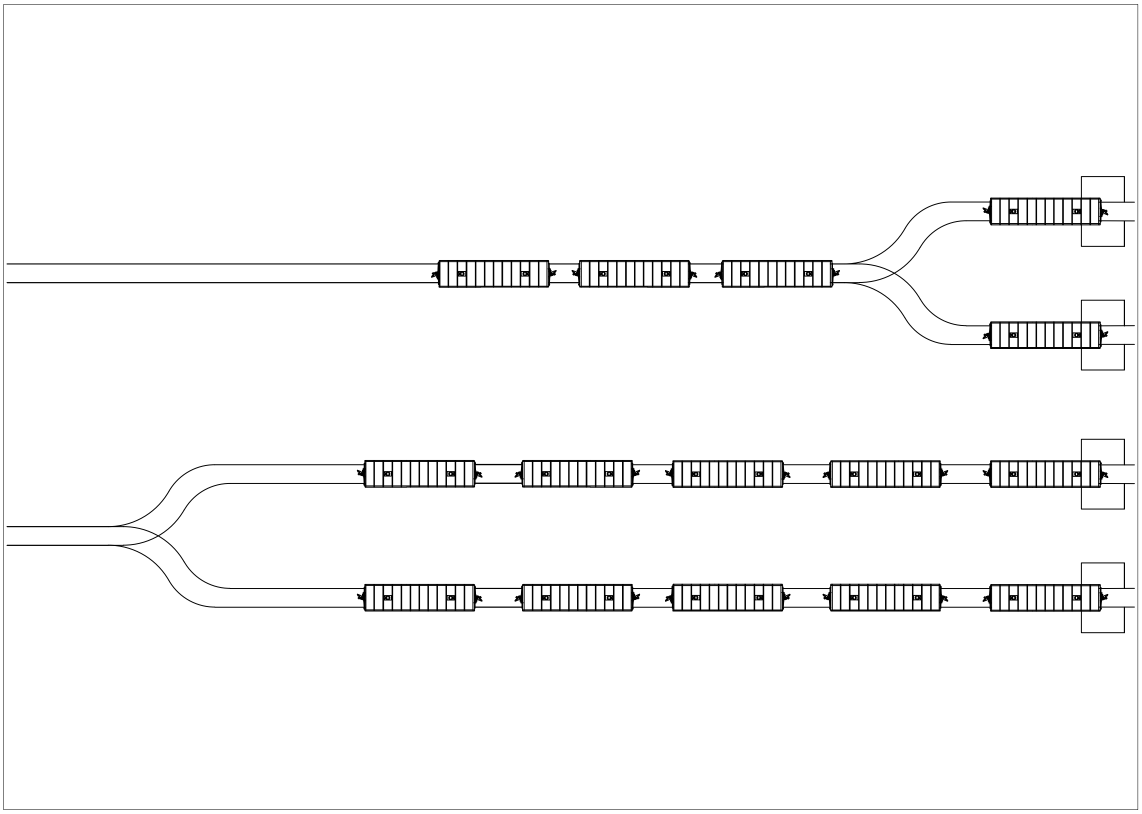
Srednje vreme čekanja na opsluživanje:

$$W_{q1} = \frac{L_{q1}}{\lambda_1} = \frac{4.16}{10} = 0.416 \text{ h} = 24.96 \text{ min}$$

Srednje vreme zadržavanja vagona u sistemu:

$$W_1 = W_{q1} + \frac{1}{\mu} = 24.96 + 5 = 29.96 \text{ min}$$

Upoređujući razmatrane modele sistema uočava se da model sa jednim modulom ima manje zadržavanje jedinica, kako u redu, tako i u celom sistemu, odnosno $W_q < W_{q1}$ i $W < W_1$. Tehničke skice ovih sistema date su na Slici 1.



Slika 1: Tehničke skice sistema opsluživanja sa jednim i dva modula

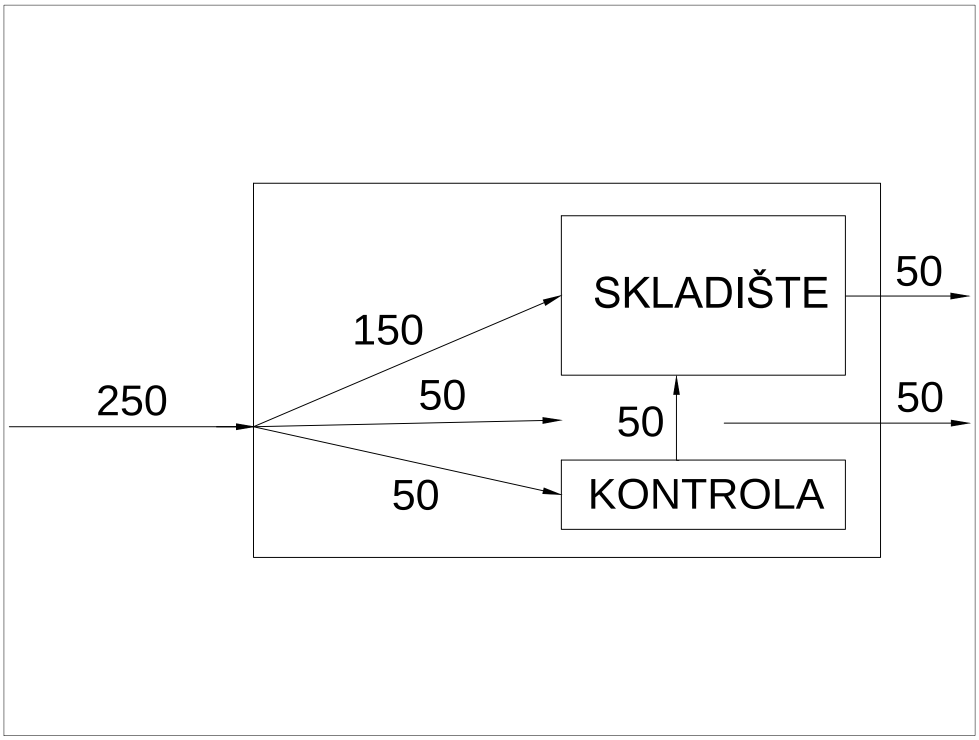
Zadatak 1.2

U fabričko skladište u toku 5 časova dolazi 250 paleta (Poasonova raspodela). Palete se istovaraju viljuškarima i odnose: direktno u regalno skladište (150 paleta), u odeljenje kontrole (50 paleta) i direktno u pogon fabrike (50 paleta). U istom vremenskom periodu potrebno je transportovati 50 paleta iz odeljenja kontrole u skladište i 50 paleta iz skladišta u pogon fabrike. Prosečno vreme opsluživanja viljuškarom iznosi 4 minuta (eksponencijalna raspodela).

Odrediti sistem transporta tako da prosečno vreme čekanja jedinice bude minimalno, izračunati vreme čekanja. Ograničenje sistema je da vremensko iskorišćenje transportnih uredjaja, ne može da predje 85%. Podatke koji nisu dati usvojiti.

Rešenje:

Na blok dijagramu (Slika 2) je prikazan zadati sistem skladišta i kontrole sa tačno naznačenim količinama paleta i pravcima kretanja istih.



Slika 2: Blok dijagram protoka materijala unutar fabričkog skladišta

broj kanala za opsluživanje:	$c = ?$,
broj mesta u redu:	$m = \infty$,
srednji intenzitet dolaska paleta:	$\lambda = \frac{250+50+50}{5} = 70$ paleta na sat,
srednji intenzitet opsluživanja paleta:	$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{ops}} = \frac{1}{4}$ paleta u minuti $\rightarrow$
	$\mu = 15$ paleta na sat,
koeficijent iskorišćenja kanala za opsluživanje(intenzitet protoka):	$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} \leq 0.85$

Kako je dolazni tok paleta u skladište Poasonov proces i kako su vremena trajanja opsluživanja viljuškarom raspodeljena po eksponencijalnoj raspodeli, model skladišta se može predstaviti kao sistem opsluživanja sa neograničenim redom, gde viljuškar predstavlja kanal za opsluživanje (čiji je broj potrebno definisati), tj. sistem opsluživanja M/M/c/∞.

Ono što je prvobitno potrebno definisati jeste optimalan broj kanala za opsluživanje (viljuškara). Koristeći uslov zadat tekstom zadatka da koeficijent iskorišćenja kanala ne sme biti veći od 0.85, važi:

$$c \geq \frac{\lambda}{\mu \cdot c} = \frac{70}{15 \cdot 0.85} \ \rightarrow \ c \geq 5.49 \text{ , usvaja se } c = 6$$

Minimalna vrednost parametra c za koje je ispunjen uslov jeste 5.49, te usvajamo prvu celobrojnu vrednost veću od toga. Sada je moguće izračunati i koeficijent iskorišćenja svakog od viljuškara. Za višekanalni sistem opsluživanja važi:

$$\rho = \frac{70}{15 \cdot 6} = 0.78$$

Srednje vreme čekanja paleta u redu:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Broj paleta koje čekaju na opsluživanje ili srednji broj jedinica u redu čekanja (L_q), kod višekanalnog sistema sa beskonačnim redom, određuje se nalaženjem granične vrednosti, kad $m \rightarrow \infty$, sledećeg izraza:

$$\begin{aligned} L_q &= \lim_{m \rightarrow \infty} \rho \cdot p_c \cdot \frac{1 - \rho^m \cdot [m \cdot (1-\rho) + 1]}{(1-\rho)^2} = p_c \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \\ &= 0.1080 \cdot \frac{0.78}{(1-0.78)^2} = 1.74 \end{aligned}$$

-gde je p_c (c=6) verovatnoća da se u sistemu nalazi šest jedinica (paleta), tj. da su svih šest kanala za opsluživanje zauzeti:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{(c \cdot \rho)^i}{i!} \cdot p_0, \text{za i=6}, \\ p_c = p_6 &= \frac{(6 \cdot 0.78)^6}{6!} \cdot 0.0074 = 0.1080 \end{aligned}$$

- p_0 (verovatnoća da u sistemu neće biti jedinica) kod višekanalnog sistema sa beskonačnim redom određuje se nalaženjem granične vrednosti, kad $m \rightarrow \infty$, izraza :

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^{c} \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot \rho \cdot \frac{1-\rho^m}{1-\rho}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c} \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{6} \frac{(6 \cdot 0.78)^k}{k!} + \frac{(6 \cdot 0.78)^6}{6!} \cdot \frac{0.78}{1-0.78}} = 0.0074 \end{aligned}$$

Dakle, srednje vreme čekanja paleta u redu se dobija na osnovu *Little*-ove formule i iznosi:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1.74}{70} = 0.025 \text{ h} = 1.5 \text{ min}$$

Zadatak 1.3

Delovi dolaze iz pogona (raspodela vremena izmedju dolazaka jedinica je eksponencijalna) na kontrolu svakih 3 minuta (po jedan deo). Radnici koji kontrolišu delove mogu da pregledaju u proseku 5.5 delova na čas. Koristeći teoriju redova čekanja izračunati:

(a) Potreban broj radnih mesta kontrolora;

(b) Srednji broj delova koji čeka na kontrolu;

(c) Vreme protoka jednog dela kroz sistem kontrole;

(d) Verovatnoću da svi kontrolori budu zauzeti;

(e) Verovatnoću da jedan deo bude duže od 25 minuta u sistemu kontrole.

Koliko će se delovi duže zadržavati u sistemu kontrole, ako se intenzitet dolaznog toka delova poveća za 5%. Radno mesto kontrolora posmatrati kao stanicu opsluživanja sa eksponencijalnom raspodelom vremena opsluživanja. Podatke koji nisu dati usvojiti.

Rešenje:

(a) Ono što je prvobitno potrebno odrediti jeste optimalan broj kanala za opsluživanje, tj. minimalan broj radnih mesta kontrolora za koje je intenzitet protoka (ρ) manji ili jednak 1.

Intenzitet protoka delova kroz kontrolu je dat izrazom:

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} \leq 1$$

-gde je:
λ - srednji broj jedinica koji dolazi na kontrolu,
μ - srednji broj jedinica koje se kontrolišu.
c - broj radnih mesta kontrolora.

$$\lambda = \frac{1}{\bar{t}_d} = \frac{1}{3} = 0.33 \ \frac{\text{komada}}{\text{min}} = 20 \ \frac{\text{komada}}{\text{h}}$$

-gde je $\bar{t}_d$ srednje vreme između dolazaka jedinica.

$$\mu = 5.5 \ \frac{\text{komada}}{\text{h}}$$

Potreban broj radnih mesta kontrolora ili broj mesta opsluživanja biće prva celobrojna vrednost veća od one koja se dobije iz izraza:

$$c \geq \frac{\lambda}{\mu \cdot \rho} = \frac{20}{5.5 \cdot 1} \;\rightarrow\; c \geq 3.636 \;,$$

Za broj radnih mesta kontrolora usvaja se $c = 4$.

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} = \frac{20}{5.5 \cdot 4} = \frac{20}{22} = 0.91$$

Ako usvojimo da se dolazni tok delova iz pogona ponaša po Poasonovom toku (eksp. raspodela) i da su vremena trajanja opsluživanja raspodeljena po eksponencijalnoj raspodeli, sistem se može modelirati kao otvoreni višekanalni sistem opsluživanja sa neograničenim redom, tj. sistem opsluživanja M/M/4/∞.

(b) Srednji broj delova koji čeka na kontrolu, kod višekanalnog sistema sa beskonačnim redom, određuje se nalaženjem granične vrednosti, kad $m \rightarrow \infty$, sledećeg izraza:

$$\begin{aligned} L_q &= \lim_{m\rightarrow\infty} \rho \cdot p_c \cdot \frac{1-\rho^m \cdot [m \cdot (1-\rho)+1]}{(1-\rho)^2} = p_c \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \\ &= 0.073 \cdot \frac{0.91}{(1-0.91)^2} = 8.2 \end{aligned}$$

-gde je p_c verovatnoća da u sistemu ima c jedinica, tj. da su svi kontrolori zauzeti.

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{(c \cdot \rho)^i}{i!} \cdot p_0, \text{za i=4}, \\ p_c = p_4 &= \frac{(4 \cdot 0.91)^4}{4!} \cdot 0.01 = 0.073 \end{aligned}$$

- p_0 (verovatnoća da u sistemu neće biti jedinica) kod višekanalnog sistema sa beskonačnim redom određuje se nalaženjem granične vrednosti, kad $m \rightarrow \infty$, izraza :

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{m\rightarrow\infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^{c} \frac{(c\cdot\rho)^k}{k!} + \frac{(c\cdot\rho)^c}{c!} \cdot \rho \cdot \frac{1-\rho^m}{1-\rho}} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{c} \frac{(c\cdot\rho)^k}{k!} + \frac{(c\cdot\rho)^c}{c!} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{4} \frac{(4\cdot 0.91)^k}{k!} + \frac{(4\cdot 91)^4}{4!} \cdot \frac{0.91}{1-0.91}} = 0.01 \end{aligned}$$

(c) Vreme protoka jednog dela kroz sistem kontrole ili srednje vreme zadržavanja jedinica u sistemu je:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.41 + 0.18 = 0.59 \text{ h} = 35.5 \text{ min}$$

-gde je W_q srednje vreme koje jedinica provede u redu i može se odrediti putem *Little*-ove formule:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{8.2}{20} = 0.41 \text{ h} = 24.6 \text{ min}$$

(d) Verovatnoća da svi kontrolori budu zauzeti ekvivalentna je verovatnoći da u sistemu ima minimum po jedna jedinica za svakog od njih, tj. da sistem bude u stanjima 4,5,6,..., itd. Suma verovatnoća svih stanja sistema uvek je jednaka 1, te važi:

$$P(k \geq c) = \sum_{k=c}^{\infty} p_k = 1 - \sum_{k=0}^{c-1} p_k$$

-gde je k broj jedinica u sistemu.

$$\begin{aligned}
P(k \geq 4) &= \sum_{k=4}^{\infty} p_k = 1 - \sum_{k=0}^{3} p_k = 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{(4 \cdot \rho)^k}{k!} \cdot p_0 = 1 - p_0 \cdot \sum_{k=0}^{3} \frac{(4\rho)^k}{k!} \\
&= 1 - 0.01(\frac{(4 \cdot 0.91)^0}{0!} + \frac{(4 \cdot 0.91)^1}{1!} + \frac{(4 \cdot 0.91)^2}{2!} + \frac{(4 \cdot 0.91)^3}{3!}) \\
&= 1 - 0.01(1 + 3.64 + 6.6248 + 8.038) = 0.81
\end{aligned}$$

(e) Verovatnoća da će jedan deo provesti duže od 25 min u sistemu kontrole je $P(T_s > 25)$, pri čemu važi:

$$P(T_s > t) = e^{-\mu t}[1 + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c \cdot p_0[1 - e^{-\mu t(c-1-\frac{\lambda}{\mu})}]}{c!(1 - \frac{\lambda}{\mu \cdot c})(c - 1 - \frac{\lambda}{\mu})}]$$

-gde je t zadato vreme zadržavanja jedinice u sistemu.

$$\begin{aligned}
&P(T > 25) = e^{-0.09 \cdot 25}[1 + \frac{(3.636^4 \cdot 0.01[1 - e^{-0.09 \cdot 25(4-1-3.636)}]}{4!(1 - \frac{3.636}{4})(4 - 1 - 3.636)}] \\
&P(T > 25) = 0.53
\end{aligned}$$

Verovatnoća da će deo provesti više od 25 minuta u sistemu iznosi 53 %.

Za povećani intenzitet dolaska od 5%, intenzitet protoka je:

$$\rho' = \frac{\lambda'}{\mu}$$

-gde je λ' uvedeni srednji broj jedinica koje dolaze na kontrolu (uvećan za 5%)

$$\begin{aligned}
&\lambda' = \lambda + 0.05\lambda = 1.05\lambda = 21\ \frac{\text{komada}}{\text{h}}\\
&c \geq \frac{\lambda'}{1 \cdot \mu} = \frac{21}{5.5}\ \rightarrow\ c \geq 3.818\ \text{, usvaja se c=4}\\
&\rho' = \frac{21}{4 \cdot 5.5} = 0.9545\\
&W' = W'_q + \frac{1}{\mu} = 0.88 + 0.19 = 1.07\ \text{h}\\
&W' = \frac{L'_q}{\lambda'} = \frac{18.44}{21} = 0.88\ \text{h}\\
&L'_q = p'_c \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = 0.04\frac{0.9545}{(1-0.9545)^2} = 18.44\\
&p'_c = p'_4 = \frac{(4 \cdot 0.9545)^4}{4!} \cdot 0.0046 = 0.04\\
&p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c} \frac{(c\cdot\rho)^k}{k!} + \frac{(c\cdot\rho)^c}{c!} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}}\\
&\ \ = \frac{1}{\sum_{k=0}^{4} \frac{(4\cdot 0.91)^k}{k!} + \frac{(4\cdot 0.9545)^4}{4!} \cdot \frac{0.9545}{1-0.9545}} = 0.0046
\end{aligned}$$

Razlika u zadržavanju delova u odnosu na inicijalni intenzitet dolaska:

$$\Delta W = W' - W = 1.07 - 0.59 = 0.48\ \text{h} = 28.8\ \text{min}$$

Ukoliko se broj delova koji dolaze po satu poveća za 5%, tj. za 1, delovi će u proseku skoro 29 minuta više provoditi u sistemu kontrole.