



ВЕЖБА 3

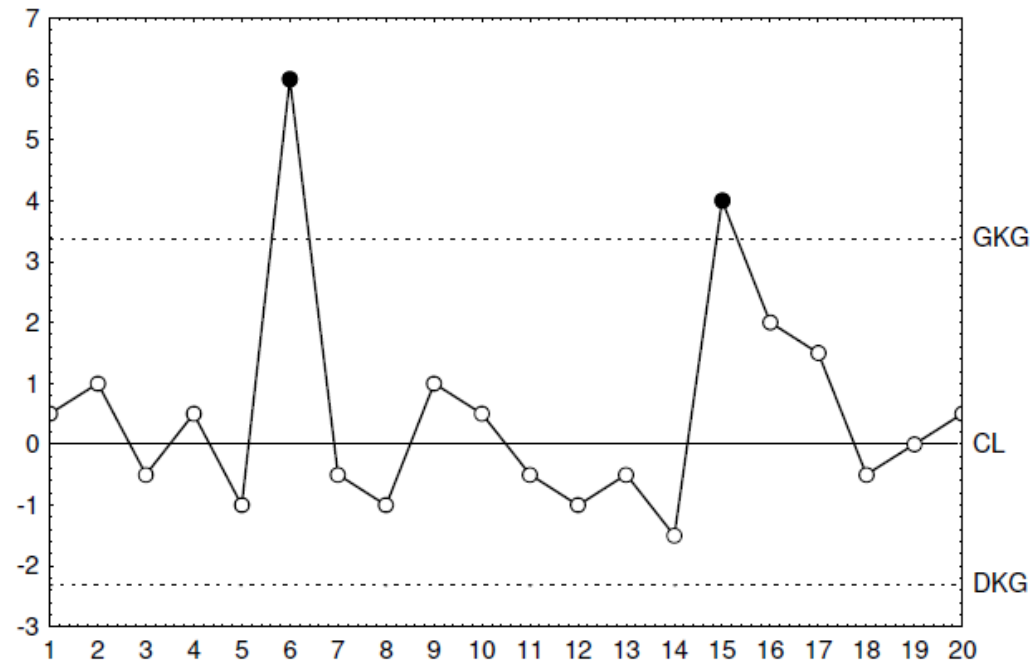
Контролне карте



Контролне карте - Општи преглед

Користе се за:

- Праћење варијабилности производних процеса
- Анализу стања производних процеса
- Откривање места где настаје варијабилност
- Превенција проблема у производњи



Слика 1. Општи изглед контролне карте

GKG – Горња контролна граница

CL – Централна линија (номинална вредност)

DKG – Доња контролна граница



Контролне карте - Општи преглед

Када је узорак величине од 20 – 25, процес је нестабилан ако:

- се 1 тачка налази ван граница
- се 2 од 3 узастопне тачке налазе ван граница
- се 4 од 5 узастопних тачака налази ван граница
- се 8 узастопних тачака налази са једне стране централне линије

Врсте контролних карата:

- \bar{X} карте
- R карте
- P карте
- C карте
- Hotelling*-ове T^2
- CUSUM* карте
- EWMA* карте



X карте – општа правила

- Указују на одступање појединих мерења понашања процеса од **номиналне вредности**
- Поступак креирања КК:
 1. Одређује се број узорака који треба прикупити ($m = 20-25$) и временски период узимања узорака
 2. Одређује се број мерења ($n = 4, 5$ или 6) које треба извршити у сваком узорку
 3. У временским интервалима вршење по n мерења
 4. Добијање података за m узорака
 5. Конструисање контролне карте



X карте – општа правила

Нека је:

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n X_{ij}$$

Средња вредност i -тог узорка у коме је извршено n мерења.

Тада је средња вредност мерења добијена на основу свих узорака :

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m \bar{X}_i = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n X_{ij} \right)$$

$$GKG = \bar{\bar{X}} + \frac{3}{d_2 \cdot \sqrt{n}} \bar{R}$$

$$DKG = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{d_2 \cdot \sqrt{n}} \bar{R}$$

=

Ранг i -тог узорка представља разлику највећег и најмањег мерења у оквиру тог узорка:

$$R_i = \max(X_{ij}) - \min(X_{ij})$$

Средња вредност ранга процеса:

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i$$

а оцењена вредност стандардне девијације процеса:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

$$GKG = \bar{\bar{X}} + A_2 \cdot \bar{R}$$

$$CL = \bar{\bar{X}}$$

$$DKG = \bar{\bar{X}} - A_2 \cdot \bar{R}$$



R карте – општа правила

- Користе се за приказ степена варијабилности производног процеса
- У пракси се најчешће конструише уз X карту

Контролне границе се израчунавају као:

$$GKG = \bar{R} + 3 \cdot \frac{\sigma_w}{d_2} \cdot \bar{R} = \left(1 + 3 \cdot \frac{\sigma_w}{d_2}\right) \cdot \bar{R} = D_4 \cdot \bar{R}$$

$$DKG = \bar{R} - 3 \cdot \frac{\sigma_w}{d_2} \cdot \bar{R} = \left(1 - 3 \cdot \frac{\sigma_w}{d_2}\right) \cdot \bar{R} = D_3 \cdot \bar{R}$$

Односно:

$$GKG = D_4 \cdot \bar{R}$$

$$CL = \bar{R}$$

$$DKG = D_3 \cdot \bar{R}$$

где су D_4 и D_3 вредности добијене из таблица на основу броја мерења у узорку.



Table X Factors for Constructing Variables Control Charts

n^*	Factor for Control Limits						
	\bar{X} Chart			R Chart		S Chart	
	A_1	A_2	d_2	D_3	D_4	c_4	n
2	3.760	1.880	1.128	0	3.267	0.7979	2
3	2.394	1.023	1.693	0	2.575	0.8862	3
4	1.880	.729	2.059	0	2.282	0.9213	4
5	1.596	.577	2.326	0	2.115	0.9400	5
6	1.410	.483	2.534	0	2.004	0.9515	6
7	1.277	.419	2.704	.076	1.924	0.9594	7
8	1.175	.373	2.847	.136	1.864	0.9650	8
9	1.094	.337	2.970	.184	1.816	0.9693	9
10	1.028	.308	3.078	.223	1.777	0.9727	10
11	.973	.285	3.173	.256	1.744	0.9754	11
12	.925	.266	3.258	.284	1.716	0.9776	12
13	.884	.249	3.336	.308	1.692	0.9794	13
14	.848	.235	3.407	.329	1.671	0.9810	14
15	.816	.223	3.472	.348	1.652	0.9823	15
16	.788	.212	3.532	.364	1.636	0.9835	16
17	.762	.203	3.588	.379	1.621	0.9845	17
18	.738	.194	3.640	.392	1.608	0.9854	18
19	.717	.187	3.689	.404	1.596	0.9862	19
20	.697	.180	3.735	.414	1.586	0.9869	20
21	.679	.173	3.778	.425	1.575	0.9876	21
22	.662	.167	3.819	.434	1.566	0.9882	22
23	.647	.162	3.858	.443	1.557	0.9887	23
24	.632	.157	3.895	.452	1.548	0.9892	24
25	.619	.153	3.931	.459	1.541	0.9896	25

* $n > 25$: $A_1 = 3/\sqrt{n}$ where n = number of observations in sample.

Табела константи за прорачун контролних граница



Пример 1

Мерени су отвори за лопатице код производње авионских мотора у циљу испитивања статистичке стабилности процеса. Мерено је у 20 временских интервала по 5 мерења и подаци су приказани у табели. Конструисати \bar{X} и R карту.



n	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{x}	r
1	2	3	4	5	6	7	8
1	33	29	31	32	33	31.6	4
2	33	31	35	37	31	33.4	6
3	35	37	33	34	36	35	4
4	30	31	33	34	33	32.2	4
5	33	34	35	33	34	33.8	2
6	38	37	39	40	38	38.4	3
7	30	31	32	34	31	31.6	4
8	29	39	38	39	39	36.8	10
9	28	33	35	36	43	35	15
10	38	33	32	35	32	34	6
11	28	30	28	32	31	29.8	4
12	31	35	35	35	34	34	4
13	27	32	34	35	37	33	10
14	33	33	35	37	36	34.8	4
15	35	37	32	35	39	35.6	7
16	33	33	27	31	30	30.8	6
17	35	34	34	30	32	33	5
18	32	33	30	30	33	31.6	3
19	25	27	34	27	28	28.2	9
20	35	35	36	33	30	33.8	6

Табела прикупљених података за Пример 1.



$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m \bar{x}_i = \frac{1}{20} \cdot (31.6 + 33.4 + \dots + 33.8) = 33.3 \text{ mm}$$

$$\bar{r} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m r_i = \frac{1}{20} \cdot (4 + 6 + \dots + 9 + 6) = 5.8$$

$$\text{GKG} = \bar{\bar{x}} + A_2 \cdot \bar{r} = 33.3 + 0.577 \cdot 5.8 = 36.65$$

$$\text{CL} = \bar{\bar{x}} = 33.3$$

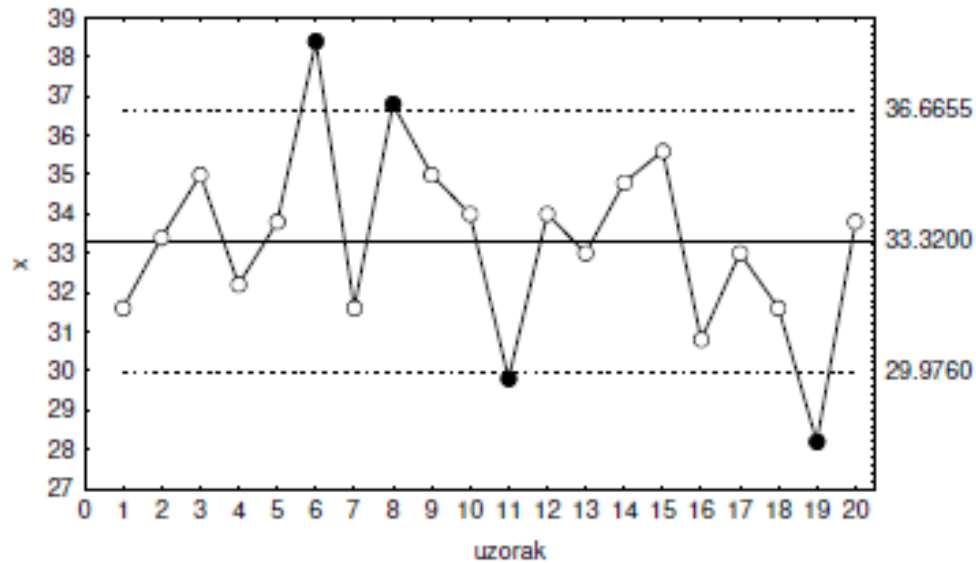
$$\text{DKG} = \bar{\bar{x}} - A_2 \cdot \bar{r} = 33.3 - 0.577 \cdot 5.8 = 29.95$$

$$\text{GKG} = D_4 \cdot \bar{r} = 2.115 \cdot 5.8 = 12.27$$

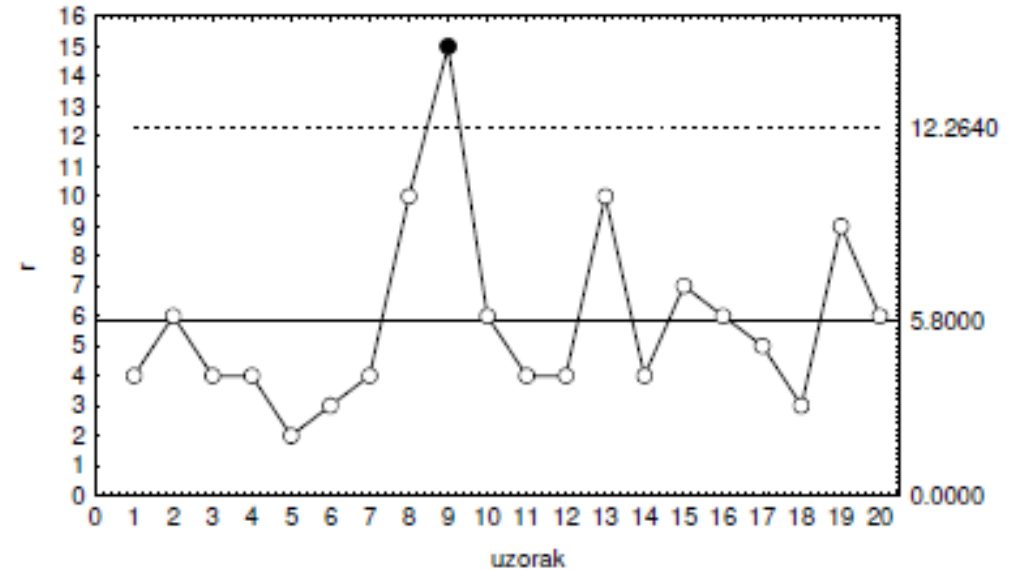
$$\text{CL} = \bar{r} = 5.8$$

$$\text{DKG} = D_3 \cdot \bar{r} = 0 \cdot 5.8 = 0$$

X-karta
m=20, n=5



r-karta
m=20, n=5





p карте – општа правила

- Испитује ниво шкарта када се предпоставља да се они распоређују по **биномној** **расподели**

$$GKG = \bar{p} + 3 \cdot \sqrt{\frac{\bar{p} \cdot (1 - \bar{p})}{n}}$$

$$CL = \bar{p}$$

$$DKG = \bar{p} - 3 \cdot \sqrt{\frac{\bar{p} \cdot (1 - \bar{p})}{n}}$$



Пример 2

Потребно је конструисати p карту за процес производње керамичких плочица. Подаци 20 узорака од по 100 мерења приказани су у табели.

uzorak	no.šk	uzorak	no.šk
1	44	11	36
2	48	12	52
3	32	13	35
4	50	14	41
5	29	15	42
6	31	16	30
7	46	17	46
8	52	18	38
9	44	19	26
10	48	20	30



Укупни број мерења:

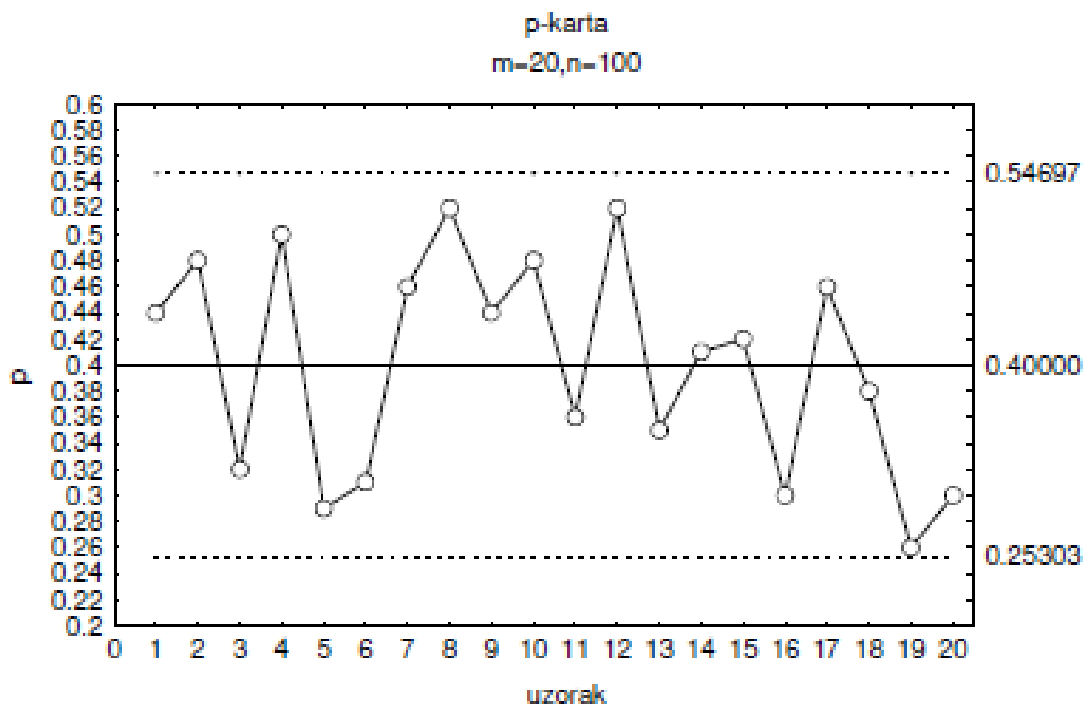
$$N = 100 \cdot 20 = 2000 \text{ мерења}$$

Укупно шкарта у свим узорцима:

$$x = 44 + 48 + \dots + 30 = 800$$

Просечна вредност шкарта:

$$\bar{p} = \frac{x}{N} = \frac{800}{2000} = 0.4$$



Контролне границе:

$$GKG = \bar{p} + 3 \cdot \sqrt{\frac{\bar{p} \cdot (1 - \bar{p})}{n}} = 0.4 + 3 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{100}} = 0.55$$

$$CL = \bar{p} = 0.4$$

$$DKG = \bar{p} - 3 \cdot \sqrt{\frac{\bar{p} \cdot (1 - \bar{p})}{n}} = 0.4 - 3 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{100}} = 0.25$$



С карте – општа правила

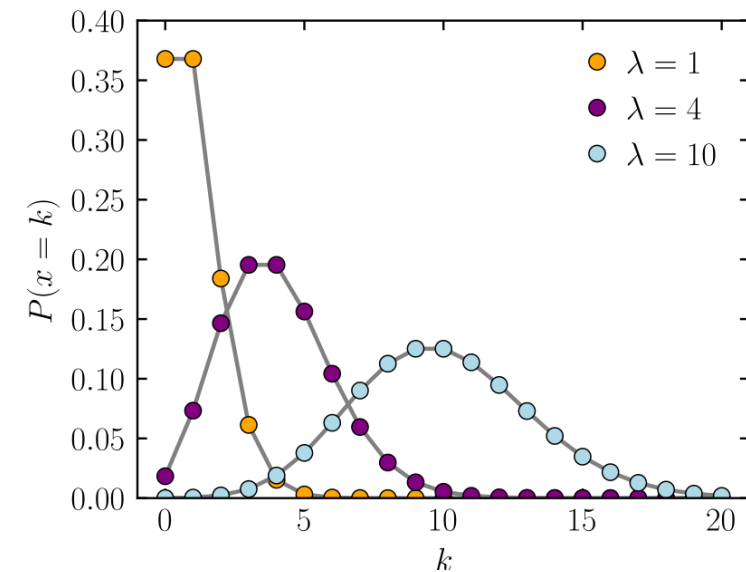
- Праћење стабилности процеса, испитивањем броја дефеката, када се предпоставља да се процес понаша по **Поасоновој расподели**, са параметром λ

$$\bar{C} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m c_i$$

$$GKG = \bar{C} + 3 \cdot \sqrt{\bar{C}}$$

$$CL = \bar{C}$$

$$DKG = \bar{C} - 3 \cdot \sqrt{\bar{C}}$$



$$P_{(X=x)} = \frac{(\lambda^r e^{-\lambda})}{r!}$$



Пример 3

Штампана кола се склапају комбинацијом ручне и аутоматске монтаже. Аутоматска машина се користи за производњу механичких и електронских компоненти, тако да је процес скоро континуалан. Сваких сат времена, бира се 5 табли и врши се њихова контрола. Табела испод приказује резултате мерења за 20 узорака (дана). Конструисати С карту.

uzorak	no.šk	uzorak	no.šk	uzorak	no.šk	uzorak	no.šk
1	6	6	12	11	9	16	2
2	4	7	16	12	15	17	7
3	8	8	2	13	8	18	1
4	10	9	3	14	10	19	7
5	9	10	10	15	8	20	13

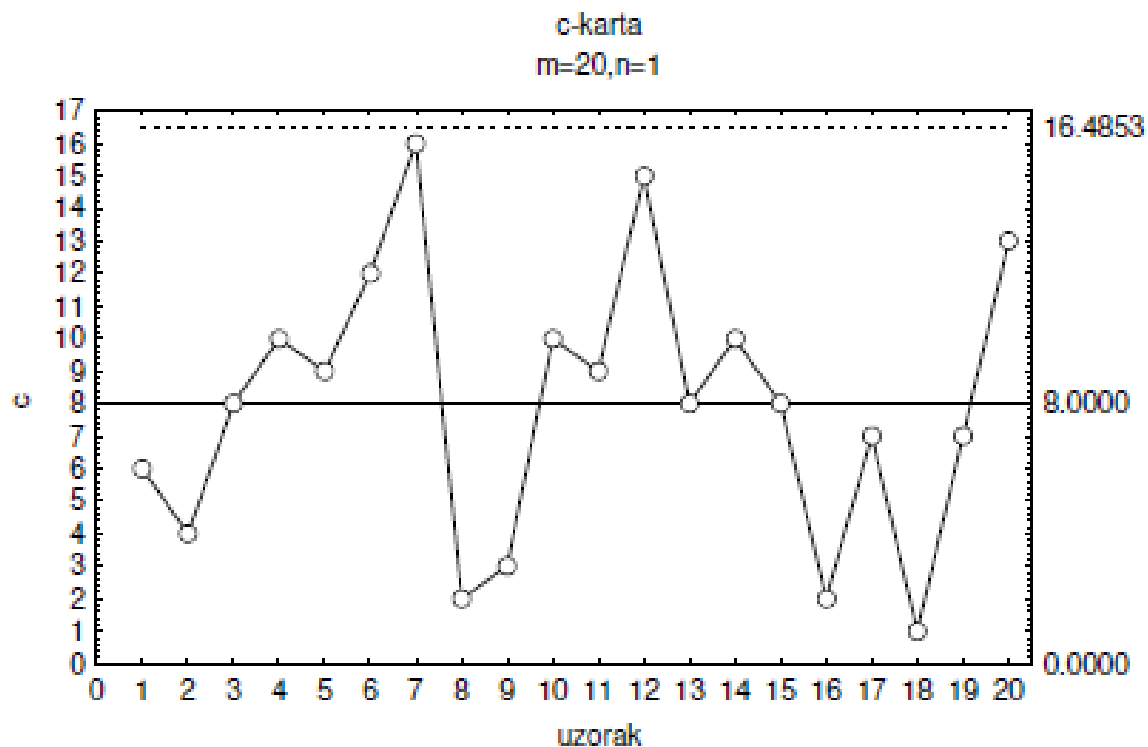


Укупни број дефектних делова:

$$6 + 4 + \dots + 7 + 13 = 160$$

Средњи број дефектних делова:

$$\bar{c} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m c_i = \frac{1}{20} \cdot (6 + 4 + \dots + 7 + 13) = \frac{160}{20} = 8.$$



Контролне границе су:

$$GKG = \bar{c} + 3 \cdot \sqrt{\bar{c}} = 8 + 3 \cdot \sqrt{8} = 16.48$$

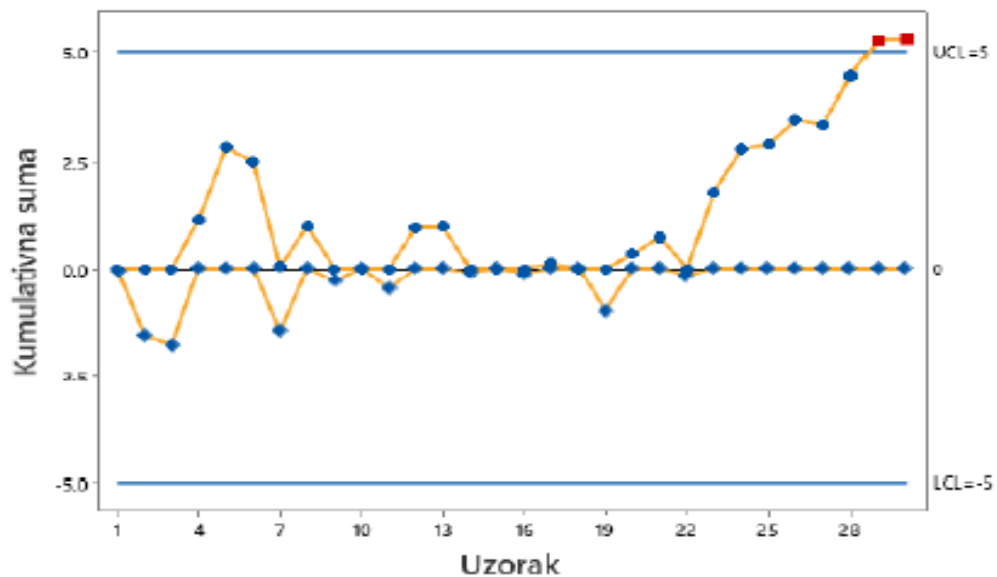
$$CL = \bar{c} = 8$$

$$DKG = \bar{c} - 3 \cdot \sqrt{\bar{c}} = 8 - 3 \cdot \sqrt{8} = -0.485 = 0$$

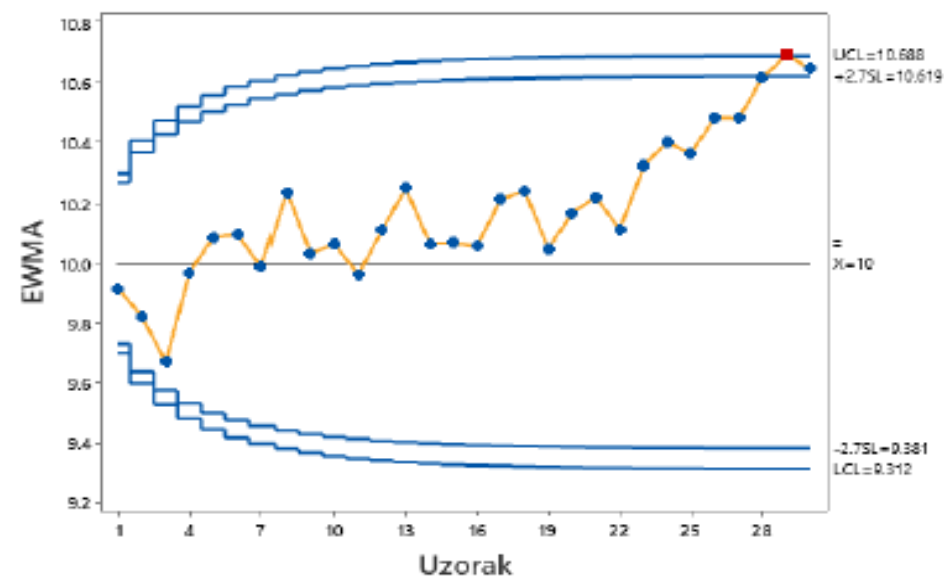


CUSUM и EWMA контролне карте - опште

- Скраћено од *Cumulative Sum* и *Exponentially weighted moving average*
- Користе се у другој фази праћења процеса, јер су доста осетљивије на ситне промене у систему и омогућавају откривање случајних и очекиваних узрока варијација у систему. Користе се при континуалном праћењу система.



CUSUM контролна карта



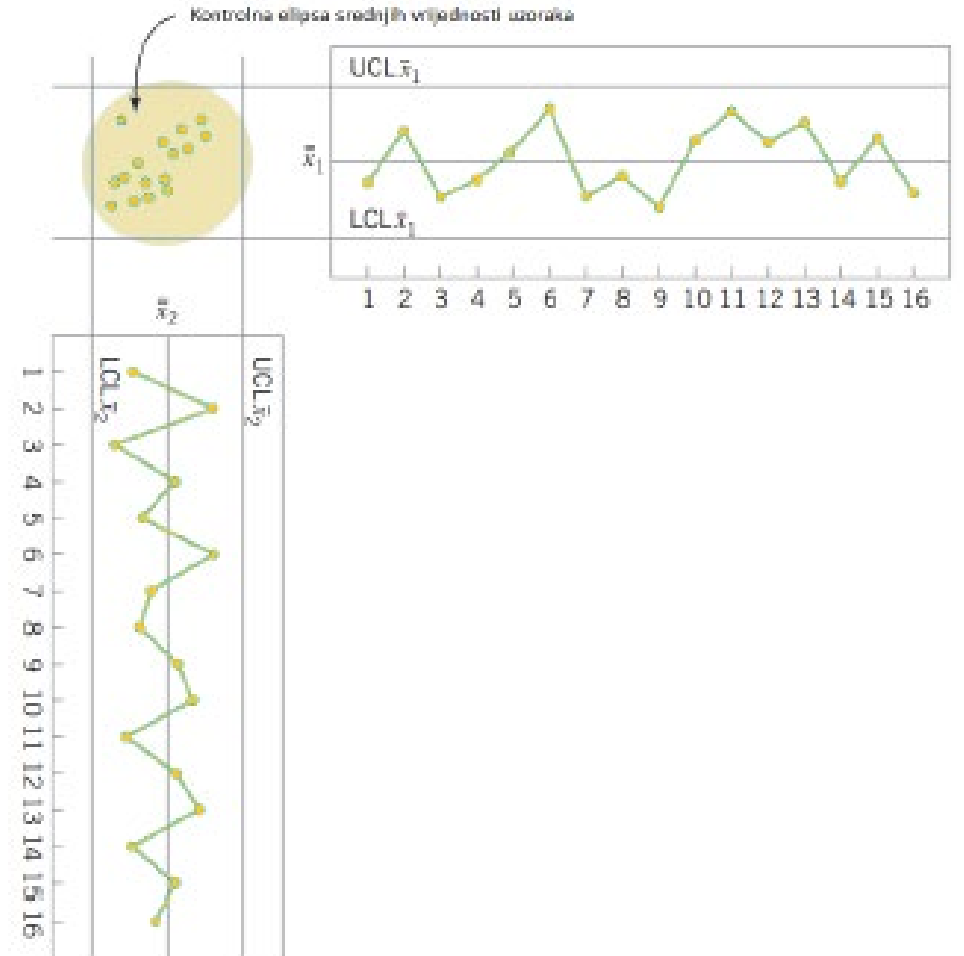
EWMA контролна карта



Hotelling T^2 контролна карта - опште

- Најпознатија мултиваријантна контролна карта за праћење вектора средње вредности
- Погодна је и за анализу појединачних мерења и за анализу узорака
- Истовремено прати више параметара производње

$$\chi_0^2 = n(\bar{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu)$$





Пројектни задатак 3

- Одабрати одређену карактеристику производа или индикатор у процесу производње (број дефеката, број производа...) и за њега креирати одговарајућу контролну карту (x-R, p, c). Ако предузеће пружа одређену услугу, креирати КК за елемент који ће бити од значаја како би се донео закључак о стабилности процеса.