



Poglavlje 6. Statističko testiranje hipoteza- nastavak

dr Đorđe Nikolić, redovni profesor
E-mail: djnikolictfbor@gmail.com

06.11.2023. godine

Ciljevi poglavlja



- Testiranje statističkih hipoteza- osnovne napomene,
- Parametarski vs. Neparametarski statistički testovi,
- Testiranje statističkih hipoteza- parametarski testovi:
 - Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na jednom uzorku,
 - **Testiranje statističkih hipoteza za dva nezavisna uzorka;**
 - **Testiranje statističkih hipoteza za dva zavisna uzorka,**
 - Analiza varijanse sa jednim faktorom (ANOVA),
 - Višefaktorska analiza varijanse (dvofaktorska analiza varijanse).
- Testiranje statističkih hipoteza- neparametarski testovi:
 - Kolmogorov-Smirnov test,
 - Hi-kvadrat test,
 - Man-Vitnijev U test,
 - Vilkoksonov test ranga.

Preporučena literatura



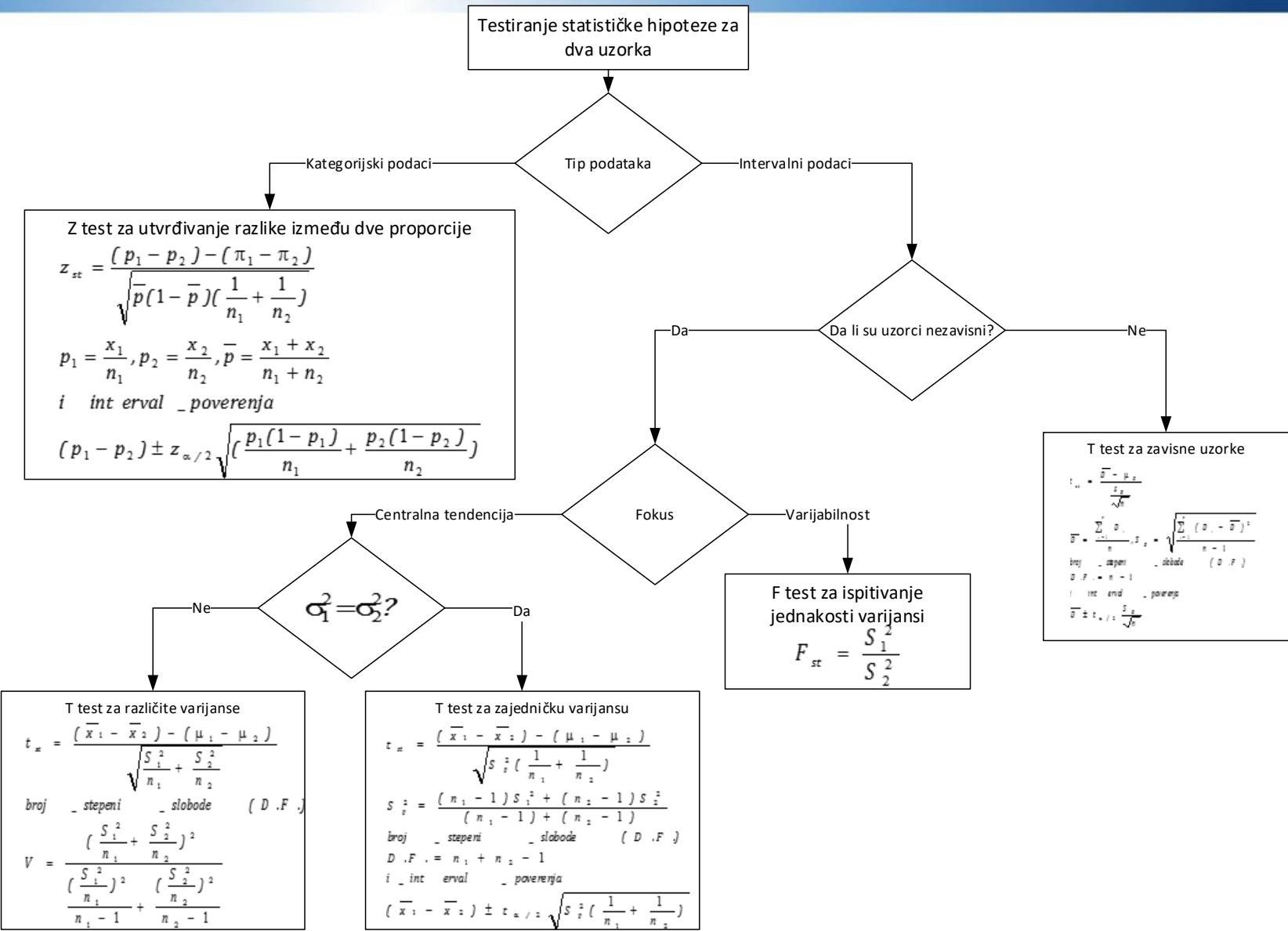
- Radojević, S, Veljković Z, Kvantitativne metode, CD, MF,
- Montgomery, DC, Runger, GC Applied Statistics and Probability for Engineers, Fourth Edition, Wiley, 2007.

Koncept testiranja statističkih hipoteza

• Procedura testiranja statističke hipoteze:

1. Definisanje nulte i alternativne hipoteze,
2. Izbor nivoa značajnosti testa α i određivanje kritičnih vrednosti,
3. Izbor statistike testa i određivanje njegovog rasporeda verovatnoće,
4. Formulisanje pravila odlučivanja o prihvatanju, odnosno, odbacivanju nulte hipoteze,
5. Izvlačenje uzorka iz osnovnog skupa i izračunavanje vrednosti statistike testa,
6. Donošenje odluke o prihvatanju, odnosno, odbacivanju nulte hipoteze.
7. Opciono: Analiza osetljivosti rezultata, promenom parametara koraka 2.

Testiranje statističkih hipoteza- parametarski testovi



Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka

- Razmatranje razlike aritmetičkih sredina za dva nezavisna uzorka

Aritmetičke
sredine
populacija preko
nezavisnih
uzoraka

- σ_1 , σ_2 nepoznate i pretpostavka da su iste
- σ_1 , σ_2 nepoznate i pretpostavka da nisu iste

Cilj: Testiranje hipoteze ili formiranje intervala poverenja za razliku aritmetičkih sredina populacije:

$$\mu_1 - \mu_2$$

Polazna osnova za utvrđivanje razlike je:

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$$

Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka

- Oblici nulte i alternativne hipoteze za dve nezavisne populacije:

1) Prost slučaj (obostrani- two tail):

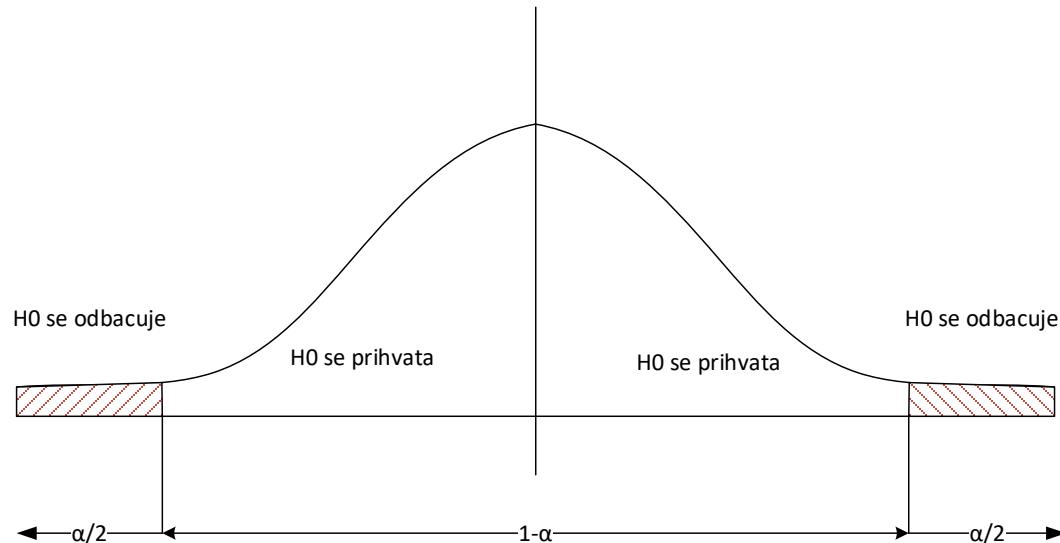
$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

Odnosno

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$



Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka uzorka

- Oblici nulte i alternativne hipoteze za dve nezavisne populacije :

2) Složen slučaj (levi-one tail):

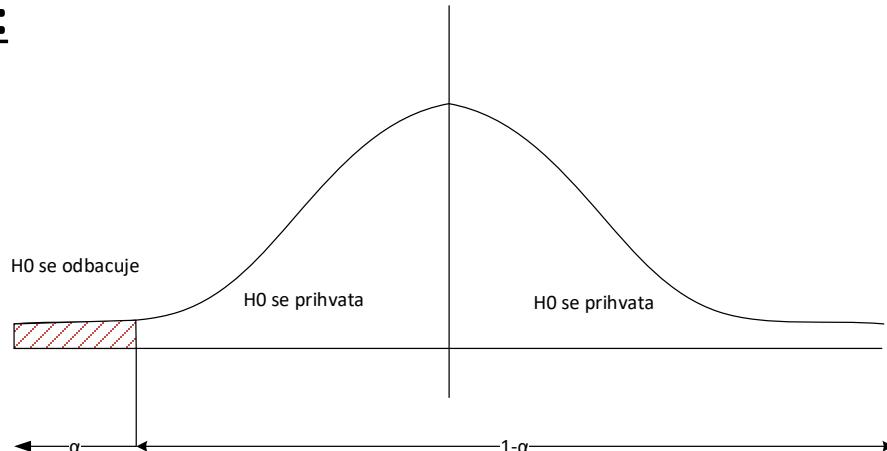
$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 < \mu_2$$

Odnosno

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$$



3) Složen slučaj (desni-one tail):

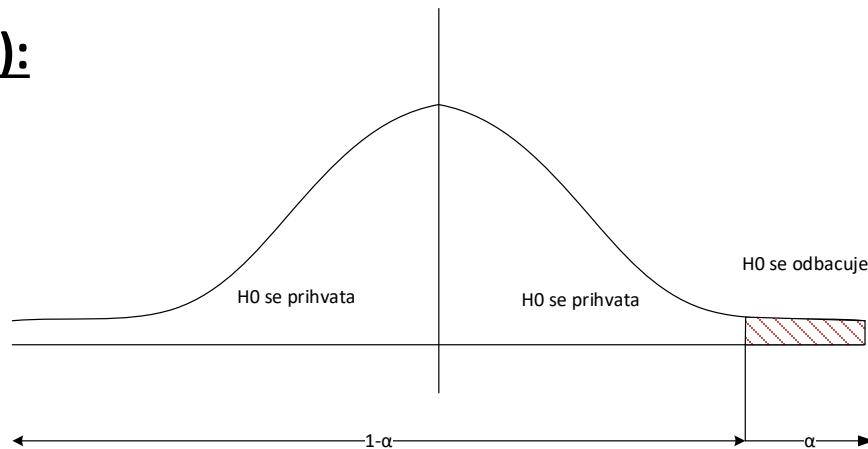
$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 > \mu_2$$

Odnosno

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$$



Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka

• Izračunavanje veličine uticaja u t-testu nezavisnih populacija

Pokazatelji veličine uticaja (engl. effect size) ukazuju na veličinu razlike između grupa, a ne samo da li je ta razlika slučajna ili ne. Veličina uticaja se procenjuje pomoću više pokazatelja, od kojih se najviše upotrebljavaju eta kvadrat i Koenov d. Eta kvadrat može imati vrednost u opsegu od 0 do 1 i predstavlja proporciju varijanse u zavisnoj promenljivoj objašnjenu nezavisnom promenljivom (grupisanja).

$$\eta^2 = \frac{t^2}{t^2 + (n_1 + n_2 - 1)}$$

Smernice za tumačenje ove veličine glase:

- 0.01=mali uticaj,
- 0.06=umeren uticaj
- 0.14=veliki uticaj

Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka

- Oblici nulte i alternativne hipoteze za dve zavisne populacije:

1) Prost slučaj (obostrani- two tail):

$$H_0: \mu_D = 0$$

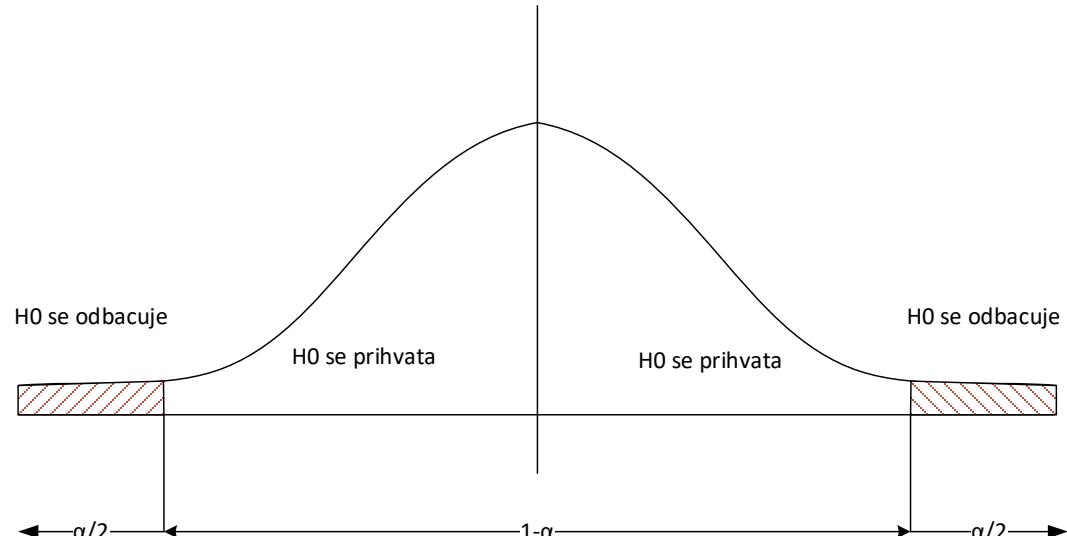
$$H_1: \mu_D \neq 0$$

Polazna osnova za utvrđivanje razlike je:

$$D_i = X_{1i} - X_{2i}$$

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n}$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1}}$$



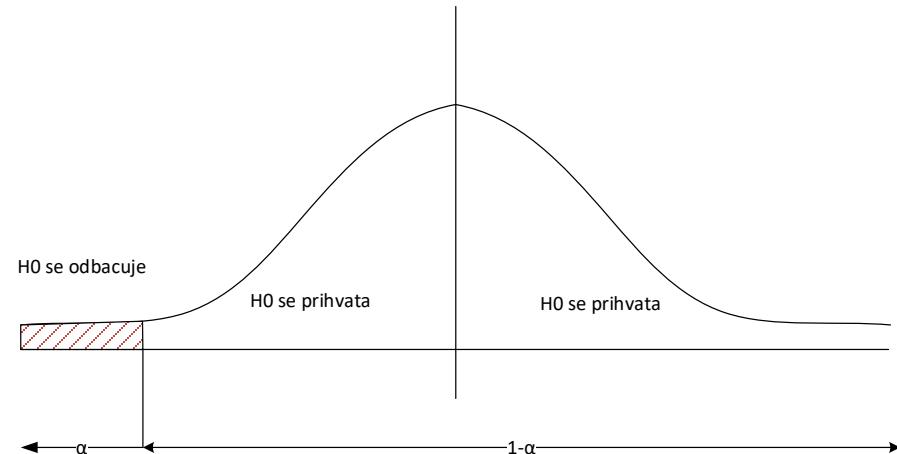
Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka uzorka

- Oblici nulte i alternativne hipoteze za dve zavisne populacije :

2) Složen slučaj (levi-one tail):

$$H_0: \mu_D \geq 0$$

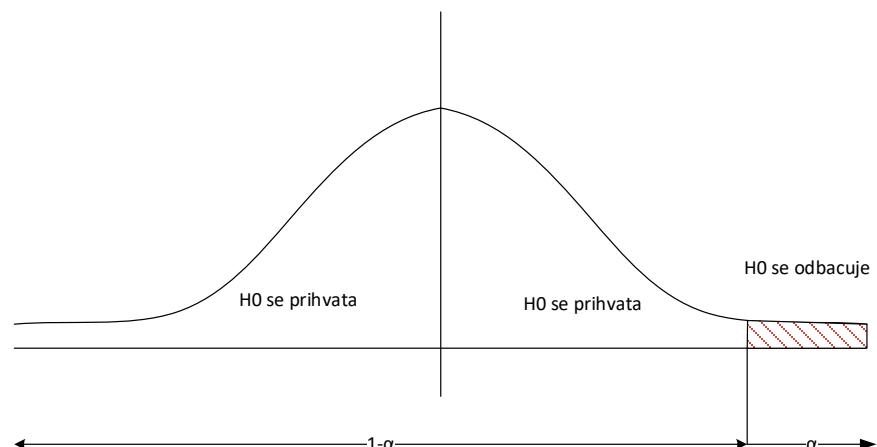
$$H_1: \mu_D < 0$$



3) Složen slučaj (desni-one tail):

$$H_0: \mu_D \leq 0$$

$$H_1: \mu_D > 0$$



Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka

• Izračunavanje veličine uticaja u T-testu zavisnih uzoraka

Rezultati T-testa zavisnih uzoraka nam pokazuju da li je uočena razlika statistički značajna. Međutim, utvrđivanje statističke značajnosti uočene razlike između posmatrana dva skupa nam ništa ne govori o veličini te razlike tj. o veličini uticaja analiziranog faktora koji uslovljava uočenu razliku. Utvrđena statistička značajnost nam jedino kazuje da je verovatnoća da je uočena razlika između dva skupa slučajna veoma mala (manja od granične).

Za određivanje veličine uticaja može se koristiti eta kvadrat pokazatelj koji se računa po sledećoj formuli:

$$\eta^2 = \frac{t^2}{t^2 + (n-1)}$$

Smernice za tumačenje ove veličine glase:

- 0.01=mali uticaj,
- 0.06=umeren uticaj
- 0.14=veliki uticaj

Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka

- Razmatranje razlike proporcija dveju populacija

Proporocije
populacija

- Prepostavke

$$n_1\pi_1 \geq 5, n_1(1-\pi_1) \geq 5$$

$$n_2\pi_2 \geq 5, n_2(1-\pi_2) \geq 5$$

Cilj: Testiranje hipoteze ili
formiranje intervala
poverenja za razliku
proporcija dveju populacija:

$$\pi_1 - \pi_2$$

Polazna osnova za
utvrđivanje razlike je:

$$p_1 - p_2$$

Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka

- Oblici nulte i alternativne hipoteze za dve proporcije populacije:

1) Prost slučaj (obostrani- two tail):

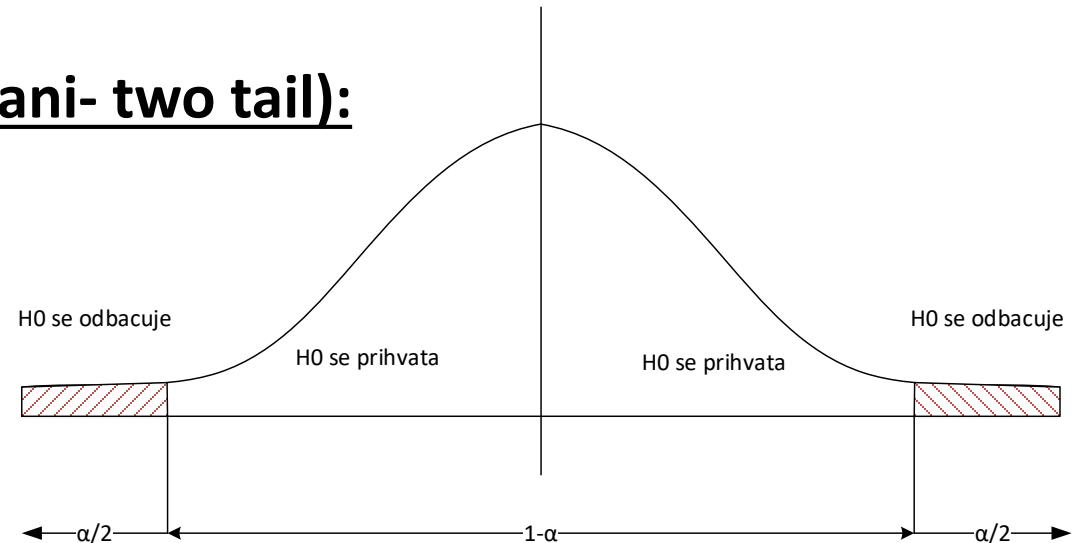
$$H_0: \pi_1 = \pi_2$$

$$H_1: \pi_1 \neq \pi_2$$

Odnosno

$$H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0$$

$$H_1: \pi_1 - \pi_2 \neq 0$$



Polazna osnova za utvrđivanje razlike je:

$$\pi_1 - \pi_2$$

Zajednička proporcija:

$$\bar{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka uzorka

- Oblici nulte i alternativne hipoteze za dve proporcije populacije :

2) Složen slučaj (levi-one tail):

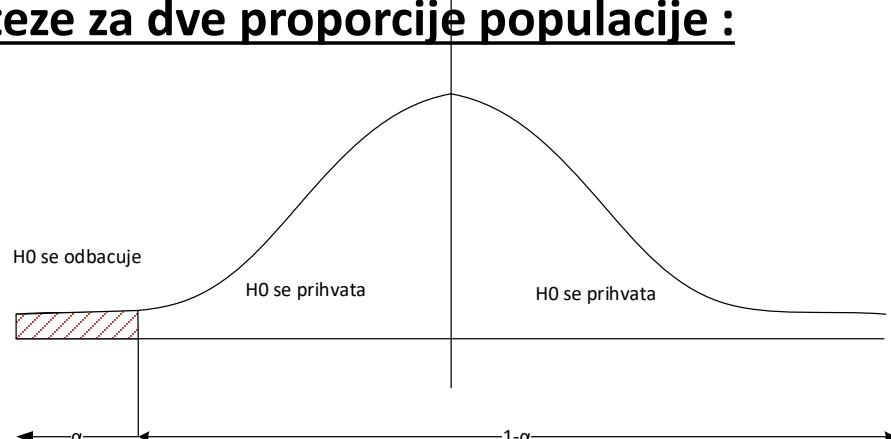
$$H_0: \pi_1 \geq \pi_2$$

$$H_1: \pi_1 < \pi_2$$

Odnosno

$$H_0: \pi_1 - \pi_2 \geq 0$$

$$H_1: \pi_1 - \pi_2 < 0$$



3) Složen slučaj (desni-one tail):

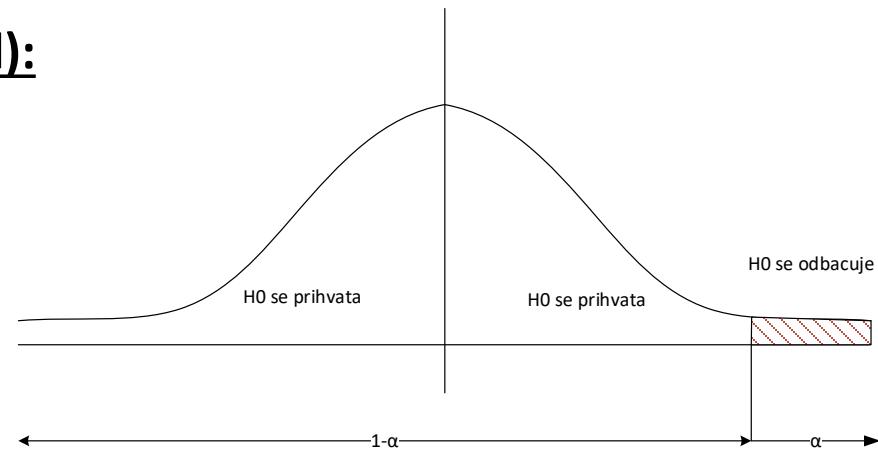
$$H_0: \pi_1 \leq \pi_2$$

$$H_1: \pi_1 > \pi_2$$

Odnosno

$$H_0: \pi_1 - \pi_2 \leq 0$$

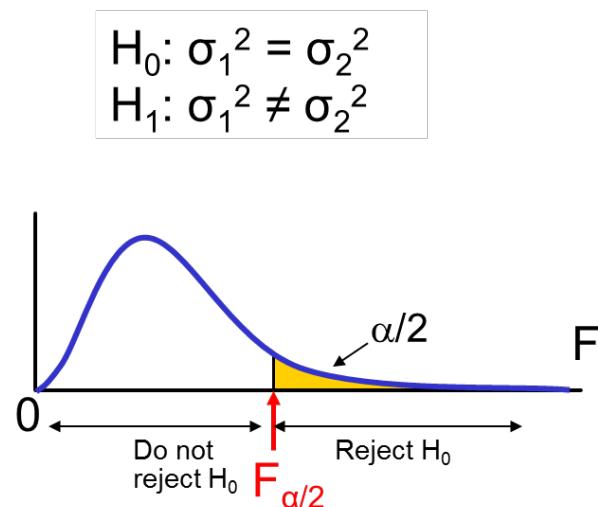
$$H_1: \pi_1 - \pi_2 > 0$$



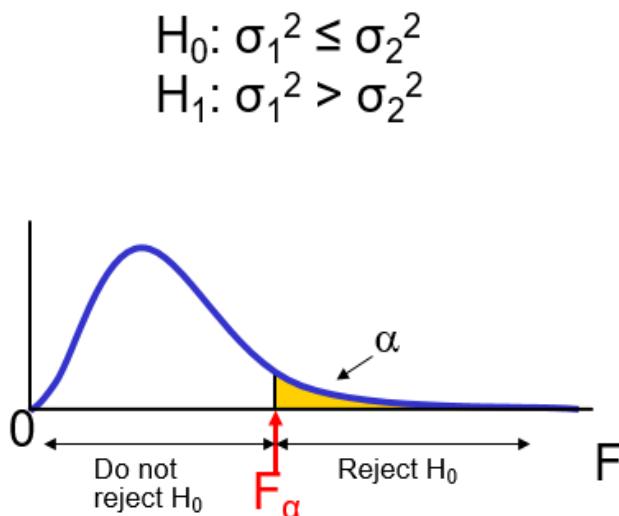
Testiranje statističkih hipoteza zasnovano na dva uzorka uzorka

- Oblici nulte i alternativne hipoteze za testiranje odnosa varijansi dveju populacija :

1) Prost slučaj (obostrani- two tail)



2) Složen slučaj (desni-one tail):



Reject H_0 if $F_{STAT} > F_{\alpha/2}$

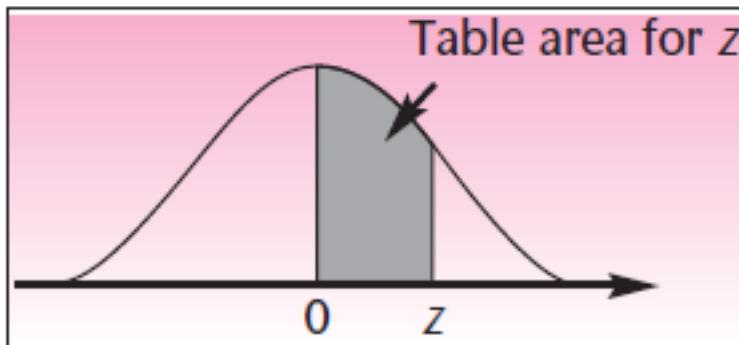
Reject H_0 if $F_{STAT} > F_\alpha$

$$F_{STAT} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad df_1 = n_1 - 1 ; \quad df_2 = n_2 - 1$$

Normalna distribucija-tabelarne vrednosti

Verovatnoće

Ukupna površina ispod normalne distribucije je 1. Možemo koristiti tabele da pronađemo oblasti verovatnoće za određene z-vrednosti



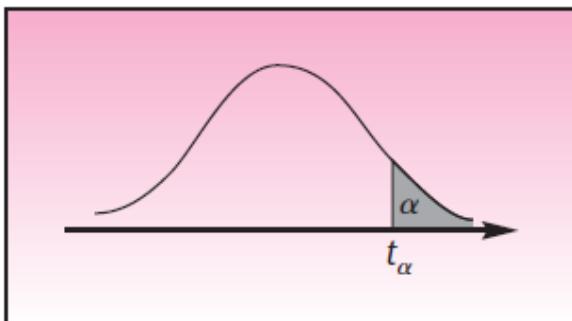
Označena površina za vrednost $z \leq 1$ iznosi 34.13%. To znači da je verovatnoća za dobijanje vrednosti manje od 1σ iznad aritmetičke sredine 0.3413.

Takođe, moglo bi se reći da je procenat distribucije između $z = -1$ i $z = +1$ iznosi 68.26%

The table areas are probabilities that the standard normal random variable is between 0 and z .

z	Second Decimal Place in z									
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Student-ova t distribucija-tabelarne vrednosti



Degrees of Freedom	$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Rezime poglavlja



- Pitanja?
- Diskusija!